

Subordination and Extreme Point Theory

東京電機大工 鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)

日本大薬 関根忠行 (Tadayuki Sekine)

単位円内で正則な函数の従属操作 (subordination) による函数族の端点の性質は種々与えられている。本講では、これらの性質のいくつかを $\mathbb{C}^n$ の単位球 $\mathbb{B}$ から $\mathbb{C}^m$ への正則写像の空間 $\mathbb{H}_{n,m}$ へ拡張する。

§1 序

1.1. $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathcal{T})$ を Hausdorff 位相空間 $\mathcal{T}$ を持つ $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ 上の線形位相空間とする。 X を $\mathcal{X}$ の部分集合とする。 X を含む最小の凸集合 (i.e. X を含む凸集合の共通部分) を X の凸包といい、 $\text{co}X$ と表し、 $\text{co}X$ の閉包をと $\overline{\text{co}}X$ と表す。

点 x が X の端点 (extreme point) であるとは、 $y, z \in X$, $x \in (y, z) := \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid 0 < \alpha < 1\}$ ならば、 $y = z = x$ となるときである。 X の端点全体を $\text{ext}X$ と表す。

実線形位相空間 $\mathcal{X}$ の部分集合 H が、 $H = x_0 + S$ (S は余次元 1 の線形位相空間) と表されるとき、 H を x_0 通る超平面という。部分集合 $X \subset \mathcal{X}$ に対して、超平面 H がとれて、 $X \cap H \neq \emptyset$ で X が H の片側に入るとき、 H を X の支持平面 (supporting plane) といい、 X の入る半空間を X の支持半空間という。このとき、点 $x \in X \cap H$ を X 支持点という。また、 $X \cap H = \{x\}$ となるとき、 x を X のむき出し点 (exposed point) という。一般に、むき出し点は端点であるが、逆は成り立たない。 X が compact 集合のときは $\text{ext}X \neq \emptyset$ である。

次の定理は最も基本的である。

定理 1 (Krein-Milman の定理). X を $\mathcal{X}$ の compact 凸集合とすると、次のことが成り立つ：

$$X = \overline{\text{co}}(\text{ext}X).$$

これより, $\mathcal{X}$ の compact 集合 Y に対して

$$\overline{\text{co}}(Y) = \overline{\text{co}}(\text{ext}Y).$$

1.2. 任意の点 $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ 対して,

$\|z\| := \sqrt{(z^*z)} = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$, $\mathbb{B} := \mathbb{B}_n := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ とおく. $\mathbb{B}$ から $\mathbb{C}^n$

への正則写像 $f(z) := \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$ の全体を $\mathbb{H}_{n,m}$ と表す. $\mathbb{H}_{n,m}$ に通常のとスカラー積を

導入し, 広義一様収束の位相 τ を入れると, $\mathbb{H}_{n,m}$ は局所凸線形位相空間になる.

実数列 $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k < \cdots \rightarrow 1$ をとる. $f \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して,

$$\|f\|_{r_k} := \sup \{\|f(z)\| \mid \|z\| \leq r_k\}$$

とおき, $f, g \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して,

$$\rho(f, g) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\|f - g\|_{r_k}}{1 + \|f - g\|_{r_k}}$$

とおくと, Weierstrass および Montel の定理により, $\mathbb{H}_{n,m}$ は距離 ρ に関して完備な距離空間になり, 位相 τ と ρ によって定義された位相とは同値である.

§2 $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎関数

multiindex $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ 対して, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,

$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ とおく. このとき, $\mathbb{B}$ で正則な函数 $f(z) \in \mathbb{H}_{n,1}$ は同次多項式展開

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(z), \quad P_l(z) = \sum_{\|\alpha\|=l} a_\alpha z^\alpha \quad (l \text{ 次同次多項式})$$

ができ, Biermann-Lemaire の公式により, $\forall r = (r_1, \cdots, r_n)$, $\|r\| = \sqrt{r_1^2 + \cdots + r_n^2} = 1$ に対して,

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} [|a_\alpha| r^\alpha]^{\frac{1}{|\alpha|}} = 1. \quad (1)$$

$\mathbf{e}_k (k = 1, 2, 3, \dots, m)$ を $\mathbb{C}^m$ の標準基底とする. これを用いて, $f(z) \in \mathbb{H}_{n,m}$ は次の様な同次展開ができる.

$$f(z) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{\infty} P_{kl}(z) \cdot \mathbf{e}_k \quad (P_{kl} \text{ は } l \text{ 次同次多項式}). \quad (2)$$

F を $\mathbb{H}_{n,m}$ から $\mathbb{C}$ への線形汎函数とし

$$b(\alpha, k) := F(z^\alpha \cdot \mathbf{e}_k) \quad (3)$$

とおく. このとき, (2) の形の $f(z) \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して

$$F(f) = \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{k\alpha} b(\alpha, k) \quad (4)$$

とおき, $b(\alpha, k)$ に条件

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} (|a_{k\alpha}| b(\alpha, k))^{\frac{1}{|\alpha|}} < 1 \quad (5)$$

を課すと, (1) により F は $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数となる. 逆に, F が $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数で, $b(\alpha, k)$ を (3) によって定義すると, 級数 (4) は収束し, $b(\alpha, k)$ は条件 (5) を満たす. したがって, 次の定理が成り立つ:

定理 2. F を $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数とすると, 条件 (5) をみたす集合 $\{b(\alpha, k) \mid k = 1, 2, 3, \dots, m; \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ がとれ, F は (4) の形になる. 逆に, 条件 (5) をみたす集合 $\{b(\alpha, k) \mid k = 1, 2, 3, \dots, m; \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$ に対して, (4) によって定義される F は $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数である.

