

Jacobian 問題に対する境界障害

東工大 理 岡 睦雄

§1. 問題提起.

K を $\text{ch } K = 0$ なる代数閉体とし, 2つの K -係数の多項式 $f(X, Y)$ と $g(X, Y)$ が Jacobian 条件

$$(1.1) \quad J(f, g) \equiv f_X g_Y - f_Y g_X = 1$$

を満たしていると仮定する. 次の予想は Jacobian 予想と呼ばれる.

予想 I. 上の条件下で, X, Y は f, g の多項式である.

そのような例としては, 次の変換の有限合成で得られる基本変換がある.

$$(i) \text{ (線型変換) } (X', Y') = (aX + bY + e, cX + dY + e')$$

$$\text{但し, } ad - bc \neq 0$$

$$(ii) (X', Y') = (X, Y + h(X)), \quad h: \text{多項式}.$$

基本変換に対し, 予想は正しいのは自明. Jung の定理によつて, 上の予想は次の様にも述べられる.

予想 II. 同上の下で, (f, g) は基本変換である.

この予想に関して、いろいろな部分的結果があるが、
 その中で特筆すべきは、Abyankar の結果である。

定理 ([Ab]). (f, g) が (1.1) を満たす時, $m = \text{degree } g$ と
 すれば, g の m 次斉次部分 $g_m(X, Y) = 0$ は 高々 2 個の根を
もつ.

従って, 予想 II は次の予想と同値。(後述)

予想 III. 与えられた m 次の多項式 g が, $g_m(X, Y) = 0$ の
根を 2 つもつとき, $J(f, g) = 1$ なる多項式 f は存在し
なす.

この草稿の目的は、与えられた g に対し、 g の Newton
 多角形がある条件 (境界から障害) をみたせば、予想 III が正
 しい事を示す事である。残念ながら、境界条件のみでは、予
 盾に到らないものが存在する。(§6, 注 IV). Abyankar の
 定理の別証明も与える。

§2. 擬斉次有理函数と Jacobian 問題

この章では Jacobian 問題を、有理函数について考え
 る。

定義 (2.1). 多項式 $f(X, Y)$ が $(a, b; d)$ 型擬斉次多項式
 とは、任意の $t \in \mathbb{K}$ に対し、 $f(t^a X, t^b Y) = t^d f(X, Y)$ が成
 立する時をいう。但し、 $ab \neq 0$ なら、 a, b は互に素な整

数, $ab=0$ なら, $(a, b) = (0, 1)$ か $(1, 0)$ と仮定。

例. $X^p Y^q (XY+1)$ は, $(1, -1; p-q)$ 型.

(a, b) を重さ, d を次数と呼ぶ。有理函数 $F(X, Y) = \frac{f(X, Y)}{g(X, Y)}$

が, $(a, b; d)$ 型擬斉次有理函数とは, f, g が共に (a, b)

を重さにもつ擬斉次多項式で, $d = \deg_{(a, b)} f - \deg_{(a, b)} g$

の時という。この時 $F(X, Y)$ は Euler の方程式:

$$(2.2) \quad d \cdot F(X, Y) = a \cdot X \cdot F_X(X, Y) + b Y \cdot F_Y(X, Y)$$

を満す。

補題(2.3). F, G が (a, b) を重さとする擬斉次有理函数で
 $J(F, G) = 0$ なるものとする。この時 $\exists C \in K$ で, $F^{\deg G}$
 $= C \cdot G^{\deg F}$ となる。([Ab], (17.4)).

補題(2.4). F が (a, b) 型なら, 一意的に次の形の因数
 分解がある: $F(X, Y) = C \cdot X^p Y^q \prod_{i=1}^t (X^{b_i} + c_i Y^a)^{v_i}$

定義(2.5) $X, Y, X^{b_i} + c_i Y^a$ etc. $\in F$ の因子, $p = \text{val}_X F$,
 $q = \text{val}_Y F$, $\text{val}_{\ell_i} F = v_i$ ($\ell_i: X^{b_i} + c_i Y^a$) で表わす。

次の補題はこの論文の鍵となる。

補題(2.6). $F(X, Y)$ を擬斉次有理函数, $\ell \in X, Y$ の
 $X^b + c Y^a$ ($c \neq 0$) の因子ととし, $\text{val}_{\ell} F = 0$ で, $d =$
 $\deg_{(a, b)} F \neq 0$ とする。この時 $J(\ell, F)$ は ℓ で割れる。
 i.e. $\text{val}_{\ell} J(\ell, F) = 0$.

