

5 次陽的 Runge-Kutta 法 の 特性 の 比較 と 最適化

山梨大工 田中正次 山下茂

田名後保彦 尾崎実

§1. まえがき

常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x), y(x), y_0, f(x, y) \in R^m \quad (1.1)$$

が与えられたとする。ここで f は十分滑らかとする。このとき 5 次陽的 Runge-Kutta 法は、一般に

$$k_i = h_m f(x_n + a_i h_m, y_n + \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} k_j), \quad a_1 = b_{i0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 c_i k_i \quad (1.2)$$

と表される。記法を簡略化するためには、以下では式 (1.2) を

次の係数行列

0						
a_2	b_{21}					
a_3	b_{31}	b_{32}				
a_4	b_{41}	b_{42}	b_{43}			
a_5	b_{51}	b_{52}	b_{53}	b_{54}		
a_6	b_{61}	b_{62}	b_{63}	b_{64}	b_{65}	
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6

(1.3)

によって表わす。

5 次陽的 Runge-Kutta 法に関する研究は、20 世紀初頭に始まるが、特に 1960 年代にはなつて最盛期を迎え、続々と新公式が提案された。そして同年代の末頃から、その応用研究、すなわちそれを誤差評価が可能な組込れ型の公式に応用したものが次々として見られるようになった。(W. Kutta (1901) [1], E. J. Nyström (1925) [2], W. E. Milne & R. R. Regnold (1962), J. C. Butcher (1964) [3], E. B. Shanks (1966) [4], H. A. Luther & H. P. Konen (1965) [5], J. D. Lawson (1966) [6], C. R. Canity (1966, 1969) [7], [8], H. A. Luther (1966) [9], E. Fehlberg (1968) [10], D. G. Bettis (1978) [11], R. England (1969) [12], J. H. Verner (1978) [13], K. R. Jackson, W. H. Enright & T. E. Hull (1978) [16])

著者はこの研究において、打ち切り誤差、安定性、丸め誤差に関する性質の 3 つの観点から知られている公式の優劣の比較を試みると共に、これらの観点から好ましいと考えられる公式を新規に提案する。特にこれまでほとんど未開拓であった C_2 非零型公式群が、知られている C_2 零型公式群と同様に量かなまりを約束するものであることが示される。

§2. 公式 (1.2) が 5 次法になるための条件式群とその解

2.1 (1.1) が単一の微分方程式である場合の条件式群

$$\sum_{i=1}^6 c_i = 1 \quad (2.1.1) \quad \sum_{i=2}^6 a_i c_i = \frac{1}{2} \quad (2.1.2)$$

$$\sum_{i=2}^6 a_i^2 c_i = \frac{1}{3} \quad (2.1.3) \quad \sum_{i=2}^6 a_i^3 c_i = \frac{1}{4} \quad (2.1.4)$$

$$\sum_{i=2}^6 a_i^4 c_i = \frac{1}{5} \quad (2.1.5) \quad \sum_{i=2}^6 p_{i-2} c_i = \frac{1}{6} \quad (2.1.6) \quad \sum_{i=3}^6 a_i p_{i-2} c_i = \frac{1}{8} \quad (2.1.7)$$

$$\sum_{i=2}^6 a_i^2 p_{i-2} c_i = \frac{1}{10} \quad (2.1.8) \quad \sum_{i=2}^6 q_{i-2} c_i = \frac{1}{12} \quad (2.1.9) \quad \sum_{i=3}^6 a_i q_{i-2} c_i = \frac{1}{15} \quad (2.1.10)$$

$$\sum_{i=2}^6 p_{i-2}^2 c_i = \frac{1}{20} \quad (2.1.11) \quad \sum_{i=2}^6 r_{i-2} c_i = \frac{1}{20} \quad (2.1.12) \quad \sum_{i=4}^6 \left(\sum_{j=1}^3 p_j b_{ij+2} \right) c_i = \frac{1}{24} \quad (2.1.13)$$

$$\sum_{i=4}^6 \left(\sum_{j=1}^{i-3} q_j b_{ij+2} \right) c_i = \frac{1}{60} \quad (2.1.14) \quad \sum_{i=4}^6 \left(\sum_{j=2}^{i-1} (a_j + a_i) p_{j-2} b_{ij} \right) c_i = \frac{7}{120} \quad (2.1.15)$$

$$p_1 b_{52} b_{64} c_5 + \left[p_1 b_{43} b_{64} + \left(\sum_{i=1}^2 p_i b_{5i+2} \right) b_{65} \right] c_6 = \frac{1}{120} \quad (2.1.16)$$

$$\therefore \quad a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (i=2, 3, 4, 5, 6)$$

$$p_i = \sum_{j=2}^{i+1} a_j b_{i+2,j} \quad q_i = \sum_{j=2}^{i+1} a_j^2 b_{i+2,j} \quad r_i = \sum_{j=2}^{i+1} a_j^3 b_{i+2,j}$$

$$(i=1, 2, 3, 4) \quad (2.1.17)$$

である。

2.2 (1.1) が連立微分方程式である場合の条件式群

(2.1.15) が次の 2 つの方程式に分れる 以外は上と全く同じ

$$\text{である。} \quad \sum_{i=4}^6 \left(\sum_{j=2}^{i-1} a_j p_{j-2} b_{ij} \right) c_i = \frac{1}{40} \quad (2.1.15-1)$$

$$\sum_{i=4}^6 \left(\sum_{j=1}^{i-3} p_j b_{i,j+2} \right) a_i c_i = \frac{1}{30} \quad (2.1.15-2)$$

2.3 条件式群の解

単一の微分方程式に対する条件式群の解は、連立微分方程式に対する条件式群の解になっている。

2.3.1 $c_2=0$ の場合 (C. R. Cavity [7],[8] を見よ.)

$$\begin{aligned} & \frac{8}{9} a_2 a_4 a_5 a_6 - \frac{1}{6} (a_2 a_4 a_5 + a_2 a_4 a_6 + a_2 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6) \\ & + \frac{1}{3} (a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) - \frac{1}{4} (a_2 + a_4 + a_5 + a_6) \\ & + \frac{1}{3} \neq 0 \quad \text{のとき, 次の 3 つの解系に分れる。} \end{aligned}$$

(A) 解系 I $10a_3^2a_4 - 8a_3a_4 - a_3 + 2a_4 = 0$ の場合

この場合自由パラメータは a_2, a_3, a_5, a_6 である。

(B) 解系 II $10a_3^2a_4 - 8a_3a_4 - a_3 + 2a_4 = 0$ かつ $a_2 = a_3$ の場合

この場合自由パラメータは a_2, a_5, a_6 である。

(C) 解系 III $a_6 = 1$ の場合

この場合自由パラメータは a_2, a_3, a_4, a_5 及び b_{43} である。

2.3.2 $C_2 \neq 0$ の場合 (C.R. Cassidy [7], [8] を見よ)

