

格子球を穿ける Stokes 解 について

中村 官太 教養部 増田 秀行

(Masuda Hideyuki)

1. 目的

格子点 $n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$ (以下 $n a$ と略記) に中心を置き、同一半径 a の球を穿ける Stokes 流の基本的研究は H. Hasimoto (JFM 1959)¹⁾ である。今年に及ぶ $Zick, Combs$ ²⁾ は流体力学方程式と積分方程式化して高い密度の場合に対しても抵抗を求めた。本研究は H. Hasimoto の設定した路線に基いて多重抵抗近似を遂行することと目標とする。境界条件は粘着条件を採用し、直角座標テンソルの代りに球関数表示のテンソルを用いる。後者はプログラム化しやすいとの利点をもつ。

格子 $\{a_i\}$ の逆格子 $\{b_i\}$ により定まる格子点 $k_1 b_1 + \dots + k_3 b_3$ は k と略記し、また Ω は格子点一個を含む単位胞の体積とする。

球は密着して“仮”と仮定する。

格子は立方晶系に属するものとする。

2. 基礎方程式とポテンシャル

周期性の利用をしやすくするため球のしめきり流体として、かわりに球内には適当な周期的外力分布 f と仮定する。流速 v , 圧力 p , 粘性係数 μ と用い、Stokes 近似の方程式等は

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta v = \text{grad } p + f, \quad \text{div } v = 0 \quad (\text{式 3.2.3}) \\ v|_{\text{表面}} = 0 \\ f = 0 \end{array} \right. \quad (\text{流体中}) \quad (1)$$

となる。Fourier 級数に展開すれば $v, \text{grad } p, f$ が周期的 distribution であるとの仮定のもとで周期的なポテンシャル g があり

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } p = -f_0 + \text{grad } \text{div } \Delta g \\ v = v_0 - \frac{1}{\mu} \{ \text{grad } \text{div } g - \Delta g \} \end{array} \right.$$

と表わされ、 g は

$$\Delta \Delta g = f - f_0 \quad (2)$$

を満たすことがわかる。 v_0, f_0 は v, f の Fourier 級数の定数項である。球に個々の抵抗力 $\mathcal{D}$ とすれば

$$f_0 = \mathcal{D}/2$$

となる。(1), (2) から流体中の開微域では

$$\Delta \Delta g = -f_0$$

となり、 g は流体中で解析的となる。

3 多重近似の概論

重調和方程式の解にこのようにする定理が成立する。

定理 1. 中心の原点にあり厚さ $2a$ の円板 $S_{a,b}$
 $= \{P: a \leq OP \leq b\}$ を含む開集合 Ω での定数 f_0 に対して

$$\Delta \Delta u = -f_0$$

とある distribution u は 球面調和関数 $\Theta_l^m(\theta, \varphi)$ を用いて

$r \leq b$ で絶対一様収束し $\Delta \Delta u_1 = -f_0$ とある

$$u_1 = -f_0 r^2 / 120 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{l,m} r^2 + B_{l,m}) r^l \Theta_l^m(\theta, \varphi)$$

と, $r \geq a$ で広義絶対一様収束し $\Delta \Delta u_2 = 0$ とある

$$u_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (C_{l,m} r^2 + D_{l,m}) r^{-(l+1)} \Theta_l^m(\theta, \varphi)$$

により $S_{a,b}$ 上で

$$u = u_1 + u_2$$

と表わされる。 u_1, u_2 を u の reg. p. , sing. p. と呼ぶことにする。

証明. $\Delta \Delta$ が楕円型であるから u は実解析的であること。
 球面上の C^∞ 関数に対して球面展開が一様絶対収束であること
 と及び若干の不等式による。

定理 2. u が periodic である $\Delta \Delta u = -f_0$ ならば
 $f_0 = 0$ かつ $u = 0$ が成立する。

定理 1 の u_1 と u の reg. p. , u_2 と u の sing. p. と呼ぶことにする。

環が密着している場合と考えることができるようにしては、

定理 1 の閉環形を考へることに可なり。ある一つの格子環 P としその中心を原点とし定理 1 の分解を考へ $\text{ring } P$ と $\mathcal{G}_{P_2}$ とする。解析的延張を考へることにしより、つぎの定理とする。

「定理 3 $\mathcal{G}_{P_2} = 0$ ならば $\mathcal{G}$ は流体中で定数となり $\mathcal{G}_c$ は $\mathcal{G}$ と一致し得る」