証明. $\ell = X^b + c Y^a$ のとき示す。(残りも同様.)

$F(X, Y) = X^p Y^q \prod_{i=1}^m (X^b + c_i Y^a)^{n_i}$ とする. 仮定より.

(*) $d = pa + qb + \sum n_i \cdot ab \neq 0$, $c \neq c_i$ ($i=1, \dots, m$).

$J(\ell, X^b + c_i Y^a) = (c_i - c)ab X^{b-1} Y^{a-1}$ 等 c_i を使って直接計算すると,

$$J(\ell, F) \Big|_{\ell=0} = d \prod (c_i - c)^{n_i} X^{p+b-1} Y^{n_a} \neq 0.$$

すなわち, $\text{val}_\ell J(\ell, F) = 0$. q.e.d.

この補題に依りて, 次の Abhyankar の定理を証明しよう.

定理 (2.7). $h(X, Y) \in (a, b; d)$ 型の擬齊次多項式とし,

$a \geq b \geq 0$ とする. このとき $J(\phi, h) = 1$ なる擬齊次有理函数が存在する為の必要十分条件は, 次の通り.

(i) $h = \ell_1^p \ell_2^q$ と, ℓ_1, ℓ_2 は線型型式, $p \neq q$. あるいは,

(ii) $h = c \cdot Y^p (X + c' Y^a)^q$, $a \geq 2$, $c, c' \neq 0$, $p \neq q$.

(12.9) ~ (12.12), [Ab] 参照.)

証明. $h = X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2} \ell_3^{\alpha_3} \dots \ell_k^{\alpha_k}$, $\ell_i = X^b + c_i Y^a$ とする.

ϕ の存在を仮定し, $\phi = X^{\beta_1} Y^{\beta_2} \ell_1^{\beta_1} \dots \ell_k^{\beta_k} \dots \ell_{k+t}^{\beta_{k+t}}$ とし

う. 上の表現で, 当然 $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ($i \geq 3$) と仮定できる. まず次を示そう.

補題 (2.7.1). 1) $\alpha_i + \beta_i \geq 1$ if $\alpha_i > 0$

2) $\beta_i \geq 0$ if $\alpha_i = 0$.

まず, $\ell \in \text{val}_\ell h = 0$ なる因子とする. $\beta = \text{val}_\ell \phi \geq 0$

を示せばよい. 後に $\beta < 0$ として, $\phi = \ell^\beta \phi'$ とかくと,

$J(h, \phi) = J(h, l) \cdot \beta l^{\beta-1} \cdot \phi' + J(h, \phi') l^\beta = 1$
 補題(2.6) より, 第1項の val_l は r 度 $\beta-1$, 第2項は β 以上. 従って, $0 = \beta-1 < 0$ なる矛盾に到る.

次に, $l_i (\alpha_i > 0)$ とする. $\psi_i = \phi^{\alpha_i} h^{-\beta_i}$ と考える.

Case 1. $\deg \psi_i = \alpha_i \cdot \deg \phi - \beta_i \cdot d = 0$ のとき, 仮定より $\deg \phi = a+b-d$ だから, $\frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\deg \phi}{d} = \frac{a+b}{d} - 1 > -1$. 従って, $\alpha_i + \beta_i > 0$ と得る.

Case 2. $\deg \psi_i \neq 0$ とあれば, $J(\psi_i, h) = \alpha_i \phi^{\alpha_i-1} h^{-\beta_i}$ より, $\text{val}_{l_i} J(\psi_i, h) = \beta_i(\alpha_i-1) - \beta_i \alpha_i$ とあるから補題(2.6)を再び使えば, $J(\psi_i, h) = J(\psi_i, l_i) \alpha_i l_i^{\alpha_i-1} (h/l_i^{\alpha_i}) + J(\psi_i, h/l_i^{\alpha_i}) l_i^{\alpha_i}$ より, $-\beta_i = \alpha_i - 1$ q.e.d.

また(2.7.1)に於て, 次の不等式を得る.

$$(2.7.2) \quad a+b = \deg \phi + \deg h \\ \geq (\alpha_1 + \beta_1) a + (\alpha_2 + \beta_2) b + (k-2) ab$$

(I) $k=2$ とする. この時, $h = X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2}$. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ であれば, $J(X^{1-\alpha_1} Y^{1-\alpha_2}, X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2}) = (\alpha_2 - \alpha_1)$ より, $\frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)} X^{1-\alpha_1} Y^{1-\alpha_2}$ が求める解. $\alpha_1 = \alpha_2$ の時, $\alpha_1 > 0$ だが, Iの補題と不等式により $\phi = c \cdot X^{1-\alpha_1} Y^{1-\alpha_2}$ の形. しかし, この場合,

$J(\phi, h) = 0$ となる, 不可能.