条件式群 (2.1.1) ~ (2.1.17) に式 $\sum_{i=2}^6 a_i^2 c_i = \beta$ (2.1.18)

を加える。このとき $a_6 = 1$ の場合の解は、自由パラメータ

$a_2, a_3, a_4, a_5, b_{43}, c_i$ (or β) をもつ。

§3. 打ち切り誤差とその大小の判定他

5 次 Runge-Kutta 法 (以下陽的を省略する) の $x = x_n$ における

局所打ち切り誤差を T とおけば、 $T = \gamma_5 h^6 + O(h^7)$ (3.1)

と書くことができる。ここで γ_5 は、(1.1) が単一であるかまたは

は連立であるかにしたがって、次のように表される。

(i) (1.1) が単一の微分方程式である場合

$$\begin{aligned} \gamma_5 = & a_{5,1} D^4 f + a_{5,2} f_3 D^4 f + a_{5,3} f_3^2 D^3 f + a_{5,4} f_3^3 D^2 f + a_{5,5} f_3^4 D f \\ & + a_{5,6} D^3 f D f_3 + a_{5,7} f_3 D^2 f D f_3 + a_{5,8} f_3^2 D f D f_3 + a_{5,9} D^2 f_3 D f + a_{5,10} f_3 D^2 f_3 D f \\ & + a_{5,11} D^2 f_3 D^2 f + a_{5,12} f_3 D^2 f D f + a_{5,13} f_3 f_3 (D f)^2 + a_{5,14} D f_3 (D f)^2 \\ & + a_{5,15} (D f_3)^2 D f \Big|_{\substack{x=x_n \\ y=y_n}} \quad (3.2) \end{aligned}$$

(ii) (1.1) が連立微分方程式である場合

$$\begin{aligned}
r_j = & a_{j,1}^* \{y_j\}_1 + a_{j,2}^* \{y_j\}_2 + a_{j,3}^* \{y_j\}_3 + a_{j,4}^* \{y_j\}_4 + a_{j,5}^* \{y_j\}_5 \\
& + a_{j,6}^* \{y_j\}_6 + a_{j,7}^* \{y_j\}_7 + a_{j,8}^* \{y_j\}_8 + a_{j,9}^* \{y_j\}_9 \\
& + a_{j,10}^* \{y_j\}_{10} + a_{j,11}^* \{y_j\}_{11} + a_{j,12}^* \{y_j\}_{12} + a_{j,13}^* \{y_j\}_{13} \\
& + a_{j,14}^* \{y_j\}_{14} + a_{j,15}^* \{y_j\}_{15} + a_{j,16}^* \{y_j\}_{16} + a_{j,17}^* \{y_j\}_{17} \\
& + a_{j,18}^* \{y_j\}_{18} + a_{j,19}^* \{y_j\}_{19} + a_{j,20}^* \{y_j\}_{20} \Big|_{\substack{x=x_n \\ y=y_n}} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

ここで、 a_{kj} , a_{kj}^* は公式の係数 a_{kj} の関数で、 $D = \frac{\partial}{\partial x} + f_n \frac{\partial}{\partial y}$, $\{y_j\}_1, \{y_j\}_2, \dots$ 等の a_{kj}^* の係数は、微分方程式の右辺の関数ベクトル f から導かれたものである（詳細については Butcher [3] を参照されたい）。(3.2) 及び (3.3) における右端の $\Big|_{\substack{x=x_n \\ y=y_n}}$ は関数が (x_n, y_n) で評価されることを示す。

打ち切り誤差項の主項の大きさを判定するためには、(3.2) 及び (3.3) に対し、それぞれ次に示す3種類及び2種類の精度判定基準を定義する。

$$\begin{aligned}
A_{j1} = & 32|a_{j,1}| + 14|a_{j,2} + a_{j,9}| + 16|a_{j,2} + 3a_{j,9}| + (4|a_{j,2} + 3a_{j,9}| \\
& + |a_{j,2} + a_{j,9}| + |a_{j,2}| + |a_{j,3}| + |3a_{j,3} + a_{j,10}| + |3a_{j,3} + 2a_{j,10} + a_{j,14}| \\
& + |a_{j,3} + a_{j,10} + a_{j,14}| + |a_{j,4}| + (2|a_{j,4} + a_{j,8}| + |a_{j,4} + a_{j,8} + a_{j,13}| \\
& + 2|a_{j,5}| + |3a_{j,5} + 2a_{j,11}| + |3a_{j,5} + 4a_{j,11}| + |a_{j,6} + 2a_{j,11}| + 2|a_{j,6}| \\
& + |3a_{j,6} + 2a_{j,11}| + |a_{j,6} + a_{j,11}| + |3a_{j,6} + a_{j,11}| + |a_{j,7}| + |a_{j,7} + a_{j,12}| \\
& + |2a_{j,7} + a_{j,13}| + |3a_{j,7} + 2a_{j,12} + 2a_{j,15}| + |a_{j,7} + a_{j,12} + a_{j,15}| \\
& + |a_{j,8} + 2a_{j,13}| + |a_{j,9}| + 8|a_{j,9}| + |a_{j,10}| + |2a_{j,10} + 2a_{j,14}| + |a_{j,10} \\
& + 2a_{j,14}| + 4|a_{j,11}| + |2a_{j,12} + 2a_{j,15}| + |a_{j,12}| + |a_{j,12} + a_{j,15}| \\
& + |a_{j,13}| + 2|a_{j,14}| + |a_{j,15}| \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$A_{12} = \sum_{j=1}^{15} |a_{1j}| \quad (3.5)$$

$$A_{13} = \sum_{j=1}^{15} a_{1j}^2 \quad (3.6)$$

$$A_{12}^* = \sum_{j=1}^{20} |a_{1j}^*| \quad (3.7)$$

$$A_{13}^* = \sum_{j=1}^{20} a_{1j}^{*2} \quad (3.8)$$

M, L がそれぞれ $|f(x, y)| \leq M$, $|\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}| \leq \frac{L^{i+j}}{M^{i-1}}$, $i+j \leq 6$ を満足する定数であるとき, A_{11} は γ_5 の Lotkin の意味の誤差限界

$|\gamma_5| \leq A_{11} M L^6$ の, 公式の係数だけに依存する部分である。

なお, 次の誤差に関する性質の良否を判定するために

$$R_0 = \sum_{i=1}^6 |c_i| + \sum_{i=2}^6 \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \quad (3.9)$$