[注] 定理 2 は [1] の定理 4.3 の $\mathbb{C}_n$ への拡張である.

定理 3 ([1], p.44). A を $\mathbb{H}_{n,m}$ の compact 集合とし, F を $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎函数とする. このとき, 次のような $f \in A$ が存在する.

$$\operatorname{Re} F(g) \leq \operatorname{Re} F(f) \quad (g \in A)$$

また, 次のような $h \in A$ がとれる:

$$|F(g)| \leq |F(h)| \quad (g \in A).$$

Kline-Milman の定理により, 次の定理が成り立つ

定理 4 ([1], p.45). A, F は定理 3 におけるものとする. このとき, 次のものが成り立つ:

$$\begin{aligned} & \max \{ \operatorname{Re} F(f) \mid f \in \overline{\operatorname{co}} A \} \\ &= \max \{ \operatorname{Re} F(f) \mid f \in A \} \\ &= \max \{ \operatorname{Re} F(f) \mid f \in \operatorname{ext}(\overline{\operatorname{co}} A) \}. \end{aligned}$$

§3.

$$\mathcal{P}_l := \left\{ \mathbb{P}_l(z) = \sum_{k=1}^m P_{kl}(z) \cdot \mathbf{e}_k \right\}$$

(ただし, 各成分は l 次の同次多項式, または 0 ではあるが全部は 0 でない)

$$\|\mathbb{P}_l(z)\| := \left\{ \sum_{k=1}^m |P_{kl}(z)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$M(\mathbb{P}_l) := \{z \in \overline{\mathbb{B}} \mid \|\mathbb{P}_l(z)\| = \max_{y \in \overline{\mathbb{B}}} \|\mathbb{P}_l(y)\|\}$$

とおく. このとき, 最大値の原理により, $M(\mathbb{P}_l) \subset \partial\mathbb{B}$.

$f(z) \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}_l(z), \quad \mathbb{P}_l \subset \mathcal{P}_l \quad (6)$$

とし, l_0 を $\mathbb{P}_l(z) = 0 (l = 1, 2, \dots, l_0 - 1)$, $\mathbb{P}_{l_0}(z) \neq 0$ とする. いま, $z_0 \in M(\mathbb{P}_{l_0})$ をとり, $U_{\mathbb{P}_{l_0}}$ を次の様な m 次の unitary 行列とする:

$$U_{\mathbb{P}_{l_0}} \cdot \mathbb{P}_{l_0}(z_0) = \begin{pmatrix} M_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_0 := \max_{y \in \overline{\mathbb{B}}} \|\mathbb{P}_{l_0}(y)\|.$$

このとき, $\forall g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{Q}_l(z) \in \mathbb{H}_{n,m} (\mathbb{Q}_l \in \mathcal{P}_l)$ に対して L_f をベクトル $U_{\mathbb{P}_{l_0}} \cdot \mathbb{Q}_{l_0}(z_0)$ の第 1 成分をとるものとする, L_f は $\mathbb{H}_{n,m}$ 上の連続線形汎関数となる.

次に, $f(z), g(z) \in \mathbb{H}_{n,m}$ とする. $g(z)$ が $f(z)$ に従属 (subordinate) であるとは, 正則写像

$$\Psi(z) : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}, \quad \|\Psi(z)\| \leq \|z\| \quad (z \in \mathbb{B}) \quad (7)$$

がとれて, $g(z) = f(\Psi(z))$ となるときである. $f(z)$ に従属なる写像全体を $s(f)$ と表す.

次の定理が成り立つ:

定理 5. $f(z) \in \mathbb{H}_{n,m}$ とする.

$$\mathcal{A} := \{g(z) \mid g(z) = f(\Psi(z)), \Psi(z) \text{ は (7) をみたし, } \Psi(z_0) \in M(\mathbb{P}_{l_0})\},$$

$$\mathcal{B} := \{g(z) = f(Uz), U : \text{unitary 行列}\}$$

とおくと,

$$\text{ext}(\overline{\text{co}}(s(f))) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset, \quad \text{ext}(\overline{\text{co}}(s(f))) \supset \mathcal{B}.$$