(II) $k=3$. (2.7.2) と仮定 $a \geq b \geq 0$ より, $b=1$ かつ

$\alpha_1=0$ かつ $\alpha_2=0$. $b=1$ かつ $\alpha_2=0$ のとき, $a=1$ となる.

1). $h = X^{\alpha_2} l_3^{\alpha_3}$, l_3 : 線型 と なり. (I) と 同 じ 結 論 を 得
 る. $b=1$, $a_1=0$ と せ, $h = Y^{\alpha_2} (X + c_3 Y^a)^{\alpha_3}$ と なり,
 $\phi = c Y^{1-\alpha_2} (X + c_3 Y^a)^{1-\alpha_3}$ と す れ ば, $\alpha_2 \neq \alpha_3$ の 解 が 得 ら
 れる. $\alpha_2 = \alpha_3$ の 時, $J(\phi, h) = 0$ と なり 解 は 存 在 し な い.
 (III). $k=4$ と せ. (2, 2, 2) の 時 $a=b=1$ で, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
 を 得 る. $h = l_3^{\alpha_3} l_4^{\alpha_4}$ で l_i は 線 型 た か ら, (I) に 帰 着
 し て, 定 理 の 証 明 を 終 る.

§3. ニュートン多面体と Jacobian 問題

多項式 $f(X, Y) = \sum a_{\nu, \mu} X^{\nu} Y^{\mu}$ に対 し, $N(f)$ を $a_{\nu, \mu} \neq 0$
 なる (ν, μ) の 張 る 凸 多 面 体 と し, ニュートン多面体 と 呼 ぶ.
 $N(f)$ の 境 界 上 の 1-単 体 (又 は 頂 点) で, 原 点 と 一 直 線 上 に
 ない も の を 考 え, γ の 和 を $\bar{N}(f)$ で 表 わ す. $\Delta \in \bar{N}(f)$
 に 対 し, $f_{\Delta}(X, Y) = \sum_{(\nu, \mu) \in \Delta} a_{\nu, \mu} X^{\nu} Y^{\mu}$ と す る. $\dim \Delta = 1$ な ら
 ば, 一 意 的 に $(a, b; d)$ が 存 在 し て, f_{Δ} は $(a, b; d)$ 型
 $(d > 0)$ と な る. (f, g) を $J(f, g)$ な る 多 項 式 と す
 る. (a, b) を 固 定 し て, weights と す る. f, g の 対 応 す る
 gradation は $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, $g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j$ と か く. $J(f_i, g_j)$
 は type $(a, b; i+j-a-b)$ に な る 事 より, $J(f, g)$ の
 gradation は,

$$(3.1). \quad J(f, g)_k = \sum_{i+j=k+a+b} J(f_i, g_j).$$

特に, $J(f, g) = 1$ となり

$$(3.2) \quad J(f_m, g_m) = 0 \quad \text{if} \quad n+m \neq a+b.$$

今 $g_m = h^e$ ($e > 0$) と書き, h は多項式の中であるとして
 する. $r = \deg_{(a,b)} h$. $\mathcal{R}_{(a,b)}$ を, 有限個の (a, b) を重さとする
 擬斉次有理函数の和で表せる有理函数の全体とする.

命題 (3.3). 任意の自然数 N に対し, $\hat{g} \in \mathcal{R}_{(a,b)}$ が存在し
て, $\deg(g - \hat{g}^e) < -N$ となる. 又, 同様の $\hat{g}$ に対
し, $\tilde{g} \in \mathcal{R}_{(a,b)}$ が存在して, $\deg(1 - \tilde{g}^r \hat{g}) < -N$
なるものが存在する.

証明. $\hat{g} = \hat{g}_r + \hat{g}_{r-1} + \cdots + \hat{g}_{-n}$ とおき, $\hat{g}_r = h$. 以下上
 から $\hat{g}^e = g$ を解けばよい. 又 $\tilde{g}$ に関しては $\tilde{g}_{-r} = h^{-1}$ とお
 き, $\tilde{g} \hat{g} = 1$ を上から順次とて, 適当な所までやめればよい.

定理 (3.4) (境界障害) 同上の記号で, 擬斉次有理函数 ϕ
が存在して, $J(\phi, g_m) = 1$ となる.

