

$\mathbb{R}^d$ -次元の $Z (= L_2(\Delta))$

の構造について。(回転不変の場合)

阪大 理 小谷 真一

§ 1 序

定常過程の spectral density を Δ としとき, ヒルベルト空間 $Z (= L_2(\Delta))$ の構造を調べることは線型予測理論への応用, 又それ自身解析の問題としても興味ある問題である。

1次元 ($d=1$) の場合は N. Levinson, H. P. McKean [1], Dym H. P. McKean [2], M. G. Krein [3] により詳細に研究されている。多次元 ($d \geq 2$) の場合は O. A. Prentjaskova [4], O. I. Orlovskova [5] により D が有界凸集合のとき $Z(D) (= L(e^{i \cdot x}; x \in D))$ の analytic な性質が調べられているが, これはほぼ 1次元の場合の [1] に対応する結果である。一方私は [6] で $Z(D)$ を Fourier 変換で特徴付け, とくに D が有界のときには再生核をもつことを注意した。

そこで私はこの報告で多次元の場合の Z の構造について, とくに Δ 及び D が回転不変の場合に球面調和関数で展開する

ことにより 1 次元化して調べる。方法は $\cos$, $\sin$ 変換, Fourier-Bessel 変換に代る変換を導入することになる。

§. 2 一般化された Fourier-Bessel 変換について.

この § では以下の準備のため上の変換についての一般論を述べる。尚この § の特殊関数及びその記号については式 # [7] に従う。

Gegenbauer の多項式を $C_m^{\frac{d-2}{2}}(x)$ とし $K_m^d(x) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{\frac{d}{2}}(m+d-3)} C_m^{\frac{d-2}{2}}(x)$ とする。Fourier-Bessel 変換での Bessel 関数の役目とする関数 $\varphi_m(p)$ と次のように定める。

$$\varphi_m(p) = \int_{S \times S} e^{ip \cdot \varphi} K_m^d(0, \varphi) d\theta d\varphi$$

但し S は $\mathbb{R}^d$ の単位球面, $d\theta(d\varphi)$ はその面積要素を表わす。

φ_m は Bessel 関数 $J_{m+\frac{d-2}{2}}$ を用いて次のように書ける。

$$(*) \quad \varphi_m(p) = i^m (2\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{J_{m+\frac{d-2}{2}}(p)}{p^{\frac{d-2}{2}}}$$

φ_m により変換 F_m を次のように定める。

$$(F_m f)(t) = \int_0^\infty \varphi_m(tr) f(r) r^{d-1} dr.$$

このとき次の補題が成り立つ。

補題 1

$$(1) \quad \int_0^\infty |f(r)| r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow \int_0^\infty |\tilde{f}_m f(t)| t^{d-1} dt < +\infty$$

r の関数に対し z は,

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \overline{\varphi_m(t+r)} (\tilde{f}_m f)(t) t^{d-1} dt$$

$$(2) \quad \int_0^\infty |f(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \quad (p=1, 2)$$

r の関数に対し z は,

$$\int_0^\infty |\tilde{f}_m f(t)|^2 t^{d-1} dt = (2\pi)^d \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{d-1} dr$$

証明は $\mathbb{R}^d$ での Fourier 変換論と関数 $F(x) = F(r\theta) = f(r) K_m^d(\theta \cdot e)$ ($e = (1, 0, \dots, 0)$) に適用するにとおりできる。

(*) より φ_m は 2 階微分作用素 $L_m = -\frac{d^2}{dp^2} - \frac{d-1}{p} \frac{d}{dp} + \frac{m^2(d-2)m}{p^2}$ に対して不変である。即ち

$$(**) \quad L_m \varphi_m = \varphi_m.$$

この恒等式を考慮して次の急減衰関数空間を導入する。

$R_+ = (0, \infty)$, $\overline{R_+} = [0, \infty)$ とするとき $C^\infty(\overline{R_+})$ として R_+ での無限回微分可能で原点で任意回数の右微分が存在する空間を表わす。このとき空間 $S_m^d(\overline{R_+})$ は次のように定義される。

$$S_m^d(\overline{R_+}) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\overline{R_+}) \mid \sup_{0 < r < +\infty} |r^p D_r^k L_m^k \varphi(r)| < +\infty \right. \\ \left. \forall p, k \geq 0 \right\}$$

