

拡散過程の局所構造についての注意

阪大 理 池田 信行

§ 1. はじめに, 状態空間 S 上の拡散過程, すなわちマルコフ過程で道が連続なものに具体的な特性量を用いて特徴づけようというのが本来の目標である. この目標は対するいくつかの試みを紹介し, あわせて簡単な例を用いて困難点を説明するのが目的である. 問題を半群の言葉で言えば S 上の有界連続関数の空間 $C(S)$ 上の線型作用素の半群 $\{T_t\}$ で非負, contraction であるもの, 更に "局所性" をもつものを特徴づけることである. 厂的に見ればこの問題は Kolmogorov がマルコフ過程論の定式化を与えた最初の段階から意識されてきた. 実際彼は $\{T_t\}$ の生成作用素の定義域にコンパクトな台を持つ 2 回連続的微分可能な関数 $C_c^2(S)$, ($S = \mathbb{R}^n$), の時は生成作用素が 2 階の階円型微分作用素になることを示し特徴づけることを示している. それから 30 数年経過した今日においては, それだけの成果は得られているが, 満足すべき形の結果は S が微分の場合のみしか得られている.

S が微分の場合は最初 Feller により解析的方法で解決され, さうして Dynkin や Ito-McKean によってその確率論的背景が明らかになった. この場合は微分の各長はある意味で "正則" な点と "非正則" な点とに分類され, 各々の場合には局所的に

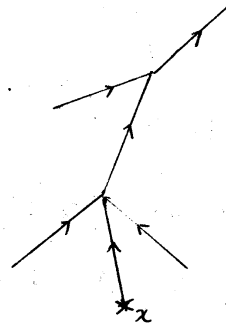
定まる解析的変量の組と拡散過程が 1対1 に対応している。

たとえば S が正則な点の集まりである時は、 S の尺度 $S(x)$, 速度測度 $m(dx)$, 消滅測度 $k(dx)$ の組 $(S(x), m(dx), k(dx))$ と拡散過程が 1対1 に対応している。(Itô-McKean [7])。目標はこの程度の実体性を持った形で解析的変量と拡散過程の対応と一般の場合を見つけることである。

問題の性質上 S は始めに与えられたものでなく、その各点の近傍に制限して存在するとは言えるまでもないが、一般の距離空間をとるのでは殆んど生産的な結果が得られなことは、例えば S と $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな距離空間の正の Radon 測度全体とした時は何でか決定的な運動ばかりでも非常に不自然なものがあり、その構造の決定はきわめて困難になってしまうことから想像される。そこでまず第一段階として、 S と $\mathbb{R}^n$ のある領域を対応させることは妥当なことであろう。このような制限をしても前分の時のような結果はとることも得られるが、最近平田の additive functional についての研究が進み、その結果が研究に役立つことがわかり始めている。とくに確率積分の Lévy-伊藤の変換公式が重要で、それを使ったいくつかの考えを Skorohod [15], [16] が提案している。それら自身については他の人のまとめた報告があるので、このノートではそれらの報告の補充として 2, 3 の注

意をのべる。こゝと密接に関連があるが、適当な測度に対して対称に与つてゐる時は Dirichlet 空間を用いる方法も有効に与つて来る。こゝについてをも後で典型的な例をのべる。

§ 2. 決定的な運動。 § 1 にのべたように制限しても $n \geq 2$ の時は決定的な運動が示山の種類存在し得る。決定的な運動とはある程度く言えば出発点 x を定めた時、マルコフ過程の測度 P_x がある 1 本の道だけに集中してゐるものである。たとへば右図のように、 $\mathbb{R}^2$ の任意の点 x を 1 つ固定した時、その点を通る向きのある T -値 z 1 つの曲線が対応してゐる、その向きは z として道が集まることはあつても板板か



くちることはないのである。その時曲線上の位置のみに依つて定まる速度で向きの方向に動く運動を考へれば、その軌跡を道とするマルコフ過程が得られる。 $S \subset \mathbb{R}^n$ は必要ならば充分小さくとつておいて、 S 上のようの特徴を持つマルコフ過程の特性としてゐることをつぎに示す。 $\bar{S} = S \cup \{\partial\}$ は S の一長 compact 化で、これを状態空間とする Hunt 過程 $X = \{x_t(\omega), \mathcal{F}_t, P_x, x \in \bar{S}\}$ を示す。点 ∂ は trap, かつ $P_\partial \{x_t(\omega) = \partial, t \geq 0\} = 1$ を満たしてあり、 $\mathcal{F}$ は ∂