を定義する。

§4. 安定性

テスト方程式 $y' = \lambda y$ (λ : 複素定数) (4.1) を (1.2)

に代入すると,

$$y_{n+1} = \left\{ 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} + \frac{(h\lambda)^5}{5!} + \alpha_6 \frac{(h\lambda)^6}{6!} \right\} y_n$$

が得られる。ここで $\alpha_6 = 6! b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} b_{55} b_{66} C_6$ である。

(4.2)

そのとき

$$S = \left\{ h\lambda \mid \left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} + \frac{(h\lambda)^5}{5!} + \alpha_6 \frac{(h\lambda)^6}{6!} \right| < 1 \right\} \quad (4.3)$$

によって与えられる複素平面上の集合 S を, (1.2) の絶対安定領域

という。また $S \cap R$ (R : 実数空間) を (1.2) の絶対安定区間と

いう。§6. にかいて、^{外は}絶対安定区間が最大でしかも打ち切り精度のよい公式が存在するかどうかを調べる。

§5. 打ち切り精度の面における 5 次法の改良 I

知られている公式は, 一例を除いてすべて $C_2 = 0$ 型である

が、ここでは丸め誤差に関する性質を悪化させることなく打ち切り精度を改良することを考える。丸め誤差に関する性質は(3.9)の R_0 の大小で判定し、打ち切り精度は(3.4)~(3.8)の $A_{f,j}$ 及び $A_{f,j}^*$ によって測る。

5.1 $C_2=0$ 型公式の場合

改良は2段階に分けて行われた。

第1段階 (Mesh法)

各解系について、自由パラメータを表1に示す刻み幅で変域全体を変動させるときに得られるすべての多次元格子点について、前記の $A_{f,j}$ 、 $A_{f,j}^*$ 及び R_0 を計算し、許された R_0 の制限内で、 $\min A_{f,2}$ 及び $\min A_{f,2}^*$ を求める自由パラメータの組を選び、対応する公式の係数を決定した。上記の方法をMesh法と呼ぶ。

第2段階 (Complex法) ([18],[19])

初期点をMesh法によって選ばれた最適公式及びよく知られた公式の自由パラメータの組とし、最適化手法の一つであるM.J.BoxによるSimplex法を用いて、 $A_{f,2}$ 及び $A_{f,2}^*$ の最小化を試みる。得られた単一の微分方程式に対する公式3例、連立微分方程式に対する公式1例を次に示す。

表1. Mesh 法による最適化 ($C_2=0$ の場合)

解系	自由パラメータとその変域	刻み幅
I	$0 < a_2, a_3, a_5 \leq 1$ $0 < a_6 < 1$	10^{-1} 及び 2^{-5}
II	$0 < a_2, a_5 \leq 1$ $0 < a_6 < 1$	10^{-1} 及び 2^{-5}
III	$0 < a_2, a_3, a_4, a_5 \leq 1$ $0 \leq b_{43} \leq 2$	10^{-1} 及び 2^{-5}

〔公式1〕($C_2=0$, 解系 I)

0									
$\frac{13}{47}$	$\frac{13}{47}$								
$\frac{13}{47}$	$\frac{13}{94}$	$\frac{13}{94}$							
$\frac{61}{1220}$	$\frac{62551}{1319261}$	$-\frac{139239}{494270}$	$\frac{238863}{324934}$						
$\frac{69}{80}$	$\frac{150894}{450631}$	$\frac{92336}{1071959}$	$-\frac{76201}{134526}$	$\frac{273072}{270917}$					
$\frac{56}{65}$	$-\frac{24393}{4954512}$	$\frac{147512}{1817365}$	$\frac{174004}{509961}$	$\frac{25036}{6160959}$	$\frac{49852}{224689}$				
	$\frac{111160}{1149711}$	0	$\frac{69813}{218696}$	$\frac{122410}{481873}$	$\frac{323816}{2583995}$	$\frac{106387}{783349}$			

〔公式2〕($C_2=0$, 解系 II)

0									
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$								
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$							
$\frac{5}{8}$	$\frac{47}{16}$	$-\frac{33}{8}$	$\frac{29}{16}$						
$\frac{3}{4}$	$-\frac{87}{60}$	$\frac{67}{30}$	$-\frac{13}{30}$	$\frac{2}{5}$					
1	$-\frac{1}{115}$	$-\frac{8}{115}$	$\frac{82}{115}$	$-\frac{42}{115}$	$\frac{18}{23}$				
	$\frac{11}{150}$	0	$\frac{52}{135}$	$\frac{128}{675}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{23}{270}$			

[公式 3] ($C_2=0$, 解系Ⅲ)

0						
$\frac{603}{10000}$	$\frac{603}{10000}$					
$\frac{6}{25}$	$-\frac{398}{1675}$	$\frac{32}{67}$				
$\frac{16}{25}$	$\frac{98393}{30150}$	$-\frac{2800}{603}$	$\frac{101}{50}$			
$\frac{3}{4}$	$-\frac{939931}{274632}$	$\frac{43625}{8576}$	$-\frac{5715}{4096}$	$\frac{495}{1024}$		
1	$\frac{102217}{99385}$	$-\frac{109625}{73566}$	$\frac{12065}{11712}$	$-\frac{3705}{21472}$	$\frac{1216}{2013}$	
	$\frac{235}{5456}$	0	$\frac{3125}{8208}$	$\frac{3125}{12672}$	$\frac{64}{297}$	$\frac{61}{684}$

[公式 4] ($C_2=0$, 解系Ⅲ) 連立微分方程式に対する公式

0						
$\frac{193}{1250}$	$\frac{193}{1250}$					
$\frac{63}{250}$	$\frac{4473}{96500}$	$\frac{3969}{19200}$				
$\frac{3}{5}$	$\frac{1723}{4825}$	$-\frac{2349}{1930}$	$\frac{73}{50}$			
$\frac{383}{500}$	$\frac{77867}{3206475}$	$\frac{425551}{776743}$	$-\frac{101989}{383792}$	$\frac{812553}{7767995}$		
1	$-\frac{60857}{282355}$	$\frac{87027}{1296563}$	$\frac{263727}{274487}$	$-\frac{202791}{324298}$	$\frac{123250}{151611}$	
	$\frac{32891}{434322}$	0	$\frac{50879}{134371}$	$\frac{12475}{64989}$	$\frac{104237}{579567}$	$\frac{1153}{14586}$