但し $D_r = \frac{d}{dr}$ を表わすとする。空間 $\mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$ は作用素 L_m に関して $\mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$ の元 φ についての変換 F_m に対しては次の補題が成り立つ。

補題 2

- (1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\sup_r |L_m f(r)| < +\infty$ と $\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$ に対して

$$\int_0^\infty f(r) (L_m \varphi)(r) r^{d-1} dr = \int_0^\infty (L_m f)(r) \varphi(r) r^{d-1} dr$$

- (2) $\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$ に対して

$$L_m^k (F_m \varphi)(t) = F_m (r^{2k} \varphi)(t)$$

$$F_m (L_m^k \varphi)(t) = t^{2k} (F_m \varphi)(t)$$

- (3) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ ならば $|F_m \varphi(r)| \leq \frac{C_k}{1+r^k} \quad \forall k \geq 0.$

そして $\varphi \in \mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$

証明は恒等式 $L_m \varphi_m = \varphi_m$ より $(L_m)_t \varphi_m(tr) = r^2 \varphi_m(tr)$ に注意すれば困難はない。(2) より $F_m \mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$ の元は任意の多項式の逆数より早く収束する。尚 $\mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$ は F_m により下の空間 $\widetilde{\mathcal{S}}_m^d(\mathbb{R}_+)$ の中に移る。このことは(2)の帰結である。

$$\widetilde{\mathcal{S}}_m^d(\mathbb{R}_+) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \mid \sup_{0 < t < \infty} |L_m^k D_t^p t^{2p} \varphi(t)| < +\infty \right. \\ \left. \forall k, l, p \geq 0 \right\}$$

最後に $t \in \text{support}$ とも $(S_m^d(\mathbb{R}_+))'$ の元の特徴付けに
関係した次の補題をあげておく。

補題 3

$\varphi \in S_m^d(\mathbb{R}_+)$ に対して

$$\int_0^\infty r^k \overline{\varphi_m^{(k)}(tr)} (F_m \varphi)(r) r^{d-1} dr = (2\pi)^d \varphi^{(k)}(t)$$

$$\forall k \geq 0, \forall t > 0$$

証明は $k=0$ のときは補題 1 の iii) によるが, $k \geq 1$ のときは帰納法によりできる。

今までの議論は $d \geq 3$ の場合にしかできていないが $d=1$ の場合は変換 f_m が $\cos$, $\sin$ 変換, $d=2$ の場合には f_m が Fourier-Bessel 変換となることにより平行した議論が可能であることに注意しておく。

§ 3

$\mathbb{Z}$ の球面調和関数による分解

(Δ , D とともに回転不変の場合。)

この § 2 は Δ , D とともに回転不変の場合, k 球面調和関数 k より $Z(D)$ ($\partial Z(D)$) と分解して, その各々の空間 Z_m^T (∂Z_m^T) を § 2 で導入し, 変換が併微付けることを考へる。

まず [6] より次のことが分つてゐる。単調増大非負連続関数 T があつて積分条件 $\int_0^{+\infty} \frac{T(p)}{p^2} dp < +\infty$ をみたしてゐるとする。この T に対し Δ が次の条件を満足してゐる場合を考へる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \quad \frac{1}{\Delta(x)} \leq C e^{T(|x|)} \quad |x| \text{ 十分大} \\ \circ \quad \frac{1}{\Delta} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \end{array} \right.$$

このとき任意の有界集合 D に対し Z , $Z(D)$ は 2 変数として連続な再生核をもつ。

この事実を考慮して以下 Δ は回転不変で多項式 q の order p の場合のみを考へる。

$$\frac{1}{\Delta(x)} \leq C |x|^p \quad \exists p \geq 0 \quad |x| \text{ 十分大}$$