このことは $\mathcal{G}_c$ より抵抗 $\mathcal{D}$ ときめられた場合 $\mathcal{G}_{P_2}$ の $\mathcal{G}$ 全体が確定されることを意味する。 $\mathcal{G}_{P_2}$ の各成分と同じ型をもつ解とよせあつめること $\mathcal{G}$ と定めようとするのが多重極近似で十分合理的根拠があると考えられる。

4. 周期的多重極解

以下 球面調和関数は正規化してあるものとし

$$\mathcal{G}_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{-im\varphi}$$

すなわち $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ とする。

すなわち、対応する球面調和関数を

$$Y_l^m(r) = r^l \mathcal{G}_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(x, y, z)$$

$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ と微分 operator とし $\pi \rightarrow \mathcal{D}$ にして

$$Y_l^m(\mathcal{D})$$

なる l 次微分 operator と用いる。

このとき

$$Y_l^m(\pi) = \frac{1}{2\pi i^m l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^l du$$

$$\times e^{im u} du$$

(1)

が成立する。³⁾

$$\text{「定理」 } Y_\ell^m(10) r^\lambda = 2^\ell (-1)^\ell \frac{\Gamma(\ell - \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} r^{\lambda - \ell} \mathcal{O}_\ell^m(0, \varphi)$$

が一般の λ に対しても成立することは (1) を用いて容易に確かめら

れる。また $u = -\frac{\gamma}{8\pi} \Rightarrow \Delta \Delta u = \delta(u)$ であるから 周期性

性と考慮した重調和、調和方程式の基本解をととめると

$Y_\ell^m(10)$ と呼ぶことは、所望の ang. p. ととも解が得られるものと想像できる。

周期性のあるとき原始関数は常に存在するとはいえないため重調方程式の基本解を定める方程式は

$$\Delta \Delta S = \sum_n \delta(u - n\alpha) = 1/\alpha \quad (2)$$

となる。この解は Fourier 級数として直接書き表わせば

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|2\pi k|^4} \exp(2\pi i k \cdot u) \quad (3)$$

となる。調和の場合とよく似た一般の取扱いをするため

$$S_\lambda(u) = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^\lambda \exp(2\pi i k \cdot u) \quad (4)$$

は $|u| \sim 0$ の近傍で具体的形状をととめることにする。

(4) の求和には適当な収束因子をつけ、Poisson 総和則を用いて λ に > 0 と解析接続して、その後 λ を収束因子と取りはなす方針をとる。また Poisson の総和則は各階の導関数が急減小の場合にのみ用いるのが原則であるが、 n 次元空間の場合

$n+1$ 階の導関数まで連続で急減小なる適用できるの z , 我々の場合 z の定理を得る。

$$\text{「定理 5} \quad \sum_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}) = 2 \sum_n \tilde{\varphi}(n \mathbf{a})$$

ただし $\varphi(\mathbf{z})$ は n 階までの導関数は連続・急減小で

$$\tilde{\varphi}(\eta) = \iiint e^{-2\pi i \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\eta}} \varphi(\mathbf{z}) d^3 \mathbf{z}$$

とする。

$$Y_\ell^m(\Omega) S_\lambda(\mathbf{u}, \varepsilon) = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} |2\pi \mathbf{k}|^\lambda \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon |2\pi \mathbf{k}|) Y_\ell^m(2\pi i \mathbf{k})$$

とある。 $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 5$ なるのは $\sum_{\mathbf{k} \neq 0} |2\pi \mathbf{k}|^\lambda$ は $\sum_{\mathbf{k}} 1 = \frac{1}{\pi^3}$ であり得る。

いかに定理5が用いられる。 $\tilde{\varphi}$ の計算には平面波の球面波分解, 球関数の加法定理等を用いて積分と遂行すると

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\eta) &= \frac{1}{2} \frac{2^{\lambda+\ell}}{|\mathbf{u}-\boldsymbol{\eta}|^{\lambda+\ell+3}} \Theta_\ell^m(\theta, \varphi) (-1)^\ell \frac{1}{\pi^2} \\ &\times \left\{ \frac{\Gamma(\frac{\lambda+2\ell+3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} F\left(\frac{\lambda+2\ell+3}{2}, \frac{\lambda+2}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\varepsilon^2}{|\mathbf{u}-\boldsymbol{\eta}|^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{|\mathbf{u}-\boldsymbol{\eta}|} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+2\ell+4}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda+1}{2})} F\left(\frac{\lambda+2\ell+4}{2}, \frac{\lambda+3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\varepsilon^2}{|\mathbf{u}-\boldsymbol{\eta}|^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