5.2 $C_2 \neq 0$ 型公式の場合

改良は $C_2=0$ 型公式の場合と同様 2 段階に分けて行われた

第 1 段階 (Mesh 法)

自由パラメータを, 表 2 に示す刻み幅で変域全体を変動

させるときに得られるすべての多次元格子点について, 前記
の $A_{s,j}$, $A_{s,j}^*$ は R_0 を計算し, $\min A_{s,j}$ 及び $\min A_{s,j}^*$ ^{を世える係数の組を} R_0 について制限

つきまねは制限なしで求めた。係数の計算式に含まれる根号内を特に0にすると、 C_1 が自由パラメータでなくなり5自由度となる。

表 2. Mesh 法による最適化 ($C_2 \neq 0$ の場合)

解系	自由パラメータとその変域	刻み幅
根号内 ≠ 0	$0 < a_2, a_3, a_4, a_5, b_{43}, c_1 \leq 1$	2^{-3}
根号内 = 0	$0 < a_2, a_3, a_4, a_5 \leq 1$ $-1 \leq b_{43} \leq 3$	2^{-3}
	$0 < a_2, a_3, a_4, a_5, b_{43} \leq 1$	10^{-1}

第2段階

初期点を Mesh 法によって選ばれた最適公式及び知られている公式の自由パラメータの組とし, Complex 法を用いて $A_{5,2}$ 及び $A_{5,2}^*$ の最小化を試みる。得られた単一微分方程式に対する公式 1 例及び連立微分方程式に対する公式 2 例を次に示す。

[公式5]

(0.0)	(0.0211402552) 170898	(-0.641462728) 842467	(0.830097379) 844592	
(0.188634651) 002125	(3.10710721) 024121	(-3.63702791) 015105	(0.999255856) 729549	
(0.469335156) 819706	(-1.15079632) 316185	(1.56876048) 970942	(-0.260168067) 819940	(0.511295292) 049403
(0.669091390) 777035	(12.07754475) 37496	(-15.2005354) 725058	(5.10256828) 517781	(-2.57260016) 505107
(1.0)	(2.079935211) 291022	(-0.329519015) 923040	(0.457792232) 191287	(-0.02137486813) 178774
				(0.491144183) 160597
				(0.102022297) 411922

10

[公式 6] 連立微分方程式に対する公式

(0.0)					
(0.0414070806) 8939672	(0.0414070806) 8939672				
(0.1841896777) 98903	(-0.209500716) 587076	(0.39369039) 4385979			
(0.528832660) 270466	(2.57501907) 815974	(-3.6373349) 2018888	(1.59114850) 229960		
(0.666746653) 755744	(0.493594751) 235901	(-0.576544438) 704292	(0.434427837) 783176	(0.315268503) 440959	
(1.0)	(1.66006569) 631664	(-2.98006818) 551266	(2.42168981) 517284	(-1.77088240) 776699	(1.66919508) 179017
	(0.199915665) 460040	(-0.263640056) 894282	(0.493161567) 898496	(-0.04145549765) 924295	(0.510164435) 232456
					(0.101853885) 762527

[公式 7] 連立微分方程式に対する公式

(0.0)					
(0.01378375611) 616331	(0.01378375611) 616331				
(0.172078557) 047508	(-0.886833349) 014579	(1.05891190) 608209			
(0.517979444) 129504	(9.31559825) 064623	(-10.4165734) 892820	(1.61895468) 276527		
(0.648777654) 777929	(2.71315267) 738351	(-2.94825524) 297633	(0.596795284) 571871	(0.287084935) 798881	
(1.0)	(7.38041903) 049620	(-8.91521297) 310665	(2.73203954) 139356	(-2.14307577) 879712	(1.94583018) 001400
	(0.75035179948) 5475	(-0.8478939090) 81646	(0.53080152) 155844	(-0.120453112) 765459	(0.582120882) 238395
					(0.105072818) 564801

§6. 打ち切り精度の面における 5 次法の改良 II

(4.3) の $\alpha_6 \approx 0.560$ のとき, 同式によつて定義される (1.2) の絶対安定領域 S が最大になることが知られている [6]. 以下について, $C_2 = 0$ と $C_2 \neq 0$ の二つの場合について, 絶対安定領域が最大でしかも打ち切り精度が可能な限りよい公式を導く。

6.1 $C_2=0$ 型公式の場合

Lawson 型の公式は解系 III に含まれるが，こゝでも同様に
 について考えよう。この系には表 1 で見るように 5 つの自由
 パラメータが存在するが，まづその中で b_{43} を $\alpha_6 \approx 0.560$ にする
 ように次式によつて定め，自由パラメータから除外する。

$$b_{43} = \frac{0.56}{6! b_{21} b_{32} b_{54} b_{65} C_6} \quad (6.1.1)$$

ついで，残りのパラメータを変域 $0 < a_2, a_3, a_4, a_5 \leq 1$ にかいて刻み
 幅 0.1 で変動させ，得られる 4 次元格子点のすべてについて
 $A_{5,2}, A_{5,2}^*$ 及び R_0 を計算し， $R_0 \leq 20$ なる制限のもとで $\min_{\{a_i, C_i\}} A_{5,2}$ 及
 $\min_{\{a_i, C_i\}} A_{5,2}^*$ を与えるパラメータの組を求めた。そして，そのように
 して得られたパラメータの組を初期点に選り，complex 法を用い
 てさらに最適化を進めた。また他方では Mesh 法で得られた最
 適パラメータの周辺を，さらに刻み幅を小さくしてくり返し探索
 した。得られた公式 2 例を次に示す。

[公式 8]

(0.0)					
(0.25)	(0.25)				
(0.265)	(0.12455)	(0.14045)			
(0.495)	(-0.200123217) 040465	(-0.286989832) 285115	(1.18211304) 932558		
(0.72)	(0.122056095) 124881	(-0.365572613) 264035	(0.741978666) 955124	(0.221539851) 184030	
(1.00)	(0.179818451) 968210	(1.02404974) 764087	(-0.840430885) 733904	(-0.335064551) 975748	(0.971627238) 100573
	(0.07848186859) 317452	(0.0)	(0.406304281) 079290	(0.124338196) 236759	(0.3034333391) 47625
					(0.08744231494) 315166