への衝突時間とする。以下の議論で最も基本的な仮定は " X が拡散過程" であること, したがって " X の道が連続" であることである。さらに便宜上 $P_x[\exists^1: \lim_{t \uparrow 5} x_t(\omega) = 0] = 1, x \in \bar{S}$ を仮定する。またしばしば additive functional についての結果を用いるが, その時は Meyer の仮定 (L) である標準測度 γ が存在することとを仮定する。(標準測度については本尾 [12] 参照)。またマルコフ過程論で通常用いられることは前提にされたとし, 記号上可能な限り常識的に用い, 詳しうのべないことにする。

マルコフ過程 X があるとき, $\alpha: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$ なる実数 $\alpha(t, \omega)$ はつぎの性質をみたす時 additive functional と呼ばれる: (A.1) t を固定した時 ω について $\mathcal{F}_t$ -可測 (A.2) 予可測集合 Ω_α が存在し, つぎの性質をもつ。 $P_x[\Omega_\alpha] = 1, x \in \bar{S}$ 。任意の $\omega \in \Omega_\alpha$ に対して $\alpha(t, \omega)$ は有限で, 右連続であり左極限をもつ。(A.3) $\alpha(t, \omega) = \alpha(s, \omega), t \geq s$ 。(A.4) 任意の t, s に対して $\alpha(t+s, \omega) = \alpha(t, \omega) + \alpha(s, \theta_t \omega)$

このようなものの全体を $\mathcal{A}$ で看做す。(本尾 [12])。いま $\mathcal{O} = \{A; A \in \mathcal{A}, E_x[A_t] = 0, \exists \alpha > 0: \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[A_t^2] dt < \infty, \forall x \in \bar{S}\}$, $\mathcal{O}_2 = \{A; A \in \mathcal{O}, E_x[A_t^2]: t \geq 0 \text{ 有界}, \forall x \in \bar{S}\}$ とおく。本尾-湯田 [13] によれば $A \in \mathcal{O}_2$ ならば $\lim_{t \uparrow 5} A_t = A_5$ が存在し, $E_x[A_5^2] < \infty, E_x[A_5] = 0$, しかも $\mathcal{O}_2 = \{A; A \in \mathcal{O},$

$E_x[A_5^2] < \infty$, $E_x[A_5] = 0$, $\forall x \in S$ とする。つぎに $\sigma_1^c = \{A; A \in \sigma_1, A: \text{連続}\}$, $\sigma_2^c = \{A; A \in \sigma_2, \text{連続}\}$ とおけば、任意の $A \in \sigma_2$ に対し $1 - P_x[A \text{ の不連続点に達する}] = P_x[A \text{ の不連続点に達しない}]$ であるので、今の場合は $\sigma_2 = \sigma_2^c$ とする。

つぎの条件をみたす拡散過程を "決定的な運動" とする。

(1) 任意の $x \in S$ に対し 2 定数 $\gamma = \gamma(x)$ が存在し $P_x[\gamma(\omega) = \gamma] = 1$, (2) 任意の $(t, x) \in [0, \gamma) \times S$ に対し 2 $c = c(t, x)$ が存在し $P_x[\gamma_t(\omega) = c] = 1$ である。

このときつぎの命題が成り立つ。

命題 2.1 X が決定的な運動であることと,

$$(2.1) \quad \sigma_2 = \{0\}$$

であることは同等である。

証明は色々あるが次の本尾一孝 [43] の証明は簡明である。

証明。 X が決定的な運動の時 $\sigma_2 = \{0\}$ であることは自明である。したがって逆を示せば充分である。(2.1) を仮定する。

$f \in C(\bar{S})$, $f(0) = 0$, $u(x) = G_x f(x)$ とおく。Dynkin の公式

$$A_t = u(x_t(\omega)) - u(x_0(\omega)) + \int_0^t e^{-\alpha s} f(x_s(\omega)) ds$$

より $A \in \sigma_2$ である。故に $u(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha s} f(x_s(\omega)) ds$, a.e. (P_x),

$$- \text{より} \quad u(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_x[f(x_s(\omega))] ds \quad \text{である。} \quad \text{したがって}$$

$$f(x_s(\omega)) = E_x[f(x_s(\omega))], \quad \text{a.e. } (P_x), \quad s \geq 0.$$

上のようである f が $\bar{S}$ の点に分離されるので上の等式は X が決

定的な運動であることと示している。

いま X が定的な運動で任意の $x \in \bar{S} = \{x \mid 1 \leq S(x) < \infty\}$ としよう。 f は $\bar{S}$ 上で 1 で $\partial \bar{S}$ で 0 とする。 $u = G_0 f(x)$, $y_t(\omega) = u(x_t(\omega))$ とおけば $t < S(x) = \bar{\tau} \mid 1 \leq y_t(\omega) - y_0(\omega) = -t$, a.e. (P_x) となる。このことから定的な運動は本質的には積分上の等速運動の集りに帰着されること加わることから、また定的ということは S の各点 x の近傍で示される局所的な概念である。