(証明) 条件 (7) より, $\Psi(0) = 0$. したがって, Ψ は次の様に展開ができる:

$$\Psi(z) = Az + B_2(z) + B_3(z) + \cdots$$

ただし, $B_k(z) \in \mathcal{P}_k$, A は n 次正方行列で

$$\|A\| = \sup_{0 < \|z\| < 1} \frac{\|Az\|}{\|z\|} \leq 1.$$

また, (6) より

$$\begin{aligned} g(z) &= f(\Psi(z)) = \sum \mathbb{P}_l(\Psi(z)) \\ &= \mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_{l_0}(\Psi(z)) + \mathbb{P}_{l_0+1}(\Psi(z)) + \cdots \\ &= \mathbb{P}_0 + \mathbb{Q}_{l_0}(z) + \mathbb{Q}_{l_0+1}(z) + \cdots \end{aligned}$$

$\mathbb{P}_{l_0}(z), \mathbb{Q}_{l_0}(z) \in \mathcal{P}_{l_0}(z)$ とすると,

$$\mathbb{Q}_{l_0}(z) = \mathbb{P}_{l_0}(Az)$$

となり,

$$\|\mathbb{Q}_{l_0}(z)\| = \|\mathbb{P}_{l_0}(Az)\| \leq \|A\|^{l_0} \|\mathbb{P}_{l_0}(z)\|.$$

したがって, $\max_{z \in \mathbb{B}} \|\mathbb{Q}_{l_0}\| = \max_{z \in \mathbb{B}} \|\mathbb{P}_{l_0}\|$ となるのは, $\|A\| = 1$ となるときである。特に, $A = U(\text{unitary})$ ならば, $\|A\| = \|U\| = 1$. f に対して, L_f をとり, $M := \sup \{\text{Re} L_f(g) \mid g \in s(f)\}$ とおく.

$\overline{s(f)}$ は $\mathbb{H}_{n,m}$ で compact であるから, 定理 4 により, 次の条件をみたす $h \in s(f)$ がとれる:

$$\text{Re} L_f(h) = M,$$

$$h(z) = f(\Psi(z)) \text{ for some } \Psi(z) \text{ with } \Psi(z_0) \in M(\mathbb{P}_{l_0}).$$

したがって, この h に対して, $h \in \mathcal{A}$, $h \in \text{ext}(\overline{\text{co}}(s(f)))$.

$g(z) \in \mathcal{B}$ とする. $g(z) = \alpha h_1(z) + (1 - \alpha) h_2(z)$ $0 < \alpha < 1$, $h_1, h_2 \in \overline{\text{co}}(s(f))$

とすると, $g(z) = f(Uz)(U: \text{unitary 行列})$, $h_1, h_2 \in s(f)$ としてよいから,

$$f(Uz) = \alpha f(\Psi_1(z)) + (1 - \alpha) f(\Psi_2(z))$$

(Ψ_1, Ψ_2 は条件 (7) をみたす写像)

と表されるから, 一致の定理により, $\Psi_1(z) = \Psi_2(z) = z$ となり, $h_1 = h_2 = g$. したがって, $\text{ext}(\overline{\text{co}}(s(f))) \supset \mathcal{B}$.

$f \in \mathbb{H}_{n,m}$ に対して,

$$M_p(r, f) := \left\{ \frac{1}{\sigma(\partial \mathbb{B})} \int_{\partial \mathbb{B}} \|f(r\xi)\|^p d\rho(\xi) \right\}^{\frac{1}{p}}$$

($d\sigma : \partial \mathbb{B}$ の面素, $0 < r < 1, 0 < p < \infty$),

$$\|f\|_p := \sup_{0 < r < 1} M_p(r, f),$$

$$\mathbb{H}^p := \{f \in \mathbb{H}_{n,m} \mid \|f\|_p < \infty\},$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{H}^p) := \{f \in \mathbb{H}^p \mid \|f\|_p < 1\}$$

とおくと, 次のことが成り立つ:

定理 6([2]). $f \in \mathbb{H}^p$ に対して

$$\overline{\text{co}}(s(f)) \subset \mathbb{H}^p.$$

定理 7([2]). $1 \leq p < \infty$ に対して

$$\text{ext}(\mathcal{B}(\mathbb{H}^p)) = \{f \in \mathcal{B}(\mathbb{H}^p) \mid \|f\|_p = 1\}.$$

参考文献

- [1] D. J. Hallenbeck and T. M. MacGregar: Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory, Pitman Advanced Publishing Program(1983).
- [2] D. J. Hallenbeck and K. T. hallenbeck: Extreme Points and Support Points of Subordination Families, Jour. of Math. Analysis and Applications, 251(2000) 157-166.
- [3] G. Kothe: Topological Vector Spaces I, Grundlehren der Math. Wisseusehaften, 159, Springer Verlag (1959).
- [4] W. Rudin: Function Theory in the unit Ball of C^n , G.M.W., 241, Springer Verlag(1980).

Kazuyuki Tsurumi

Mathematics

Tokyo Denki University

2-2, Nisiki-cho, Kanda, Chiyoda-ku

Tokyo, 101-8457, Japan

E-mail:tsurumi@cck.dendai.ac.jp

Tadayuki Sekine

Office of Mathematics

College of Pharmacy

Nihon University

7-1 Narashinodai 7chome, Funabashi-shi

Chiba, 274-8555, Japan

E-mail:tsekine@pha.nihon-u.ac.jp