証明. $n+m = a+b$ ならば, $J(f_m, g_m) = 1$ となり, 自明.
 $n+m > a+b$ ならば, $J(f_m, g_m) = 0$ だが, 補題 (2.3) と,
 h が巾-自由 (square-free) であり, $f_n = c_g h^e$ ($e = n/r$)
 とかける. $f^{(2)} = f - c_g \hat{g}^e \in \mathcal{R}_{(a,b)}$ とすれば,

$J(f^{(2)}, g) = 1 + \text{lower degree}$ の命題 (3.3) と容易な計
 算により, 4 行ける. $\deg f^{(2)} < \deg f$ であるから
 , $f^{(2)}$ の最高次を考え, 同様の操作を繰り返される.

従って, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda r > a+b-m$ なる最小の λ とすれば,
 常数 $c_0, \dots, c_s$ があって, $f^{(s)} = \sum_{i=0}^s c_i \hat{g}^i + f$ とすれば
 (但し, $i < 0$ のとき, $\hat{g}^i$ は $\hat{g}^{-i}$ とする.) (1) $\deg f^{(s)} < \lambda r$
 (2) $J(f^{(s)}, g) = 1 + (\text{lower degrees})$ と書ける。 λ の級
 定より, $\deg f^{(s)} = a+b-m$ で, $(f^{(s)})_{a+b-m} = \phi$ とすれば,
 $J(\phi, g_m)$ が成り立つ。 q.e.d.

系 (3.5) $\forall \Delta \in \partial N(g)$ に対し, $\exists \phi \in R_\Delta$ で $J(\phi, g_\Delta) = 1$
なるものがある。 (ただし, $R_\Delta = R_{(a_\Delta, b_\Delta)}$, (a_Δ, b_Δ) は Δ の重さ).

系 (3.6). $\Delta \in \partial N(g)$ が正の重さをもてば, g_Δ は, 定理
(2.7) の形 (あるいは X と Y とよりかえた) に限る。

§4. 予想 III $\Leftrightarrow$ 予想 II

予想 II から, 予想 III は自明であるから, 予想 III を仮定し
 て, 予想 II を示そう。 $(f, g) \in J(f, g) = 1$ なる多項式対
 とする。 $m = \deg g$ とし, m に関する帰納法で示す。
 $m=1$ なら, 座標変換で, $g = Y$ とし得る。このとき,
 $J(f, g) = f_X = 1$ i.e. $f = X + \varphi(Y)$, φ : 多項式と
 なり O.K. $m > 1$ ならば, g_m (m 次斉次部分) は Y^m と仮定
 しよう。 $N(g)$ を考え, $(0, m)$ の端にもつ 1-単体 Δ と
 し, Δ の重さ (a, b) とすれば, 定理 (3.7) と定理 (3.4) に
 より, $g_\Delta = cY^p(X + c'Y^a)^q$ となる。 ($b=1, m=p+aq$).

従って, $X' = X + c'Y^a$, $Y' = Y$ なる座標変換を行えば, あきらかに, $\deg g(X', Y') < m$ となって, 帰納法の仮定より証明を終る.

§5. 負の重さをもつ擬斉次多項式(有理函数)の場合.

この章では, §2 で扱わなかった場合を扱う。すなわち $h(X, Y) \in \text{monomial}$ でない擬斉次多項式で, その重さ (a, b) が $a-b \leq 0$ の時を考える。 $d = \deg(a, b)$ とし.

(I) $(a, b) = (1, -1)$ (or $(-1, 1)$) の時は特別なので, 先に扱う。 $h(X, Y)$ は $X^p Y^q \prod_{i=1}^r (XY + c_i)^{v_i}$ と因数分解される。 $p \neq q$ i.e. $d = p - q \neq 0$ なら, $\phi = cXY/h$ として解が得られる事は $J(\phi, h) = J(XY, h) \frac{c}{h} = (2-p)c$ より明らか。 $p = q$ の時は, ϕ が存在するとすれば, $\phi = (XY)^p \prod (XY + d_j)^{m_j}$ とかけるが, この時 $J(\phi, h) = 0$ となるので不可能。すなわち.