§ 3. Hunt の条件 [H] と正則な運動。 前の節の定的な運動というのは確率論的興味から言えば始めから示す対象から除いてもよいとも言える。 S の任意の点 x のどのようになり近傍 $U(x)$ にとつても X の $U(x)$ への制限 $X|_{U(x)}$ は条件 (2.1) を成立しないうちでも差支らないであろう。たとえば $S = \mathbb{R}^2$ での 2 次元の Brown 運動と 1 次元の時空 Brown 運動では事情が非常に違ってくる。これは上にのべた条件をみたしているが、任意の場合にはある方向には定的な運動としていえる。 Skorokhod 的には例えは $\mathbb{R}^n$ の Brown 運動に相当な操作をほどこして 1 次元の Brown 運動を作るような操作を提示している。得によればこの操作で $\mathbb{R}^n$ の拡散を幾分階かほどこして 1 次元の拡散に帰着させることはできるが、現在知られる

この P^B については $\Sigma = 1$ は未解決の技術的困難があるようである。

この $\Sigma > 2$ については 2 次元 Brown 運動と 1 次元 Brown 運動を区別するよう分類を ~~する~~ べきである。(本原 [9])。また

記号として, $\mathcal{L}^+ = \{ \varphi; \varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{A} \}$, $\mathcal{L}_1^+ = \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{L}^+, E_x[\varphi_S] < \infty, x \in S \}$, $\mathcal{L} = \{ \varphi; \varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}, \varphi^{(i)} \in \mathcal{L}_1^+ \}$, $\mathcal{L}_1 = \{ \varphi; \varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}, \varphi^{(i)} \in \mathcal{L}_1^+ \}$, $\mathcal{E} = \{ u; u = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} - u_2^{(1)} - u_2^{(2)}, u_i^{(j)}: \text{class D の excessive function}, u_i^{(j)}: \text{class D} \}$ とおく。

このとき, 任意の $u \in \mathcal{E}$ に対して $\varphi^{[u]} \in \mathcal{L}_1$ かつ $A_t^{[u]} = u(x_t(\omega)) - u(x_0(\omega)) - \varphi_t^{[u]}$ とおけば $A^{[u]} \in \mathcal{O}_2$ であり, $\Sigma < 1$ である $\mathcal{E}_2 = \{ u; u \in \mathcal{E}, A^{[u]} \in \mathcal{O}_2 \}$ とおく。

nearly Borel 可測な u に対して $P_x[u(x_t(\omega)) = u(x_S(\omega)); 0 \leq t < S] = 1, x \in S$, かつ成立する場合は u は nearly constant と呼ばれる。(本原 [12])。nearly analytic set B に対して $\sigma_B = \inf \{ t; x_t(\omega) \in B, t > 0 \}$ とおく ($\inf \emptyset = \infty$ とする。)

B が (X に関して) negligible であるとは, $P_x[\sigma_B = \infty] = 1, x \in S$, かつ成り立つことである。また $P_x[\sigma_B = 0] = 0$ かつ 1 である 0 に等しいとき B に関して非正則, 1 に等しいとき B に関して正則という。

Hunt の条件 [H]。 F が S の compact な部分集合で X に関して negligible でない S ならば, F に対して正則な点 x_0 が存在する。

以下二の節では S の任意の点 x のどのような近傍 $U(x)$ に X を制限しても, 決定的運動ではなるとする。この仮定の下でつぎのような概念を導入する。

$x_0 \in S$ のどのような小さな近傍 $U(x_0)$ に X を制限しても, $X|_{U(x_0)}$ に一致し, " $u \in \mathcal{E}_2, A^{[u]} = 0 \Rightarrow u$: nearly constant" という性質がある時 x_0 は X に属して "正則" という。 x_0 が正則でない時 "特異" という。そのとき,