の場合のみを考へる。

$J(x, y)$ を $Z(\{x \in \mathbb{R}^d \mid T_1 \leq |x| \leq T_2\})$ の再生核とする。但し $0 \leq T_1 < T_2 < +\infty$ とする。このとき J は回転不変であり, 又 2 変数 k として連続であるから球面調和関数による展開が可能で,

$$J(r\theta, t\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m, d) a_m(r, t) k_m^d(\theta, \varphi)$$

$$\text{但し } h(m, d) = (2m + d - 2) \frac{(m + d - 3)!}{(d - 2)! m!}.$$

$$a_m(r, t) = \int_{S \times S^1} J(r\theta, t\varphi) k_m^d(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$$

となる。これに対する逆変換より $\Delta(x) = \frac{1}{2} \Delta(|x|)$ であるが、次の補題が成り立つ。

補題 4

$$(1) \quad a_m(r, t) = \int_0^\infty a_m(r, s) \overline{a_m(t, s)} \Delta(s) s^{d-1} ds$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi_m(t, r) &= \int_0^\infty \varphi_m(t, s) \overline{a_m(r, s)} \Delta(s) s^{d-1} ds \\ &\quad \downarrow \\ T_1 \leq t \leq T_2 \end{aligned}$$

補題 5

a_m を基底核にもつヒルベルト空間を $Z_m(T_1, T_2)$ とすると。

$$(1) \quad Z_m(T_1, T_2) \text{ は } L_2(\Delta(s) s^{d-1} ds) (\cong Z_m) \text{ の閉部分空間である。}$$

$$(2) \quad \mathcal{L} \{ \varphi_m(t, \cdot) \mid T_1 \leq t \leq T_2 \} = Z_m(T_1, T_2).$$

証明は省略する。次に $D = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq T\}$ に対する $\partial Z(D)$ の基底核を J_T とし、 J と同様に球面調和関数で分解して a_m に相当するものを b_m とする。

補題 6

b_m を再生核に $\varepsilon > 0$ の Z_m の閉部分を閉 ∂Z_m^ε とする。

$$\partial Z_m^\varepsilon = \bigcap_{\varepsilon > 0} Z_m(T-\varepsilon, T+\varepsilon)$$

「証明」 $f \in \partial Z_m^\varepsilon$ とする。 $F(x) = F(r\theta) = f(r) k_m^d(\theta \cdot e)$ とおく。

$f \in \partial Z_m^\varepsilon \subset Z_m$ より $F \in Z$ であるが、 $x = r\theta$, $y = ty$ とす

ると、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} F(x) \overline{J_T(y, x)} \Delta(x) dx \\ &= \int_0^\infty f(r) \Delta(r) r^{d-1} dr \int_S \overline{J_T(ty, r\theta)} k_m^d(\theta \cdot e) d\theta \\ &= \left(\int_0^\infty f(r) \overline{b_m(t, r)} \Delta(r) r^{d-1} dr \right) k_m^d(y \cdot e) \\ &= f(t) k_m^d(y \cdot e) \quad (\because f \in \partial Z_m^\varepsilon) \\ &= F(y) \end{aligned}$$

だから $F \in \partial Z(D)$ である。故に $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$F \in Z(\{x \in \mathbb{R}^d \mid T-\varepsilon \leq |x| \leq T+\varepsilon\})$$

右辺の再生核は J_ε , J_ε の球面調和函数による展開で k_m^d に対応する係数を a_m^ε とすると。

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x) \overline{J_\varepsilon(y, x)} \Delta(x) dx.$$

これは上と同じ計算をするこゝにより次の等式を示してゐる。

$$f(t) k_m^d(\varphi, \varepsilon) = \left(\int_0^\infty f(r) \overline{a_m^\varepsilon(t, r)} \Delta(r) r^{d-1} dr \right) k_m^d(\varphi, \varepsilon)$$

だから
$$f(t) = \int_0^\infty f(r) \overline{a_m^\varepsilon(t, r)} \Delta(r) r^{d-1} dr$$

即ちこれは $f \in Z_m(T-\varepsilon, T+\varepsilon)$ を示している。

同様に逆の議論も出来ることにより $f \in \bigcap_{\varepsilon>0} Z_m(T-\varepsilon, T+\varepsilon)$ より $f \in \partial Z_m^T$ が帰結され補題6は証明された。