[公式9] 連立微分方程式に対する公式

(0.0)					
(0.19)	(0.19)				
(0.265)	$\begin{pmatrix} 0.08019736842 \\ 105264 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.184802631 \\ 578947 \end{pmatrix}$			
(0.695)	$\begin{pmatrix} -0.109494848 \\ 950429 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.377618200 \\ 375151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.18211304 \\ 932558 \end{pmatrix}$		
(0.753)	$\begin{pmatrix} 0.797995018 \\ 422359 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.633718519 \\ 564683 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0122135222 \\ 712211 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.576509978 \\ 871102 \end{pmatrix}$	
(1.0)	$\begin{pmatrix} -0.309612131 \\ 28076 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.413037308 \\ 99423 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.654359921 \\ 096256 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.171130541 \\ 131648 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.379804202 \\ 251141 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0.07871183320 \\ 952269 \end{pmatrix}$	(0.0)	$\begin{pmatrix} 0.4050695104 \\ 74424 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.298077496 \\ 302875 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.132179919 \\ 916599 \end{pmatrix}$

6.2 $C_2 \neq 0$ 型公式の場合

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.0859612400 \\ 9657895 \end{pmatrix}$$

自由パラメータ $a_2, a_3, a_4, a_5, b_{43}$ 及び C_1 の中で $b_{43} \neq 0, C_1 = 0$ の

場合と同様に (6.1.1) により決定されるので、自由パラメータ

から除外される。残りの各自由パラメータの変域を $0 < a_2, a_3, a_4, a_5, C_1 \leq 1.0$

とし、まず各パラメータを0.1刻みで変動させて得られるすべて

の5次元格子点の中で、 $R_0 \leq 10$ なる制限のもとで $\min_{\{a_i, C_1\}} A_{5,2}$ 及び

$\min_{\{a_i, C_1\}} A_{5,2}^*$ を与える自由パラメータの組を選んだ。つまり、一

方ではこれらの最適パラメータの組を初期点にとり、complex法

を用いてさらに最適化を進めた。また他方では、最適パラメ

ータの周辺をさらに刻み幅を小さくしてくり返し探索した。

得られた公式2例を次に示す。

[公式10]

0.0	
$\frac{8648263}{51545625}$	$\frac{8648263}{51545625}$

$\frac{80750416}{137489609}$	$-\frac{31606479}{63970966}$	$\frac{100192076}{92648527}$			
$\frac{20250000}{45000001}$	$-\frac{6945203}{1865192220}$	$\frac{23222233}{169469649}$	$-\frac{30280403}{342905934}$		
$\frac{315152139}{401467693}$	$\frac{55087763}{35324281}$	$-\frac{47581641}{192979394}$	$\frac{131478864}{192945911}$	$-\frac{89776109}{74234259}$	
/	$-\frac{41483111}{40465167}$	$\frac{78955679}{252816567}$	$\frac{42807988}{995155907}$	$\frac{628138318}{519871169}$	$\frac{50463876}{109329073}$
	$\frac{31547275}{313847082}$	$\frac{89118629}{219641305}$	$\frac{58832253}{170105992}$	$-\frac{32583312}{256707733}$	$\frac{53150385}{283498924}$
					$\frac{13343813}{152802840}$

〔公式 11〕 連立微分方程式に対する公式

$\frac{114999}{1000000}$	$\frac{114999}{1000000}$				
$\frac{199999}{1000000}$	$\frac{22621079}{390809906}$	$\frac{21415341}{150688699}$			
$\frac{154941072}{264163139}$	$\frac{5922839}{1617521439}$	$-\frac{21858109}{29254327}$	$\frac{140379017}{105544235}$		
$\frac{90984551}{131007625}$	$\frac{54171113}{215966026}$	$-\frac{145620920}{239286099}$	$\frac{37145194}{47167177}$	$\frac{52677608}{199002189}$	
/	$-\frac{25548691}{248292912}$	$-\frac{41327991}{144822343}$	$\frac{4647942}{4079695}$	$-\frac{84347903}{70771604}$	$\frac{124778683}{128245998}$
	$\frac{41088539}{383319661}$	$-\frac{26769203}{106411648}$	$\frac{31626839}{53336407}$	$\frac{10419679}{808065009}$	$\frac{142576969}{320901859}$
					$\frac{37718337}{400377713}$

§5及び§6において導かれた公式及びよく知られた公式の，
単一の微分方程式及び連立微分方程式に対する各種判定基準を表
3及び表4に示す。

§7. 数値例

多くの問題について数値実験を試みたが，ほぼ同様な結
果が得られているので，ここでは単一微分方程式及び連立微
分方程式の各1問に対する結果のみを表5及び表6に掲げる
。知られている公式については，特性のすぐれている公式の
みを取り上げた。公式の配列の順序は，一部を除いて（19頁へ）

表 3. 各公式の精度判定基準と絶対安定区間
(単一の微分方程式の場合) I_s は絶対安定区間

公式	解系	A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	I_s	R_0
Shanks	3	0.10269×10^{-2}	0.18704×10^{-3}	0.57797×10^{-8}	$-3.55 \sim 0.0$	12570.3
Fehlberg	3	0.46296×10^{-2}	0.11728×10^{-2}	0.53346×10^{-6}	$-3.19 \sim 0.0$	27.9
Butcher(1)	3	0.12891×10^{-2}	0.19965×10^{-2}	0.67346×10^{-6}	$-3.39 \sim 0.0$	10.5
Butcher(2)	3	0.16319×10^{-1}	0.24306×10^{-2}	0.84018×10^{-6}	$-3.39 \sim 0.0$	9.0
Lawson	3	0.18403×10^{-1}	0.36458×10^{-2}	0.15296×10^{-5}	$-5.6 \sim 0.0$	7.8
Butcher(3)	3	0.16146×10^{-1}	0.41667×10^{-2}	0.26373×10^{-5}	$-3.39 \sim 0.0$	9.3
Kutta's family	3	0.35301×10^{-1}	0.71257×10^{-2}	0.71907×10^{-5}	$-3.21 \sim 0.0$	8.5
Nyström	1	0.31519×10^{-1}	0.73333×10^{-2}	0.14134×10^{-4}	$-3.12 \sim 0.0$	12.3
Luther (Radan family)	1	0.31657×10^{-1}	0.83662×10^{-2}	0.14728×10^{-4}	$-3.22 \sim 0.0$	9.5
Butcher(5)	3	0.47704×10^{-1}	0.84815×10^{-2}	0.11160×10^{-4}	$-3.21 \sim 0.0$	22.0
Luther(1)	2	0.63194×10^{-1}	0.13368×10^{-1}	0.32869×10^{-4}	$-2.53 \sim 0.0$	5.4
Sarafyan	2	0.65481×10^{-1}	0.13994×10^{-1}	0.27367×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.5
Luther(2)	1	0.80382×10^{-1}	0.17535×10^{-1}	0.47969×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.1
Luther & Koenen	1	0.71949×10^{-1}	0.17821×10^{-1}	0.48785×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	8.0
Cassidy	$C_2 \neq 0$	0.87755×10^{-1}	0.27890×10^{-1}	0.18230×10^{-3}	$-2.17 \sim 0.0$	89.1
Butcher(4)	3	0.27704×10^{-1}	0.51481×10^{-2}	0.37531×10^{-5}	$-3.22 \sim 0.0$	21.2
England	2	0.67593×10^{-1}	0.13944×10^{-1}	0.27367×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.5
公式 1	1	0.72437×10^{-2}	0.10836×10^{-2}	0.15500×10^{-6}	$-3.68 \sim 0.0$	4.7
公式 2	3	0.47635×10^{-2}	0.99826×10^{-3}	0.10416×10^{-6}	$-3.43 \sim 0.0$	17.2
公式 3	3	0.38036×10^{-2}	0.78336×10^{-3}	0.76413×10^{-6}	$-3.43 \sim 0.0$	26.4
公式 5	$C_2 \neq 0$	0.32474×10^{-2}	0.67324×10^{-3}	0.88082×10^{-6}	$-3.36 \sim 0.0$	16.7
公式 8	3	0.94670×10^{-2}	0.27480×10^{-2}	0.16232×10^{-5}	$-5.6 \sim 0.0$	7.9
公式 10	$C_2 \neq 0$		0.20900×10^{-2}	0.78812×10^{-6}	$-5.6 \sim 0.0$	10.0