θ, φ は $\boldsymbol{\eta} - \mathbf{u}$ の方位角

とする。 $\varepsilon \downarrow 0$ をほどきして有意と見るために $\lambda + \ell + 3 > 3$

つまり $\lambda + \ell > 0$ が必要である。

「定理 6 $\lambda + \ell > 0$ のとき

$$Y_\ell^m(\Omega) S_\lambda(\mathbf{u}) = \frac{2^{\lambda+\ell}}{\sqrt{\pi}^3} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+2\ell+3}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \sum_n \frac{Y_\ell^m(\mathbf{u} - n \mathbf{a})}{|\mathbf{u} - n \mathbf{a}|^{\lambda+2\ell+3}}$$

を得る。 $|k| \sim 0$ のときの sing. p. は明らかに所望の型とされる。

しかし重調和: $\lambda = -4$ のとき $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$ に div しては収和は不成功, 調和: $\lambda = -2$ のとき $\ell = 0, 1, 2$ に div しても不成功。あつて, 種々試みたがこの場合は Haarmeric の方法による外に存か, T_2 。

収束因子を $e^{-\varepsilon |2\pi k|}$ から $e^{-|2\pi k|^2 \varepsilon}$ に変え

$$|2\pi k|^\lambda = \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \int_0^\infty \beta^{-\frac{\lambda}{2}-1} \exp(-\beta |2\pi k|^2) d\beta$$

と、

$$\int_0^\infty = \int_0^\alpha + \int_\alpha^\infty$$

と分解して同様計算をする。

$$\begin{aligned} \text{定理 7} \quad Y_\ell^m(\alpha) S_\lambda(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha} \frac{Y_0^0 \delta_{\ell,\lambda}}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2}+1)} \alpha^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{2^{\ell+\lambda}}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \\ &\quad + \sum_n Y_\ell^m(n\alpha - \alpha) \frac{(-1)^\ell}{|n\alpha - \alpha|^{2\ell+\lambda+3}} \Gamma\left(\frac{\lambda+2\ell+3}{2}, \frac{|n\alpha - \alpha|^2}{4\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} \sum_{k \neq 0} Y_\ell^m(2\pi i k) e^{2\pi i k \cdot \alpha} |2\pi k|^\lambda \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}, |2\pi k|^2 \alpha\right) \end{aligned}$$

ただし $\Gamma(n, x)$ は不完全ガンマ関数:

$$\Gamma(n, x) = \Gamma(n) - \gamma(n, x) = x^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}n}(x)$$

を得る。この計算でも $\lambda + \ell > 0$ のときは定理 6 と同じ結果と

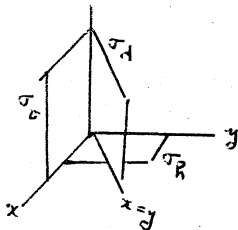
存す。 $\operatorname{Re}(\lambda) + l \leq c$ の場合も $\operatorname{ring} p$ は $\operatorname{Re}(\lambda) + l > c$ のときと同じ。

これにより多重極解の性質は決定できた。

格子点群 $\mathbb{D}_4$ に対して不変な場合、 $S_\lambda(k)$ は $\mathbb{D}_4$ に対して不変と存することは Fourier 級数の形からわかる。点群の要素は直交変換であるから $\mathbb{D}$ と k とは同じ変換の規則に従い点群に対しては $Y_\ell^m(\mathbb{D}) S_\lambda(k)$ は $Y_\ell^m(k)$ と同じく振る舞う。また $S_\lambda(k)$ を球面数展開したときの $\operatorname{reg} p$ は r^ℓ の係数は $\mathbb{D}_4$ の恒等表現の基となっている。そのため係数の計算はかなり節約することが可能である。