命題 3.1 (渡辺(信) [18]). 条件 [H] が成り立つとき S の各点は正則である。

この証明は渡辺(信)氏によつてつぎの補題を基礎にしてなされる。

補題 3.1 (Banach の定理). f が $[a, b]$ で有界変分関数とし, $N(y) = \# \{x; f(x) = y, x \in [a, b]\}$ とおけば

$$T(a, b) = \int_a^b N(y) dy$$

である。 $\Rightarrow$ $T(a, b)$ は $[a, b]$ での f の全変分とする。

命題の証明. $x_0 \in S$ を一つとつて来ず, そのある近傍での X の制限 $X|_{U(x_0)}$ をとれば再び条件 [H] が成り立つことになる。したがって始めから S を充分小さくとつておいて $X|_{U(x_0)}$ があるとして X とする。ある u をとつて来ず, $u \in \mathcal{E}_2, A^{[u]} = 0$ とする。任意の c に一致し $\tau_c(\omega) = \inf \{t; \varphi_t^{[u]} = c\}$, ($\inf \emptyset = \infty$), とおく。また $S(y; c) = \{x; u(x) = u(y) + c\}$ とする。

11. 又 $\omega \in \{\omega; \sigma_{S(y;c)}(\omega) < \infty, x_0(\omega) = y\}$ とすれば $\sigma_{S(y;c)}(\omega) = \tau_c(\omega)$ である。一方 $\omega \in \{\omega; \sigma_{S(y;c)}(\omega) = \infty, x_0(\omega) = y\}$ には $\phi = \{t; x_t \in S(y;c)\} = \{t; u(x_t(\omega)) = u(y) + c\} = \{t; \varphi_t^{[u]}(\omega) = c\}$ 。故に $\tau_c(\omega) = \infty$ となり、常に $P_y[\sigma_{S(y;c)} = \tau_c] = 1$, $y \in S$ である。任意に固定し $T = y \in S$ には $P_y[\tau_c(\omega) < \infty] > 0$ なる $c \neq 0$ が存在し $T = c$ となる。

12. $c > 0$ とし S 上の一般性を失わずに $0 \leq d \leq c$ なる任意の d には $P_y[\tau_d(\omega) < \infty] > 0$ である。しかして $S(y;d)$ は nearly Borel set なる compact set の系列 $\{G_n\}$ なる $G_n \uparrow S(y;d)$, $\sigma_{G_n} \downarrow \sigma_{S(y;d)}$ なるものがある。故に $N > 0$ が存在して、任意の $n \geq N$ には $P_y[\sigma_{G_n} < \infty] > 0$ である。条件 [H] より $G_n^{\text{reg}} \neq \emptyset$, $\forall n \geq N$ である。 $\Rightarrow$ G_n^{reg} は G_n の正則な部分の全体。故に $S^{\text{reg}}(y;d) \equiv S_d^* \neq \emptyset$ である。 $\Rightarrow$ Hunt [5], Theorem 20.1 に注意すれば $P_y[\sigma_{S_d^*} < \infty] > 0$ である。故に S_d^* の定義と併せると強マルコフ性より,

$$(3.1) \quad P_y[\exists t_n; t_n \downarrow 0, x_{t_n + \sigma_{S_d^*}}(\omega) \in S_d^*] = 1$$

が成り立つ。一方 $N_d(T \wedge S, \omega) = \#\{t; 0 \leq t \leq T \wedge S, \varphi_t^{[u]} = d\}$ とおけば Banach の定理と Fubini の定理を併せて始めとすると d には $E_y[N_d(T \wedge S, \omega)] < \infty$ となる。故に d , $0 \leq d \leq c$ なる d には $P_y[\dots] > 0$ となる。

(3.1) に矛盾する。故に任意の $c \neq 0$ に対して $P_y[\tau_c(\omega) < \infty] = 0$ である。すなわち $P_y[u(x_5) = u(x_t); 0 \leq t < 5] = 1, y \in S$, と再び結論を得る。

この結果より Hunt の条件 [H] が正則性によって重要な役割を兼ねるが条件 [H] の充分条件は Hunt [5] によって与えられている。例えば $\mathbb{R}^n$ の付帯条件の下で, Green 関数が対称ならば X は条件 [H] をみたす。また T -時空 Brown 運動に対しては条件 [H] は成り立つが, そのみをみたす任意の $x \in S \equiv \mathbb{R}^n$ が特異であることは定義より明らか。

§ 4. 調和座標。 S が群の場合, S 上の点から正則であれば (ただし Feller の意味), S の尺度として調和関数かといえることが良く知られている。(伊藤 [8])。その一般化として Skorokhod [15] は調和座標の概念を導入した。 n 個の連続関数の組 $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ が S の座標を与え, しかも $A_t^{(i)} = u_i(x_t(\omega)) - u_i(x_0(\omega)), t < 5, i = 1, 2, \dots, n$, が 0 に収束する時, 組 $(u_1, \dots, u_n)$ は調和座標と呼ばれる。概念は導入されたが, $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, の場合ですら一般にどのような時に調和座標が存在するか, また存在するとすればどのような形で構成されるかはあまり知られていない。たとえ $u_j \in C^{(2)}(S)$ で, $\det\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x)\right) \neq 0, x \in S$ なるもの