表の下部にある公式1～公式10は新規に提案したもので，特に公式8及び公式10は絶対安定区間最大の公式である。表3及び表4において，知られている公式は A_{s2} と A_{s2}^* が次第に大きくなる

表4. 各公式の打ち切り精度判定基準と絶対安定区間
(連立微分方程式の場合)

公式	解 章	A_{52}^*	A_{53}^*	I_s	R_0
Shanks	3	0.18704×10^{-3}	0.55225×10^{-8}	$-3.55 \sim 0.0$	12570.3
Fehlberg	3	0.11728×10^{-2}	0.44772×10^{-6}	$-3.19 \sim 0.0$	27.9
Butcher(1)	3	0.23438×10^{-2}	0.72621×10^{-6}	$-3.39 \sim 0.0$	10.5
Butcher(2)	3	0.29514×10^{-2}	0.96074×10^{-6}	$-3.39 \sim 0.0$	9.0
Lawson	3	0.48611×10^{-2}	0.21927×10^{-5}	$-5.6 \sim 0.0$	7.8
Butcher(3)	3	0.59028×10^{-2}	0.43855×10^{-5}	$-3.39 \sim 0.0$	9.3
Kutta's family	3	0.82773×10^{-2}	0.68887×10^{-5}	$-3.21 \sim 0.0$	8.5
Butcher(4)	3	0.90370×10^{-2}	0.70710×10^{-5}	$-3.22 \sim 0.0$	21.2
Luther (Radan family)	1	0.10588×10^{-1}	0.14240×10^{-4}	$-3.22 \sim 0.0$	9.5
Nyström	1	0.10944×10^{-1}	0.14751×10^{-4}	$-3.12 \sim 0.0$	12.3
Butcher(5)	3	0.12370×10^{-1}	0.16330×10^{-4}	$-3.21 \sim 0.0$	22.0
Luther(1)	2	0.15972×10^{-1}	0.35521×10^{-4}	$-2.53 \sim 0.0$	5.4
Luther(2)	1	0.21701×10^{-1}	0.52430×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.1
Sarafyan	2	0.23667×10^{-1}	0.54181×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.5
Luther & Koenen	1	0.25625×10^{-1}	0.68707×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	8.0
Cassidy	$C_2 \neq 0$	0.30178×10^{-1}	0.18401×10^{-3}	$-2.17 \sim 0.0$	89.1
England	2	0.24752×10^{-1}	0.56865×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.5
公式4	3	0.16908×10^{-2}	0.28592×10^{-6}	$-3.58 \sim 0.0$	8.4
公式6	$C_2 \neq 0$	0.84808×10^{-3}	0.83117×10^{-7}	$-3.55 \sim 0.0$	22.4
公式7	$C_2 \neq 0$	0.73310×10^{-3}	0.83589×10^{-7}	$-3.55 \sim 0.0$	55.9
公式9	3	0.30227×10^{-2}	0.13277×10^{-5}	$-5.60 \sim 0.0$	7.9
公式11	$C_2 \neq 0$	0.28587×10^{-2}	0.13259×10^{-5}	$-5.60 \sim 0.0$	10.0

のように配列されている(一部を除く)。表4において公式4~公式11は新規に提案したもので、そのうち公式9及び公式11は絶対安定区間が最大の公式である。表3及び表4に引用されている「知られている公式」を具体的に知りたい方の便宜のために、22頁に引用文献・掲載頁などを示した。

表 5 $y' = \frac{2y}{1+x}$, $y(0) = 1$ の数値解における誤差刻み幅 $h = 0.1$, ステップ数 80, 解 $y = (1+x)^2$

公式	最初のステップ の誤差	最終ステップ の誤差	最大誤差	相対最大誤差
公式 5	$0.42999382 \times 10^{-9}$	$0.35494917 \times 10^{-7}$	$0.35494917 \times 10^{-7}$	$0.98596992 \times 10^{-9}$
Shanks	$0.56924154 \times 10^{-9}$	$0.46078767 \times 10^{-7}$	$0.46078767 \times 10^{-7}$	$0.12799658 \times 10^{-8}$
公式 2	$0.24893883 \times 10^{-8}$	$0.20627061 \times 10^{-6}$	$0.20627061 \times 10^{-6}$	$0.57297393 \times 10^{-8}$
公式 3	$0.34097554 \times 10^{-8}$	$0.27991447 \times 10^{-6}$	$0.27991447 \times 10^{-6}$	$0.77754021 \times 10^{-8}$
Butcher(1)	$0.63660495 \times 10^{-8}$	$0.52120303 \times 10^{-6}$	$0.52120303 \times 10^{-6}$	$0.14477862 \times 10^{-7}$
公式 1	$0.70383737 \times 10^{-8}$	$0.56256177 \times 10^{-6}$	$0.56256177 \times 10^{-6}$	$0.15626716 \times 10^{-7}$
Fehlberg	$0.15008864 \times 10^{-7}$	$0.12292661 \times 10^{-5}$	$0.12292661 \times 10^{-5}$	$0.34146282 \times 10^{-7}$
公式 10	$0.17768064 \times 10^{-7}$	$0.14228823 \times 10^{-5}$	$0.14228823 \times 10^{-5}$	$0.39524509 \times 10^{-7}$
公式 8	$0.24150919 \times 10^{-7}$	$0.19192392 \times 10^{-5}$	$0.19192392 \times 10^{-5}$	$0.53312201 \times 10^{-7}$
Larson	$0.40924601 \times 10^{-7}$	$0.32633892 \times 10^{-5}$	$0.32633892 \times 10^{-5}$	$0.90649699 \times 10^{-7}$
Luther(1)	$0.17932416 \times 10^{-6}$	$0.14483802 \times 10^{-4}$	$0.14483802 \times 10^{-4}$	$0.40232783 \times 10^{-6}$
Luther(2)	$0.22099285 \times 10^{-6}$	$0.17866871 \times 10^{-4}$	$0.17866871 \times 10^{-4}$	$0.49630197 \times 10^{-6}$