5. Potential 関数の対称性

点群 $\mathbb{D}_4$ の要素のうち鏡影 $\sigma_v = zx$ 面での鏡影, $\sigma_d = (x=y)$



面での鏡影, $\sigma_h = xy$ 面での鏡影を取り上げる。ただし座標の原点はある球 P の中心と仮定しておく。問題の線型性から

$f_0 = (0, 0, D/c)$ の場合ととけば十分である。

解に最大の対称性を要求すると $\sigma_v f_0 = f_0$, $\sigma_d f_0 = f_0$,

$\sigma_h f_0 = -f_0$ であるから解は w_v , σ_d に対して不変,

従って $w_v = (0, 0, V)$ と存す。ポテンシャル関数 $g = (g_x, g_y, g_z)$ が $D=1$ のときの解と定めるとすると。

$$\sigma_v \text{ 不変性} \Rightarrow g_x(x, y, z) = g_x(x, -y, z)$$

$$g_y(x, y, z) = -g_y(x, -y, z)$$

$$g_z(x, y, z) = g_z(x, -y, z)$$

$$\sigma_d \text{ 不変性 } \Rightarrow \begin{cases} g_x(x, y, z) = g_y(y, x, z) \\ g_y(x, y, z) = g_x(y, x, z) \\ g_z(x, y, z) = g_z(y, x, z) \end{cases}$$

$$\sigma_R \text{ 不変性 } \Rightarrow \begin{cases} g_x(x, y, z) = -g_x(x, y, -z) \\ g_y(x, y, z) = -g_y(x, y, -z) \\ g_z(x, y, z) = g_z(x, y, z) \end{cases}$$

が成立する。と仮定できる。 σ_R に対するものは、 σ_d に対しては、

が $Dg(x, y, z) = \sigma_R$ とは、 $f_c = (0, 0, -D/\lambda)$ に対する解と見ることもできる。

このとき g_x, g_y, g_z は 3 関数空間 $\mathbb{R}^3$ 上の $f(R^{-1}x) = f(x)$ なる関数形の表現と考へるとき、 g_x, g_y, g_z は

$$\sigma_v(g_x, g_y, g_z) = (g_x, g_y, g_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_d(g_x, g_y, g_z) = (g_x, g_y, g_z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_R(g_x, g_y, g_z) = (g_x, g_y, g_z) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

、関数形として表現することができる。 $\sigma_v, \sigma_d, \sigma_R$ は点群 D_{4h} の生成元であるから g_z は D_{4h} の恒等表現、 g_x, g_y は組に属する 2 つの既約表現の基と見ることができる。

$\{\sigma_e, \sigma_d, \sigma_h\}$ は点群 $\mathbb{D}_{4h}$ と生成するので g_z は恒等表現と
 g_x, g_y は組になる。正と負の $\mathbb{D}_{4h}$ の二次元既約表現と等
 なることがわかる。従ってそれらに含められる $\mathbb{D}_{4h}^m(e, q)$ の組合せ
 はそれらと同等の既約表現の基の成分に分解する手続き^{*)}で
 出来る。 $S_A(\psi)$ が $\mathbb{D}_6(\supset \mathbb{D}_{4h})$ に対して不変であるので
 g_z は $\{Y_{2\ell}^{4m}(\mathbb{D}) + Y_{2\ell}^{-4m}(\mathbb{D})\} S_A(\psi)$ の, $g_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_x \pm i g_y)$
 とおくと $g_{\pm}$ は $\pm \{Y_{2\ell}^{\pm(4m+1)}(\mathbb{D}) S_A(\psi)\}$ (符号同様)
 の一次結合であることがわかる。また g_x, g_y, g_z が実である
 ためには結合の定数は実でなければならぬ。

c. Potential の有効成分

我々の問題とするのは $\mathcal{U}$ そのものが ψ ではなくて ψ, p で
 ある。2. のような関係から $\mathcal{U}$ は

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} + \text{grad } \chi, \quad \Delta \Delta \chi = c \quad (\text{流体中})$$

と変換しても $\psi, \text{grad } p$ は変化は無い。つまり $\mathcal{U}$ に対する

σ_e, σ_h, d の特性を保存しようとするとき χ は

$$\sigma_e \chi = \sigma_d \chi = -\sigma_h \chi = \chi$$

を満足しなければならない。 χ は $\mathbb{D}_{4h}$ に対してこの
 特性を満足する一次元表現の基でなければならぬ。5. の手順

によれば手続きにより χ は $\{Y_{2\ell+1}^{4m}(\mathbb{D}) + Y_{2\ell+1}^{-4m}(\mathbb{D})\} S_A(\psi)$