が存在したとする。この時

$$\begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_m(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} v_1(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} v_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} v_m(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} v_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v_1(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v_m(x) \end{pmatrix}$$

と(2),

$$A = \frac{1}{2} \Delta + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

を示せば A は S 上の拡散過程の局所生成作用素の $\mathcal{C}^{(2)}(S)$

への制限になる。明らかに $A v_j(x) = 0$, $j=1, 2, \dots, n$ である

ので確率積分の変換公式に注意すれば $(v_1, \dots, v_m)$ は A に

対応する拡散過程の調和座標になる。と(3)が X を与え

るこの調和座標を求めることは求めるべき係数の時とする

容易である。もちろん一次元拡散過程の直積として作る

拡散過程では各々の調和座標の組を求めるものになっている。

このように本質的には一次元に帰着出来るもの以外で、かつ

求めるべき調和座標を持つ例を挙げてみる。

例 4.1 $S = \mathbb{R}^2$ とする。 $\{B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}), t \geq 0; P_x, x \in S\}$

を2次元 Brown 運動とする。 $\underline{t}(t, \omega)$ は y -軸方向の成分の 0

における local time とする。このとき $x_t^{(1)}(\omega) = B_t^{(1)}(\omega) + \underline{t}(t, \omega)$,

$x_t^{(2)}(\omega) = B_t^{(2)}(\omega)$ とおくと、random function の族 $\{x_t^{(1)}, x_t^{(2)}$

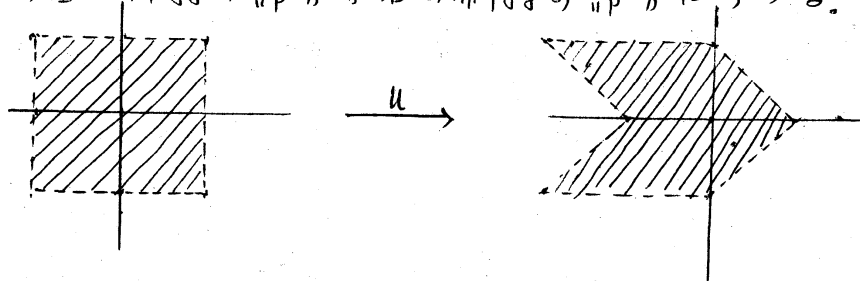
; $t \geq 0\}$ は拡散過程 X を決める。(Dynkin [2], Ikeda [6]).

この X に対しては $u_1(x) \equiv u_1(a, b) = a - |b|$, $u_2(x) \equiv u_2(a, b) = b$

とあるは (u_1, u_2) が調和座標になっている。というのは、
 $A_t^{[v]} = v(B_t^{(1)}) - v(B_0^{(1)}) - \underline{t}(t)$, $t < 5$, ($v(x) = |x|$), が 0
 に等しい

$$\begin{cases} u_1(x_t(\omega)) - u_1(x_0(\omega)) = B_t^{(1)}(\omega) - B_0^{(1)}(\omega) + A_t^{[v]} \\ u_2(x_t(\omega)) - u_2(x_0(\omega)) = B_t^{(2)}(\omega) - B_0^{(2)}(\omega) \end{cases}$$

とある。この u_1, u_2 は連続であるが、 u_1 は微分可能ではない。
 いま $u: x \longrightarrow (u_1(x), u_2(x))$ なる写像によって下
 図の左の斜線の部分は右の斜線の部分にうつる。



このようなためであるが調和座標があるわけである場合でも、
 半群は自然なものであることを示すためには X の推移確率を計
 算してあげる。そのためには Ito-McKean [7], p. 45, Problem
 3 の結果を用いるとつぎのこと加える。

$$P_{(0,0)}[B_t^{(2)} \in da, \underline{t}(t) \in d\zeta] = \frac{|a| + \zeta}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(|a| + \zeta)^2}{2t}} da d\zeta, \quad a \in \mathbb{R}^1, \zeta \geq 0,$$

である

$$\begin{aligned} E_{(a,0)}[f(x_t^{(1)})g(x_t^{(2)})] &= E_{(a,0)}[f(B_t^{(1)} + \underline{t}(t))g(B_t^{(2)})] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(a')g(b) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(a-a'+|b|-|b|)^2}{2t}} \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\zeta^2}{2t}} d\zeta. \end{aligned}$$