次に補題6を利用して ∂Z_m^T の元と見做すことを考える。
今は $\frac{1}{\Delta}$ が多項式の order であると仮定して、これから補題2
の後の注意より Z_m の元に対して $\mathcal{F}_m$ -変換が逆変換で定義できる。

$$f \in Z_m, \quad \varphi \in \mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$$

$$\langle \mathcal{F}_m f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(r) (\mathcal{F}_m \varphi)(r) r^{d-1} dr.$$

よって $\mathcal{F}_m f \in (\mathcal{S}_m^d(\mathbb{R}_+))'$ が確かめられる。

とくに $f(r) = \overline{\varphi_m(t, r)}$ に対しては, ($t > 0$)

$$\langle \mathcal{F}_m f, \varphi \rangle = \int_0^\infty \overline{\varphi_m(t, r)} (\mathcal{F}_m \varphi)(r) r^{d-1} dr$$

$$= (2\pi)^d \varphi(t) \quad (\text{補題3})$$

$$= \langle (2\pi)^d \delta_t, \varphi \rangle \quad (\delta_t \text{ は } t \text{ の support } t \text{ の dirac measure})$$

よって $\mathcal{F}_m \overline{\varphi_m(t, \cdot)} = (2\pi)^d \delta_t \quad \text{----- [1]}$

となる。

定理

$\frac{1}{\Delta}$ が多項式の order α とし, $T > 0$ に対し

$$\partial Z_m^T = \left\{ f \in Z_m \mid f(r) = \sum_{k=0}^N c_k r^k \varphi_m^{(k)}(Tr) \quad 0 \leq N < \infty, c_k \in \mathbb{C} \right\}$$

「証明」 まず $\partial Z_m^T = \{ f \in Z_m \mid \text{supp } f_m f = \{T\} \}$ を示そう。

$f \in \partial Z_m^T$ とすると, 補題 6 より $\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$f \in Z_m(T-\varepsilon, T+\varepsilon)$$

だから f は $\{ \varphi_m(t), T-\varepsilon \leq t \leq T+\varepsilon \}$ の基底 f_n を Z_m -norm

で近似できる。と $\exists$ 由 (1) より $\text{supp } f_n \subseteq \{t \mid T-\varepsilon \leq t \leq T+\varepsilon\}$

であり, $f_m f_n$ は $f_n f$ を $(\mathcal{S}_m'(\mathbb{R}_+))'$ で収束する。

だから

$$\text{supp } f_m f \subseteq \{t \mid T-\varepsilon \leq t \leq T+\varepsilon\}.$$

ε は任意であるから

$$\text{supp } f_m f = \{T\}.$$

とある。よって $f \in Z_m$ かつ $\text{supp } f_m f = \{T\}$ とする。

$F(x) = F(r, 0) = f(r) k_m^\alpha(\partial \mathbb{D})$ とおくと,

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{supp } \psi \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = T\} = \emptyset$$

に対し

$$\langle \hat{F}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} F(x) \hat{\psi}(x) dx \quad (\wedge \text{ は Fourier 変換})$$

$$= \int_0^\infty f(r) r^{d-1} dr \int_S \hat{\varphi}(r\theta) k_m^d(\theta \cdot e) d\theta$$

$$\text{と } \int_S \hat{\varphi}(r\theta) k_m^d(\theta \cdot e) d\theta$$

$$= (f_m \varphi)(r)$$

$$\text{但し, } \varphi(t) = \int_S \varphi(t\omega) k_m^d(\omega \cdot e) d\omega$$

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ である,}$$

$$|(f_m \varphi)(r)| \leq \int_S |\hat{\varphi}(r\theta)| |k_m^d(\theta \cdot e)| d\theta$$

$$\text{と, } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ である.}$$

$$|\hat{\varphi}(r\theta)| \leq \frac{C_k}{1+r^k} \quad (k \geq 0)$$

$$\text{である. } |(f_m \varphi)(r)| \leq \frac{C'_k}{1+r^k} \quad (k \geq 0)$$

$$\text{故に補題 2 の (3) が適用でき } \varphi \in \mathcal{D}_m^d(\mathbb{R}_1) \text{ である.}$$