の一次結合であればよい。この修正により g_z の $\ell+1$ の成分
 はゼロと仮定よりいえることがわかる。よって

定理 8 $g_z = A S_{-2}(w) + C S_{-2}(w)$ とおける。

g_z の成分には変化はなし。とすると g_z には $2 \leq l$ の成分は
 ないから g_z の $\pm Y_{2\ell}^{\pm(4m+1)}(w) S_{-2}(w)$ 成分は Δ と Γ と Ψ とで
 表わされ dw と通して Ψ の $grad p$ に寄与する。 dw と計算
 すると $(Y_{2\ell+1}^{4m}(w) + Y_{2\ell+1}^{-4m}(w)) S_{-2}(w)$ の定数倍 λ となり $-m$ と m とは寄与が
 一次従属と見た。よって

$$\begin{aligned} \text{定理 9} \quad g_z &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-[\ell/2]}^{[(\ell-1)/2]} B_{\ell,m} Y_{2\ell}^{\pm(4m+1)}(w) S_{-2}(w) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=-[\ell/2]}^{\ell} D_{\ell,m} Y_{2\ell}^{\pm(4m+1)}(w) S_{-2}(w) \right\} \end{aligned}$$

とおける。

$\sqrt{4\pi}$ は後の計算の便宜のためつけである。

定理 8, 9 の未定係数のうち 5 種の規格と 1 にした場合
 $A = 1$ とし他と境界条件から決定することになる。各 2 に
 ついての未知数の数 ℓ とまとめると次表の通りとなる。

ℓ	2ℓ	g_z		g_x		計
		$A_{\ell,m}$	$C_{\ell,m}$	$B_{\ell,m}$	$D_{\ell,m}$	
0	0	1	1	0	0	$2-1=1$
1	2	0	0	1	1	2
2	4	0	0	2	2	4
3	6	0	0	3	2	5
4	8	0	0	4	3	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ℓ	2ℓ	0	0	ℓ	$[\frac{\ell}{2}] + 1$	$[\frac{3\ell}{2}] + 1$

$[\cdot]$ は $\cdot$ と $\cdot + 1$ の間の整数の最大である。

7. 速度の球関数成分

$v_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x \pm i v_y)$ とおき $v_z, v_{\pm}$ をボースン・フェルミオンからなる微分操作と $Y_l^m(\Omega)$ と用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} v_z &= -\sqrt{\frac{4\pi}{15}} Y_2^{-1}(\Omega) g_+ + \sqrt{\frac{4\pi}{15}} Y_2^1(\Omega) g_- \\ &\quad - \frac{2}{3} \Delta g_z + 2\sqrt{\frac{4\pi}{45}} Y_2^0(\Omega) g_z + V \\ v_{\pm} &= -\frac{2}{3} \Delta g_{\pm} - \sqrt{\frac{4\pi}{45}} Y_2^0(\Omega) g_{\pm} + \sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_2^2(\Omega) g_{\mp} \\ &\quad \pm \sqrt{\frac{4\pi}{15}} Y_2^1(\Omega) g_z. \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

となる。球関数成分と表すことができる 2 個の $Y_l^m(\Omega)$ の積と

$$Y_L^M(\Omega) + Y^2 Y_L^{M'} + \dots \quad \text{の型に展開すること, あるいは}$$

$$Y_L^M(\Omega) S_{\lambda}(\Omega) \quad \text{と球関数に展開することが必要となる。その}$$

ために以下の 2 つの定理が有用である。

定理 5)

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Theta_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) \Theta_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) \Theta_{l_3}^{m_3}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \begin{cases} \left\{ \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi} \right\}^{1/2} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \\ 0 \end{cases} \\ &\quad \begin{matrix} l_1 + l_2 + l_3 \equiv 0 \pmod{2} \text{ and} \\ m_1 + m_2 + m_3 = 0 \\ \text{otherwise} \end{matrix} \end{aligned}$$

ここで $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ は 3-J symbol とよばれる量子力学で周知のものである。この定理の右辺を $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}$ と記すと

容易に

定理 10 $Y_{\ell_1}^{m_1}(\kappa) Y_{\ell_2}^{m_2}(\kappa) = (-1)^{m_1+m_2} \left\{ \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_1+\ell_2 \\ m_1 & m_2 & -m_1-m_2 \end{bmatrix} Y_{\ell_1+\ell_2}^{m_1+m_2}(\kappa) \right.$

$\left. + \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_1+\ell_2-2 \\ m_1 & m_2 & -m_1-m_2 \end{bmatrix} r^2 Y_{\ell_1+\ell_2-2}^{m_1+m_2}(\kappa) + \dots \right\}$

と得る。微分 operator は $\partial > \partial$ と $\mp$ は ∂^2 は Δ と ∂ 3.