$t \geq 0$ かつ X の $dx = da db$ に関する推移密度関数 $p(t, (a, b), (a', b'))$ はつぎの形になる。

$$p(t, (a, b), (a', b')) = c(b, b') \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(a-a')^2}{2t}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(b-b')^2}{2t}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(b+b')^2}{2t}} \right\} \\ + \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(a-a'-|b-b'|+\xi)^2}{2t}} \frac{\xi}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{\xi^2}{2t}} d\xi$$

$$t \geq 0 \quad c(b, b') = \begin{cases} 1, & b, b' > 0 \text{ あるいは } b, b' < 0, \\ 0, & \text{他の場合} \end{cases}$$

このことから X に関する半群は Feller 型であることがわかる。(池田[6], 佐藤-上野[7], 本尾-渡辺[13])。

また Skorohod [16] が取扱った 11 生成作用素の定義域の関数, さらには一般に excessive 関数を drift の変換を X によって調和関数にする問題もこの調和座標のことと密接に関連して 11 する。Skorohod の結果は修正を要する点を含んで 11 する興味深い。修正すべき点加新たな方法の提起につながると思える面もある。(小林[9])。

§5. エネルギー測度。ここまでのことから拡散の局所構造と $\mathcal{O}_2$ の構造が密接に関連することになった。と 11 する $\mathcal{O}_2$ の構造を 11 する手段はあまり開発されて 11 ない。任意の $A \in \mathcal{O}_2$ に対して $u(x) = E_x[A_1^2]$ とおけば $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{C}$ で

$u(x) = E_x[\varphi_5]$ と書ける。この φ を記号として $[A]$ と書く。
 また $A \in \sigma_2$ に対する確率積分に於ける σ_2 の元全体を $\mathcal{M}(A)$
 と書けば、 $\exists A^{(i)}, i=1, 2, \dots, \in \sigma_2 : [A^{(1)}] \succcurlyeq [A^{(2)}] \succcurlyeq \dots$
 $\dots \succcurlyeq [A^{(n)}] \succcurlyeq \dots$ なる $\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathcal{M}(A^{(k)})$ とする。 $U(x)$ と

充分小さくとすれば $X|_{U(x)}$ に対する上の直和分解の和加下度

S の次元数 n またはそれ以下になるかというのには意味ある
 ことだが現在の所満足すべき結果は得られていない。(本尾

一度 [37], §14, Example 4)。いま必要に感じ S を充分小さ
 くとつておいて、 σ_2 の直和分解加下度 n で終つていた

としよう。その時次の2つの場合を考へよう：第1の場合

場合; $[A^{(1)}] \ll [A^{(n)}]$, 第2の場合; $[A^{(1)}] \not\ll [A^{(k)}]$ なる

番号 k が存在する。第1の例は $\mathbb{R}^n$ の Brown 運動であり
 ているが第2の場合もつぎの例が実際おきている。

例 4.1. $\mathbb{R}^3$ における Brown 運動 $\{B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)});$
 $t \geq 0; P_x, x \in \mathbb{R}^3\}$ を示さる。 $x_t^{(1)} = B_t^{(1)} + B_{\underline{t}(t)}^{(3)}$, $x_t^{(2)} =$
 $B_t^{(2)}$, ($\underline{t}(t)$ は第2成分の0における local time) とおけば
 random function の族 $\{x_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}), t \geq 0, P_{(a,b,0)}\}$
 は2次元の拡散過程 X を導く。 $x = (a, b)$ に対して $u_1(x) = a$,
 $u_2(x) = b$ とおけば (u_1, u_2) は X の調和座標である。そして

$A^{(1)} = A^{[u_1]}$, $A^{(2)} = A^{[u_2]}$ とおけば $[A^{(1)}]_t = t \wedge 5 + \underline{t}(t \wedge 5)$,
 $[A^{(2)}]_t = t \wedge 5$ となるので $x \in S$ だと $< 1 = x$ -軸にとれば $\geq$

のどくを小エを近得とつて $[A^{(1)}] \neq [A^{(2)}]$ となる。
 この事実の解析的な表現を得るために X の推移確率を
 計算してある。 §4 で用いた関係式より

$$\begin{aligned} E_{(a,0,0)} [f(x_t^{(1)}) g(x_t^{(2)})] &= E_{(a,0,0)} [f(B_t^{(1)} + B_{\frac{|b|}{t}}^{(2)}) g(B_t^{(2)})] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a') g(b') \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} e^{-\frac{(a-a')^2}{2(t+s)}} \frac{|b|+s}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(|b|+s)^2}{2t}} ds \right\} da' db' \end{aligned}$$