表 6 $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_2 - y_3 \end{cases}$ $\begin{matrix} y_1(0) = 2.0 \\ y_2(0) = 0.0 \\ y_3(0) = 1.0 \end{matrix}$ の数値解における誤差

刻み幅 0.1 ステップ数 80

$$\text{解 } \begin{aligned} y_1 &= 0.5e^{-3x} + 0.5e^{-x} + 1 & y_2 &= -e^{-3x} + 1 \\ y_3 &= 0.5e^{3x} - 0.5e^{-x+1} \end{aligned}$$

公式	最初のステップ の誤差	最終ステップ の誤差	最大誤差	相対最大誤差
公式 4	$0.13706064 \times 10^{-7}$	$0.13988810 \times 10^{-13}$	$0.22566077 \times 10^{-7}$	$0.15002298 \times 10^{-7}$
公式 7	$0.20219427 \times 10^{-7}$	$0.26800784 \times 10^{-12}$	$0.33297131 \times 10^{-7}$	$0.22139718 \times 10^{-7}$
Shanks	$0.20918939 \times 10^{-7}$	$0.30020431 \times 10^{-12}$	$0.34449608 \times 10^{-7}$	$0.22906252 \times 10^{-7}$
公式 6	$0.21430382 \times 10^{-7}$	$0.31818992 \times 10^{-12}$	$0.35292232 \times 10^{-7}$	$0.23466697 \times 10^{-7}$

Δy_1 の 誤差 $\checkmark$	Butcher(1)	$0.84286995 \times 10^{-7}$	$0.28808067 \times 10^{-11}$	$0.13885131 \times 10^{-6}$	$0.92345743 \times 10^{-7}$
	Fehlberg	$0.18990042 \times 10^{-6}$	$0.71742612 \times 10^{-11}$	$0.31285422 \times 10^{-6}$	$0.20807831 \times 10^{-6}$
	公式 9	$0.20086925 \times 10^{-6}$	$0.87045926 \times 10^{-11}$	$0.33095606 \times 10^{-6}$	$0.22013168 \times 10^{-6}$
	Lawson	$0.20086925 \times 10^{-6}$	$0.87057028 \times 10^{-11}$	$0.33095606 \times 10^{-6}$	$0.22013168 \times 10^{-6}$
	公式 11	$0.20095138 \times 10^{-6}$	$0.87114766 \times 10^{-11}$	$0.33109136 \times 10^{-6}$	$0.22022168 \times 10^{-6}$
	Luther(2)	$0.12464422 \times 10^{-5}$	$0.51191273 \times 10^{-10}$	$0.20535769 \times 10^{-5}$	$0.13658761 \times 10^{-5}$
Δy_2 の 誤差 $\checkmark$	Luther(1)	$0.16266505 \times 10^{-5}$	$0.66639805 \times 10^{-10}$	$0.26799821 \times 10^{-5}$	$0.17825080 \times 10^{-5}$
	公式 4	$0.27412293 \times 10^{-7}$	$0.11726731 \times 10^{-13}$	$0.45132557 \times 10^{-7}$	$0.10576474 \times 10^{-6}$
	公式 7	$0.40421176 \times 10^{-7}$	$0.38719028 \times 10^{-14}$	$0.66550839 \times 10^{-7}$	$0.15595686 \times 10^{-6}$
	Shanks	$0.41818282 \times 10^{-7}$	$0.67584827 \times 10^{-14}$	$0.68851082 \times 10^{-7}$	$0.16134731 \times 10^{-6}$
	公式 6	$0.42839764 \times 10^{-7}$	$0.44270143 \times 10^{-14}$	$0.70532887 \times 10^{-7}$	$0.16528849 \times 10^{-6}$
	Butcher(1)	$0.16838078 \times 10^{-6}$	$0.10505485 \times 10^{-13}$	$0.27722806 \times 10^{-6}$	$0.64966288 \times 10^{-6}$
	Fehlberg	$0.37931828 \times 10^{-6}$	$0.11088352 \times 10^{-13}$	$0.62452318 \times 10^{-6}$	$0.14635222 \times 10^{-5}$
	Lawson	$0.40115047 \times 10^{-6}$	$0.13003487 \times 10^{-13}$	$0.66046778 \times 10^{-6}$	$0.15477572 \times 10^{-5}$
	公式 11	$0.40131449 \times 10^{-6}$	$0.11532442 \times 10^{-13}$	$0.66073783 \times 10^{-6}$	$0.15483901 \times 10^{-5}$
	公式 9	$0.40115047 \times 10^{-6}$	$0.13974932 \times 10^{-13}$	$0.66046778 \times 10^{-6}$	$0.15477572 \times 10^{-5}$
	Luther(2)	$0.24894317 \times 10^{-5}$	$0.21538327 \times 10^{-13}$	$0.40986735 \times 10^{-5}$	$0.96049642 \times 10^{-5}$
	Luther(1)	$0.32488067 \times 10^{-5}$	$0.24924507 \times 10^{-13}$	$0.53489253 \times 10^{-5}$	$0.12534858 \times 10^{-4}$
Δy_3 の 誤差 $\checkmark$	公式 4	$0.13706229 \times 10^{-7}$	$0.12503887 \times 10^{-13}$	$0.22566482 \times 10^{-7}$	0.2733535×10^{-7}
	公式 7	$0.20201748 \times 10^{-7}$	$0.25858482 \times 10^{-12}$	$0.33253708 \times 10^{-7}$	$0.40275157 \times 10^{-7}$
	Shanks	$0.20899343 \times 10^{-7}$	$0.28463343 \times 10^{-12}$	$0.34401475 \times 10^{-7}$	$0.41664843 \times 10^{-7}$
	公式 6	$0.21409383 \times 10^{-7}$	$0.30757341 \times 10^{-12}$	$0.35240657 \times 10^{-7}$	$0.42680900 \times 10^{-7}$
	Butcher(1)	$0.84093788 \times 10^{-7}$	$0.28553826 \times 10^{-11}$	$0.13837675 \times 10^{-6}$	$0.16755532 \times 10^{-6}$
	Fehlberg	$0.18941786 \times 10^{-6}$	$0.71448125 \times 10^{-11}$	$0.31166896 \times 10^{-6}$	$0.37737292 \times 10^{-6}$
	公式 9	$0.20028121 \times 10^{-6}$	$0.87301000 \times 10^{-11}$	$0.32951171 \times 10^{-6}$	$0.39895130 \times 10^{-6}$
	Lawson	$0.20028121 \times 10^{-6}$	$0.87292396 \times 10^{-11}$	$0.32951171 \times 10^{-6}$	$0.39895130 \times 10^{-6}$
	公式 11	$0.20036311 \times 10^{-6}$	$0.87316543 \times 10^{-11}$	$0.32964647 \times 10^{-6}$	$0.39911446 \times 10^{-6}$
	Luther(2)	$0.12429895 \times 10^{-5}$	$0.51206067 \times 10^{-10}$	$0.20450966 \times 10^{-5}$	$0.24761310 \times 10^{-5}$
	Luther(1)	$0.16221562 \times 10^{-5}$	$0.66652323 \times 10^{-10}$	$0.26689432 \times 10^{-5}$	$0.32314648 \times 10^{-5}$