定理 (Heisen)

$$Y_{\ell}^{m_1}(\kappa) r^n Y_{\ell}^{m_2}(\kappa) \Big|_{\kappa=0} = \delta_{\ell,\ell_1} \delta_{m_1+m_2,c} \delta_{n,c} \frac{(-1)^n (2\ell)!}{(2\ell)!!}$$

と $\partial > \partial$ u_x, u_y, u_z は $\mathbb{D}_{4\ell}$ は 2π と g_x, g_y, g_z と $\partial > \partial$

振動 u_z は $Y_{2\ell}^{4m} + Y_{2\ell}^{-4m}$ $u_r = \frac{1}{r^2} (u_x + i u_y)$ は $Y_{2\ell}^{4m+1}$

と $\partial > \partial$ $u_z = c, u_r = c$ は $\partial > \partial$ と $\partial > \partial$

から 最終的に $Y_{2\ell}^{4m}(\kappa) S_\lambda, Y_{2\ell}^{4m+1}(\kappa) S_\lambda$ の 関数成分を

決定する。すなわち

$S_\lambda(\kappa)$ ($\lambda = -4, -2$) は $\mathbb{D}_{4\ell}$ は 2π と $\partial > \partial$ $\mathbb{D}_{4\ell}$

は 2π と $\partial > \partial$ $\Delta S_\lambda(\kappa) = -S_{\lambda+2}$ と $\partial > \partial$

$$S_{-4}(\kappa) = -\frac{r}{8\pi} - \frac{r^4}{12c^2} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-[\ell/2]}^{[\ell/2]} \left(\frac{a_{\ell m}}{2(4\ell+3)} r^2 + b_{\ell m} \right) \sqrt{4\pi} Y_{2\ell}^{4m}(\kappa)$$

$$S_{-2}(\kappa) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{r^2}{6c^2} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-[\ell/2]}^{[\ell/2]} (-a_{\ell m}) \sqrt{4\pi} Y_{2\ell}^{4m}(\kappa)$$

$$a_{\ell,m} = a_{\ell,-m}, \quad b_{\ell,m} = b_{\ell,-m}, \quad a_{\ell,m} \quad b_{\ell,m} \text{ は 実}$$

と $\partial > \partial$ $\varepsilon = c$ は $\partial > \partial$ $1 < \partial > \partial$

$$\sqrt{4\pi} Y_{2\ell}^{4m+\varepsilon}(\kappa) S_{-4}(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \frac{(4\ell-3)!!}{2} \frac{\sqrt{4\pi} Y_{2\ell}^{4m+\varepsilon}(\kappa)}{r^{4\ell-1}}$$

$$+ \sum_{L=E}^{\infty} \sum_M \left(\frac{A_{2L, 4m+E; 2L, 4M+E} r^2}{2(4L+3)} + B_{2L, 4m+E; 2L, 4M+E} \right) Y_{2L}^{4M+E}(v)$$

$$\sqrt{4\pi} Y_{2L}^{4m+E}(v) S_{-2}(v) = \frac{1}{4\pi} (4L-1)!! \frac{\sqrt{4\pi} Y_{2L}^{4m+E}(v)}{r^{4L+1}}$$

$$- \sum_{L=E}^{\infty} \sum_M A_{2L, 4m+E; 2L, 4M+E} Y_{2L}^{4M+E}(v)$$

と展開できることは明らかで、適当に $Y_L^{M'}(v)$ とはとこして

regular part の $\frac{1}{r^{4L+1}}$ の値と比較すれば Holman の定理より

係数 $A_{2L, 4m; 2L, 4M}$ 等は $a_{L,m}, b_{L,m}$ と表わされる。

例としては

$$B_{2L, 4m+1; 2L, 4M+1} = \sqrt{4\pi} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{matrix} 2L & 2L & 2(L+L) \\ -4M-1 & 4m+1 & 4(M-m) \end{matrix} \right] \frac{(4L+4L+1)!}{(4L+1)!} \frac{4L!!}{(4L+4L)!} b_{L+L, m-M} \\ & - \left[\begin{matrix} 2L & 2L & 2(L+L-1) \\ -4M-1 & 4m+1 & 4(M-m) \end{matrix} \right] \frac{(4L+4L-3)!}{(4L+1)!} \frac{4L!!}{(4L+4L-4)!} a_{L+L-1, m-M} \\ & + \left[\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \right] \delta_{L,1} \delta_{L,1} \delta_{M,0} \delta_{m,0} \frac{1}{15} \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

等と見られる。

また $a_{L,m}$ は

$$\begin{aligned} \text{Reg. p. } Y_{2L}^{-4m}(v) S_{-2}(v) \Big|_{v=0} &= Y_{2L}^{-4m}(v) \text{Reg. p. } S_{-2}(v) \Big|_{v=0} \\ &= \frac{4L!}{4L!!} (-a_{L,m}) = \frac{2^{2L-2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{4L-1}{2}\right) \sum_n \frac{Y_{2L}^{-4m}(n a_1)}{|n a_1|^{4L+1}} \end{aligned}$$

と計算できる。 $b_{L,m}$ も同様である。 $2L+\lambda \leq 0$ の場合は少し

面倒になる。

3. 境界条件による連立一次方程式.