$$\text{supp } \varphi \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = T\} = \emptyset \text{ であり, } \text{supp } \varphi \cap \{t \mid t = T\} = \emptyset \text{ である.}$$

$$\text{である.}$$

$$\langle \hat{H}, \varphi \rangle = \langle f_m f, \varphi \rangle = 0$$

$$\text{である. } H \in \partial Z(D) \text{ であり, } \varphi \text{ は } f \in \partial Z_m^T \text{ である.}$$

$$\text{である.}$$

$$f \in \partial Z_m^T \text{ である. } \text{supp } f_m f = \{T\} \text{ である.}$$

$$\text{故に } f_m f = \sum_{k=0}^N C_k \delta_T^{(k)}$$

$$\text{と } \text{補題 3 により}$$

$$f_m \left(\frac{1}{\rho \eta d} \sum_{k=0}^N C_k r^k \varphi_m^{(k)}(Tr) \right) = \sum_{k=0}^N C_k \delta_T^{(k)}$$

$$g(r) = f(r) - \frac{1}{r^d} \sum_{k=0}^N c_k r^k \varphi_m^{(k)}(Tr)$$

と仮定. $\int_0^\infty g(r) (f_m \varphi)(r) r^{d-1} dr = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}_+)$

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し z は, $G(x) = G(r, \theta) = g(r) k_m^d(\theta, e)$ と仮

定, $\int_{\mathbb{R}^d} G(x) \hat{\varphi}(x) dx = \int_0^\infty g(r) (f_m \varphi)(r) r^{d-1} dr$

$$(\varphi(t) = \int_{\mathbb{S}} \varphi(t\omega) k_m^d(\omega, e) d\omega)$$

2'', $\varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}_+)$ と仮定する.

$$\langle \hat{G}, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

となる。よって $G \in \mathcal{S}'$ と仮定する.

$$G \equiv 0$$

即ち, $G \equiv 0$ が結論される。

よって $f \in \mathcal{Z}_m$ かつ $f(r) = \sum_{k=0}^N c_k r^k \varphi_m^{(k)}(Tr)$ となる $\text{supp } f = \{T\}$

であるから上の注意により $f \in \partial \mathcal{Z}_m^T$ となるのである。

「証明終り」

「注意」 Δ^1 が回転不変な多項式のときは process がマルコフ的であり線型予測の長から $\partial \mathcal{Z}(D)$ の両生弦を計算することは興味あることであるが, それは球面調和関数で展開した係数のつく両生弦の空間 $\partial \mathcal{Z}_m^T$ を考えるとき, それは定理より有限次元となるから, 理論的には $\partial \mathcal{Z}(D)$ の両生弦は計算で

$$\bar{z} \bar{z} = \bar{z} \bar{z} \bar{z} \bar{z}.$$

参考文献

- [1] N. Levinson and H. P. McKean, Jr.
 Weighted trigonometrical approximation on $\mathbb{R}^1$ with application to the germ field of a stationary Gaussian noise.
 Acta Math vol 112 (1964)
- [2] H. Dym and H. P. McKean, Jr.
 Application of De Branges spaces of integrals functions to the prediction of stationary Gaussian processes.
 Illinois Journal of Mathematics (1970)
- [3] M. G. Kreĭn
 On a fundamental approximation problem in the theory of extrapolation and filtration of stationary random processes. ~~1974~~. Selected transl. in Math. Stat. and Prob. 4
- [4] O. I. Presnjakova
 On the analytic structure of subspaces generated by random homogeneous fields.
 Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 192

[5] O. A. Orekhova

Some problems for extrapolation for random fields

Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 196.

[6] S. Kotani

$\mathbb{R}^d$ -径数正規走常過程のマルコフ性について. (修士論文)

[7] T. Inui

特 殊 関 数 (岩波全書)

「訂正」 p4 の $\widehat{S}_m^d(\mathbb{R}_+)$ の定義のところで F が φ に訂正.

$$\widehat{S}_m^d(\mathbb{R}_+) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \mid \sup_{0 < t < \infty} \left| D_t^p L_m^* t^{2p} \varphi(t) \right| < +\infty \right\}$$

$\forall k, l, p \geq 0.$