となる。したがって X の推移確率は $dx = da db$ である。密度
 関数存在しよと $p(t, (a, b), (a', b'))$ とおけば

$$\begin{aligned} p(t, (a, b), (a', b')) &= c(b, b') \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(a-a')^2}{2t}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(b-b')^2}{2t}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(b+b')^2}{2t}} \right) \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} e^{-\frac{(a-a')^2}{2(t+s)}} \frac{|b|+|b'|+s}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(|b|+|b'|+s)^2}{2t}} ds \end{aligned}$$

となる。したがって X の半群は Feller 型で、しかも X は
 dx である対称で、 $\alpha > 0$ である。

$$g_{\alpha}((a, b), (a', b')) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} p(t, (a, b), (a', b')) dt$$

とおけば

$$g_{\alpha}((a, b), (a', 0)) \leq g_{\alpha}((a, 0), (a', 0)) \leq g_{\alpha}((a', 0), (a', 0)) < \infty$$

となる。したがって g_{α} は対称な関数で $g_{\alpha}((a, b), (a', 0))$
 は $x = (a, b)$ の関数として有界である。このことから x -軸

の点 x_0 は $\{x_0\}$ に対し正則である。(Blumenthal-Gettoor [7])
 また X は §3 の条件 [H] を満たしている。また Hunt の結
 果より class (D) の excessive 関数に対する Riesz の表現
 定理が成り立つ、任意の $\alpha > 0$ に対して、

$$E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} d[A^{(i)}]_t \right] = \int_{\mathbb{R}^2} g_\alpha(x, y) S^{(i)}(dy)$$

なる測度 $\{S^{(i)}(dx), i=1, 2\}$ が定まる。($\alpha=0$ の場合)。こ
 の具体的な形は任意の compact 台を持つ連続関数 f に対
 し

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) S^{(1)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(a, 0) da, \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(x) S^{(2)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx$$

より決まる。

一般に調和座標 $\{u_1, \dots, u_n\}$ が存在し、 $A^{(i)} = A^{(u_i)}$ とお
 けし、 X が対称 (dm に対し) の密度 $g_\alpha(x, y)$ を持つ、
 かつ Riesz の表現定理が成り立つならば任意の $\alpha > 0$ に対
 し

$$E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} d\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle_t \right] = \int_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(x, y) S^{(ij)}(dy)$$

$i, j=1, 2, \dots, n$ によって定まる $\alpha=0$ の場合の測度の系 $\{S^{(ij)}(dx); i, j=1, 2, \dots, n\}$
 を X の エネルギー測度系 とする。これは速度測度は無関係
 であることは時間変換に無関係であることが容易に示される。 $(\langle, \rangle)$
 の定義については本尾一彦 [8] を参照)。この用語を用いると

例 5.1 の X は n 次元エネルギー測度系

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) S^{(1,1)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(q, 0) dq$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) S^{(2,2)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(x) S^{(1,2)}(dx) = 0$$

と与えられる。これは n 次元 Brown 運動

の時は

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) S^{(1,1)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(x) S^{(2,2)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) S^{(1,2)}(dx) = 0$$

となる。前の分類で第 1 の場合は $S^{(1,1)}(dx) \ll S^{(n,n)}(dx)$,

第 2 の場合はある k が存在して $S^{(1,1)}(dx) \not\ll S^{(k,k)}(dx)$

となる。例 5.1 の X は前者の例 2 つである。もう 1 つ注

意すべきことは $\mathbb{R}^n \supset S$, $n \geq 2$, の時は調和座標 $(u_1, \dots, u_n)$

が存在してむしろ他に速度測度, エネルギー測度系を少なくと

も指定しないと反駁はきかぬ。つまり $\{(u_1, \dots, u_n); m(dx),$

$S^{(i,j)}(dx), i, j=1, 2, \dots, n\}$ なる解析的量を指定しなくてはな

らぬ。これは $n=1$ の時, つまり 1 次元の場合, 時は,

その調和尺度 $S(x)$ が決まればエネルギー測度は $dS(x)$ と一

意的に定まる (今は S の名前は Feller の意味で正則とする)。

また消滅はなしとして今は話を進めているが, それがある時

はそれを定める測度も決めねばならぬ。

上の調和座標と速度測定とエネルギー測定の組を添える =
 とは Dynkin [2] や Skorohod [5] の quasi-infinitesimal
 operator を添える立場と密接に(関連して)いる。そのことは $\mathcal{C}^{(2)}$
 (S) より定まる $\mathcal{C}_2$ の元は確率積分の交換公式を用いた表現
 を与えておけるからである。