$r=a$ のところを $v_z = 0$, $v_r = 0$ ならしめる。 v_z, v_r と球関数展開してその成分をゼロならしめればよい。 V と U とは点群 D_{4h} に対して同じく振舞うので独立な球関数成分の数は球関数次数が偶数のときに限られその数は次表の通りとなる。

l	$2l$	v_z	v_r	計	
0	0	1	0	1	$-1 = 0$
1	2	1	1	2	
2	4	2	2	4	
3	6	2	3	5	
4	8	3	4	7	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
l	$2l$	$[\frac{l}{2}] + 1$	l	$[\frac{3l}{2}] + 1$	

$l=0$ のとき 1 を引いたのは $\psi = (c, c, V)$ の V が未知数となるからである。6. の表とくらべると同じ l で打きつけた場合未知数 A, c, B_{lm}, D_{lm} の数に比べて条件の数が常に一つ足りない。この間の事情を判然とするため $l=0, 1$ の場合の式を書き上げてみる。環の半径は a と書くことにしよう。この r とした。

$$v_z \Big|_{r=a} = 0 \quad \text{からは}$$

$$\begin{aligned} \mu V = & A \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4\pi r} + \frac{r^2}{6a} - a_{1c} \right) + \sqrt{\frac{4}{45}} \left(B_{2c,2c} + \frac{A_{2c,2c}}{14} r^2 \right) \right\} \\ & + C \left\{ -\frac{2}{3} \frac{1}{a} - \sqrt{\frac{4}{45}} A_{2c,2c} \right\} \\ & + B_{1,c} \left\{ \frac{-2}{7\sqrt{3}} A_{2c,2c} + \frac{2}{a} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 0 = & A \sqrt{\frac{4}{45}} \left\{ \frac{1}{5\pi r} + (-\sqrt{5} a_{1c} + B_{2c,2c}) r^2 + \frac{1}{14} A_{2c,2c} r^4 \right\} \\ & + C \sqrt{\frac{4}{45}} \left\{ \frac{3}{4\pi r^3} - A_{2c,2c} r^2 \right\} \\ & + B_{1,c} \left\{ \frac{1}{12\sqrt{7}\pi} \frac{1}{r^3} - \frac{2}{a} + \frac{-2}{\sqrt{147}} A_{2c,2c} r^2 \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

を得、 $v_r|_{r=a} = 0$ から (1)

$$\begin{aligned} 0 = & A \frac{1}{\sqrt{15}} \left\{ \frac{1}{5\pi} \frac{1}{r} + B_{2,1,2,1} r^2 + \frac{1}{14} A_{21,21} r^4 \right\} \\ & + C \frac{1}{\sqrt{15}} \left\{ \frac{3}{4\pi r^3} - A_{21,21} r^2 \right\} \\ & + B_{1,c} \left\{ -(2 + \sqrt{\frac{3}{49}} - \sqrt{\frac{6}{49}}) \frac{1}{4\pi r^3} + \left(\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{147}} + \sqrt{\frac{2}{147}} \right) A_{21,21} \right\} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

となる。(1) は 0 次球関数成分から、(2)、(3) は 2 次球関数成分から得られる 4 成分の z がある。また

$$\begin{aligned} A_{2c,2c} &= 15\sqrt{5} a_{1c}, & A_{21,21} &= 9\sqrt{5} a_{1c} \\ A_{2c,cc} &= 15 a_{1c}, & B_{2c,cc} &= 15 b_{1c} \\ B_{2c,2c} &= 53 b_{2c} + \frac{2\sqrt{5}}{7} a_{1c} - \frac{1}{15} \frac{1}{a} \\ B_{21,21} &= -36 b_{2c} + \frac{\sqrt{5}}{7} a_{1c} + \frac{1}{15} \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (4)$$

z がある

A は環のラゲル抵抗カに α とし、格子間隔 δ に $1/\delta$ とし a_{lc}, b_{lc} は δ に $1/2$ と δ に $1/\delta$ とする。環の Stokes 解と与えらるべきである。このとき (2) (3) は $\sqrt{\frac{4}{45}} : \sqrt{\frac{1}{15}}$ となり $C = -\frac{1}{2} \gamma^2 A$ とおけば (2) (3) が同時に満足される。