解の精度にしたがっている。

表3及び表4と多くの数値例の観察から、新規に提案した公式の誘導に誤りがないこと、特性を判定基準を用いてとらえることが有意義であることなどが知られる。また、著者たちによる公式は、係数の単純さという点では知られている公式に及ばないが、その意図したように打ち切り精度の面ではまざっている。

§8. 結果の考察

詳述は避けるが、著者たちの調査研究によると、個々の知られている公式は、打ち切り精度、安定性などの面では改善の余地を十分に残している。しかし、その際係数がより複雑になるとは一般に避けられないように思われる。また、5段級公式の場合と同様に、打ち切り精度を著しく高めようとするとき、係数の絶対値の和である R_0 が次第に増大し、 R_0 の誤差に関する性質の劣化が懸念されるようになる。しかし、最近の常微分方程式の数値解法ルンゲは倍精度演算を用いることが多いので、 R_0 がかなり大きくても問題はなく、その犠牲によって獲得される高い打ち切り精度は償って余りあると考えられる。知られている公式の中には Butcher (1) がいろいろな観点から言及していると思われるが、我々の提案した公式のいくつかは、係数の単純さなどの点を除けば一層言及された特性をもっている。最

大の絶対安定領域をもつ Lawson の方法は、打ち切り精度の面では改良が可能であると思われる（打ち切り精度の点でもかなりよいが...）。また知られている公式と同程度の打ち切り精度をもつ安定領域のさらに大きい公式が探索可能と思われる。

$C_2 \neq 0$ 型公式は、解算が複雑であることなどが原因でほとんど未開拓であるが、我々が示したように $C_2 = 0$ 型公式で可能なことはほとんど可能で、今後同型の公式を上まわる能力をもつ公式の出現も考えられる。

文 献

1. W. Kutta, Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen, Zeit. Math. Physik, 46, 1901
2. E. J. Nyström, Über die numerische Integration von Differentialgleichungen, Acta Soc. Sci. Fennicae, 50, No. 13, 1925
3. J. C. Butcher, On Runge-Kutta process of high order, J. Austral. Math. Soc., 4, 1964
4. E. B. Shanks, Solutions of differential equation by evaluations of functions, Math. Comp., 20, 1966
5. H. A. Luther & H. P. Konen, Some 5th-order classical Runge-Kutta formulas, SIAM Review, Vol. 7, No. 4, 1965
6. J. D. Lawson, An order five Runge-Kutta process with extended region of stability, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 13, No. 4, 1966

7. C. R. Cassity, Solution of the 5th-order Runge-Kutta equation, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 3, No. 4, 1966
8. C. R. Cassity, The complete solution of 5th order Runge-Kutta equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 6, No. 3, 1969
9. E. Fehlberg, Classical 5th-, 6th-, 7th, and 8th order Runge-Kutta formulas with step-size control, Nasa. tech. rep. No. 287, 1968
11. D. G. Bettis, Efficient embedded Runge-Kutta methods, Lecture note in mathematics 631, Numerical treatment of ordinary differential equations, A. Dold & B. Eckmann (ed.), 1976
12. R. England, Error estimate for Runge-Kutta type solutions to system of ordinary differential equations, Comput. J. 12, 2, 1969
13. J. H. Verner, Explicit Runge-Kutta methods with estimate of the local truncation error, SIAM J. Numer. Anal., 15, 4, 1978
14. L. Lapidus & J. Seinfeld, Numerical solution of ordinary differential equations, Academic Press, 1971
15. J. D. Lambert, Computational methods in ordinary differential equations, John Wiley, 1973
16. K. R. Jackson, W. H. Enright & T. E. Hull, A theoretical criterion for comparing Runge-Kutta formulas, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 15, No. 3, 1978
17. A. Ralston & P. Rabinowitz, A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, 1978

[公式]	[文献]	[章節]	[公式番号]	[頁]
Shanks	[14]	2.3.6	(2.3-33)	55
Fehlberg	[14]	2.3.5	(2.3-28)	54
Butcher (1)	[14]	2.3.5	(2.3-19)	51
Butcher (2)	[14]	2.3.5	(2.3-20)	51
Lawson	[14]	2.3.5	(2.3-30)	54
Butcher (3)	[14]	2.3.5	(2.3-21)	52
Kutta's family	[5]	1.	(3)	552
Nyström	[14]	2.3.5	(2.3-16)	50
Luther (Radau family)	[14]	2.3.5	(2.3-25)	53
Butcher (5)	[14]	2.3.5	(2.3-23)	52
Luther (1)	[14]	2.3.5	(2.3-17)	51
Sarafyan	[14]	2.3.5	(2.3-27)	54
Luther (2)	[14]	2.3.5	(2.3-18)	51
Luther & Konen	[5]	1.	(4)	552
Cassidy	[17]	3		604, 606
Butcher (4)	[14]	2.3.5	(2.3-22)	52
England	[17]	5.8-5	(5.8-48)	219

18. M. J. Box, D. Davis and W. H. Swann 黒田充徳, 非線形最適化の技法,
培風館

19. M. J. Box, A new method of constrained optimization and comparison
with other methods, Comput. J. Vol. 13, 1965 ~ 1966