逆は $\{(u_1, \dots, u_n), m(dx), S^{(i,j)}(dx), i, j=1, 2, \dots, n\}$ を与えてこれ
 に対応する拡散を構成出来るかという = 現在所、構成
 可能を尋ねる具体的な決める所まで研究が進んでいるが、
 最近福島氏等により系統的にマルコフ過程論に引用され始め
 $\mathcal{D}$ = Dirichlet 空間の方法が有益と思われる。一般に拡散 X
 が $m(dx)$ に対称な時は、そのグリーニ作用素 G_α は $L_2(\mathbb{R}^n, m)$
 の L_2 -resolvent であり、しかも $H_\alpha^\beta(u, v) = \beta(u - \beta G_{\beta+\alpha} u, v)$
 $\alpha \geq 0, \beta > 0, ((\cdot, \cdot))$ は $L_2(\mathbb{R}^n, m)$ の内積) とおけば、
 $H(u, u) = \lim_{\beta \rightarrow 0} H_0^\beta(u, u), H_\alpha(u, u) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} H_\alpha^\beta(u, u)$ が存在する。
 しかも $\mathcal{F} = \{u; u \in L_2(\mathbb{R}^n, m), H(u, u) < \infty\}$ とおけば任意の
 $u, v \in \mathcal{F}$ に対して $H_\alpha(u, v) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} H_\alpha^\beta(u, v), H(u, v) =$
 $\lim_{\beta \rightarrow \infty} H_0^\beta(u, v)$ が有限値と $(\cdot, \cdot)$ 存在し、

$$H_\alpha(u, v) = H(u, v) + \alpha(u, v)$$

となる。(福島 [3], [4], 志賀一孝 19 [4])。しかも任意の
 $\alpha > 0$ に対して $\forall f \in L_2(m, \mathbb{R}^n)$ に対して

$$H_\alpha(G_\alpha f, v) = (f, v), \quad v \in \mathcal{F}.$$

$\Rightarrow$ 福島氏は m のとり方に無関係に、すなわち時間変数に無関係に $H(u, v)$ が定まることを示している。そこでこの $H(u, v)$ と $\{\text{調和座標, エネルギー測度}\}$ の相関と関係性にあるかどうかの問題にたづね来る。Brown運動の場合は

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

とある。(この形の正確な意味については満洲 LiT または福島 [3])。また例 5.1 の X については $u, v \in \mathcal{D}(\sigma) \cap C_0^{(2)}(\mathbb{R}^n)$ に注意して、

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} u(a, 0) \frac{\partial}{\partial a} v(a, 0) da$$

とある。しかしこの場合も $\{\text{調和座標, エネルギー測度}\}$ の相関で $H(u, v)$ が定まっている。そこでこのように具体例では関係がわかっているか一般形およびその関係式をとり T -構成の問題はまた研究が進んでいく。

- [1] Blumenthal, R. and R. Gettoor: local time for Markov processes. Z. Wahr. verw. Geb, 3 (1964).
- [2] Dynkin, E. B.: Markov processes Moscow, 1963.
- [3] Fukushima, M.: A construction of reflecting barrier Brownian motions for bounded domains. Osaka J. Math. 4 (1967).
- [4] Fukushima, M.: On boundary conditions for multidimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities. to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [5] Hunt, G. A.: Markoff processes and potentials, 1, 2, 3, Illinois J. Math. 1 (1957), 2 (1958).
- [6] Ikeda, N.: On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problem. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 33 (1961).
- [7] Ito, K. and H. P. McKean: Diffusion processes and their sample paths. Berlin, 1965.
- [8] 伊藤 清 : 確率過程論; 岩波応用数学講座, 1957
- [9] 小林道正 : excessive function の drift による変換.
東京教育大 修士論文, (1968).
- [10] Kolmogorov, A. N.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. 104 (1931).
- [11] 溝畑 茂 : 偏微分方程式論, 岩波, 1965.
- [12] 本尾 実 : マルコフ過程の additive functional. Sem. on Prob. Vol. 15 (1965).
- [13] Motoo, M. and Watanabe, S.: On a class of additive functionals of Markov processes. J. Math. of Kyoto Univ. 4 (1965).
- [14] Shiga, T. and T. Watanabe: On Markov chains similar to the reflecting barrier Brownian motion. Osaka Jour. Math. 5 (1968).

- [15] SKorohod, A. V.: On homogeneous continuous processes that are martingales. Theory of prob. and its App. 8 (1963).
- [16] SKorohod, A. V.: On the local structure of continuous Markov processes. Theory of prob. and its App. 11 (1966).
- [17] Sato, K. and T. Ueno: Multi-dimensional diffusion and Markov process on the boundary. J. Math. of Kyoto Univ. 4 (1965).
- [18] 渡辺 信三: 京大確率論セミナー報告.