(1) から $c \pi \mu V = A =$ 抵抗の Stokes の公式を得る。

単独環の場合条件の不足は条件式の縮退による、厳密解が得られなからである。これを換えて u_z 成分のみに γ の粘着条件を満足させる。自動的に u_x, u_y の粘着条件が満たされてしまうことになる。しかし格子間隔が有限のとき (2) と (3) の形に類似は見られるが縮退は期待できない。

よって (2) $C(\gamma^2)$ までの近似とすることにして

$C = -\frac{1}{2} \gamma^2 A$ と用いる。Hasimoto の Q とし

$$Q = \frac{c \pi \mu \gamma V}{A} = 1 - (4\pi a_{lc} - 12\sqrt{5} b_{lc}) \gamma + \left(\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\delta} + \frac{2c}{17} \sqrt{5} \pi a_{lc} \right) \gamma^3 \quad (5)$$

となる。 $S_A(\omega)$ に対して $\mathbb{D}_{4\delta}$ 不変性が必要となるため a_{lc}, b_{lc} が残存した $\mathbb{D}_{4\delta}$ 不変性を要求すると恒等表現の中に 2 次の環関数が表われる (指標の計算が容易にわかる) ため $a_{lc} = b_{lc} = c$ とする。また定義式から Hasimoto の C は $4\pi a_{lc}$ となるため (5) は Hasimoto の結果と完全に一致する。

9. 結 び

多重極近似法は十分進められたつもりであるが、条件式の不足をどう技術的に解消すればよいのが最終的な結論に達せなかった。8. の (1), (2), (3) 式では短縮のため $A_{2L, 4M; 2L, 4M}$ 等で $2L$, または $2L$ が 4 となるものを落してある。そのため D_{10} の項が脱落し、 $A=1$ とおけば (2), (3) から C, B_{10} がまじり (1) で V を決定できる形式となっている。しかし高次の場合これに相当する技法はうまくゆかぬ。この頁べきに注目する処理も試算したが目下の所調子がよくない。

多重極として $Y_l^m(\Omega) S_\lambda(\Omega)$ の代りに $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial y})^\beta (\frac{\partial}{\partial z})^\gamma S_\lambda(\Omega)$ と用いる計算は以前に実行したが、条件式の不足はあなしとであった。またこのときには複雑な漸化式が必要となり確信がもてなかった。 $Y_l^m(\Omega) S_\lambda(\Omega)$ と採用すると漸化式に相当するものは 3-J symbol で代用できる。

計算には多少の忍耐が必要であった。その間相談相手となつて頂いた徳田尚之教授に感謝する。

本文中「定理」とのべた部分には筆者なりの証明をつけられた命題である。(2), (2), (5), (9)

$S_\lambda(\Omega)$ の $\mathbb{O}_k$ -不変性と完全に利用するには $\mathbb{O}_k$ の環関数による表現行列の成分が必要となる。成書に見当らぬが筆者の計算結果は文献 (10) にまとめがある。

参考文献

- 1) H. Hasimoto : J Fluid Mech. 5 (1959) pp. 317 ~ 328.
- 2) A.A. Zich and G.M. Homsy : J Fluid Mech 115 (1982) p.p. 13-16
- 3) E.T. Whittaker and G.N. Watson : Modern analysis, Cambridge (1935) p. 392
- 4) L.D. Landau and E.M. Lifshitz. Quantum Mechanics, Pergamon (1965) p. ³⁵³~~168~~ (94.20)
- 5) E.U. Condon and H. Odabasi. Atomic Structure, Cambridge (1950) p. 168.
- 6) L. Hörmander : Linear Partial Differential Operators, Springer (1964) p. 175
- 7) Courant-Hilbert : Methods of Mathematical Physics, Interscience (1953) vol. 1 p. 513.
- 8) L. ニラルツ : 超関数の理論, 岩波 (1971).
- 9) 金子晃 : 定数係数線型偏微分方程式, 岩波基礎数学講座 (1976)
- 10) H. Masuda : "Representation of the Point Group O_8 by Spherical Harmonics", Bulletin of the Fac. Gen. Educ. Utsunomiya Univ. No. 15 (To appear in Dec. 1982)