定理(5.1) $(a, b) = (1, -1)$ の時, $d \neq 0$ の時, 又 $d = 0$ の時に限って, ϕ が存在して, $J(\phi, h) = 1$ となる。

(II) 以下 $(a, b) \neq (1, -1)$ の場合を考える。

仮定(5.2) $a \geq 0 > b$, $(a+b) \cdot d > 0$, $d < 0$

$h(X, Y)$ は多項式であるから, $N(f)$ は線分である。その両端を $P = (\alpha, \beta)$, $Q = (\alpha', \beta')$ ($\alpha < \alpha'$) とする。

$$\tilde{\pi}(X, Y) = X^\alpha Y^\beta \prod_{i=1}^k (X^{b_i} Y^a + c_i)^{\nu_i} = X^{\tilde{\alpha}} Y^{\tilde{\beta}} \prod (Y^a + c_i X^b)^{\nu_i}$$

とする. ($\tilde{\alpha} = \alpha - \sum \nu_i b_i$). ϕ の存在を仮定して,

$$\phi = c X^\gamma Y^\delta \prod_{i=1}^{k+t} (X^{b_i} Y^a + c_i)^{\mu_i} \text{ とする.}$$

主張: $\nu_i + \mu_i \geq 1$ とくに, ϕh は Laurent 多項式.

この証明は (2.2.1) の証明と全く同様にできる. (省略).

今 $\psi = \phi h$ とおくと, ψ は Laurent 多項式で $J(\psi, h) = h$ とみえる. $M(\psi)$ の左端を $P' = (\varepsilon, \delta)$ 右端を (ε', δ') とする. $(1, 1)$ を通り, $\overline{PQ}$ に平行な直線を L とすれば, $\deg(a, b) \psi = a + b$ より, P', Q' は L 上にある事は自明. L と OP, OQ の交点を各 P'', Q'' とする.

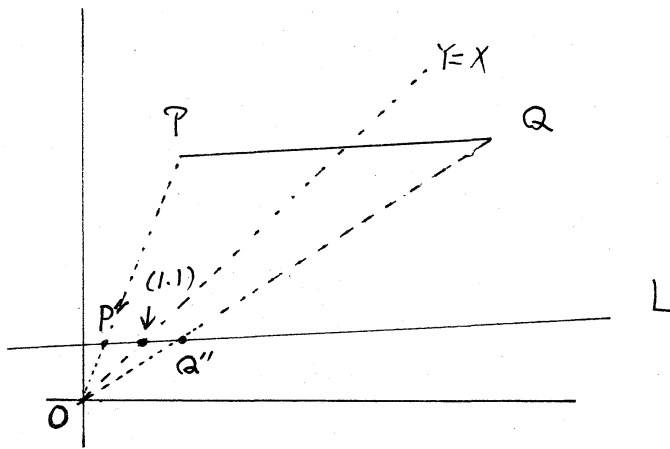
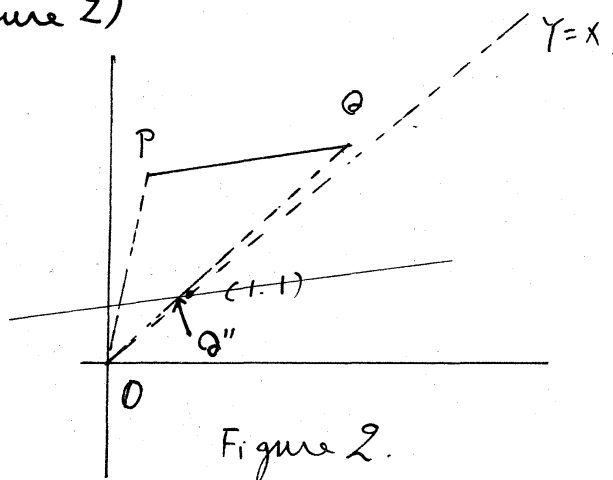


Figure 1.

P' が P'' でなければ, $J(\psi, h) = h$ で, $J(XY, X^\alpha Y^\beta) = (\beta - \alpha) X^\alpha Y^\beta$ である事より, $P' = (1, 1)$. 又 P' が P'' と一致する為には, P'' が整数点である事が必要. Q' に対しても同様の事がいえる. 又, $\psi = c X^{\alpha+\gamma} Y^{\beta+\delta} \prod_{i=1}^{k+t} (X^{b_i} Y^a + c_i)^{\nu_i + \mu_i}$

で, $k+t \geq k \geq 1$ である事より, $P' = Q' = (1, 1)$ になる事は不可。特に, $\alpha' < \beta'$ のとき, Q'' は整数点にはならない。(Figure 2)



又 P' が整数点となるのは, $a=0$ で, P が Y 軸 (i.e. $\alpha=0$) の時に限る。この時 $h = Y^{\beta} \prod_{i=1}^k (X+c_i)^{\nu_i}$ となるが, $Q' = (1, 1)$ なるので, $k=1$ でなければ不可能。すなわち,

定理 (5.2) $a \geq 0 > b$, $(a+b)d > 0$, $d < 0$ のとき, (i) $\alpha' < \beta'$ の時, $a = \alpha = 0$, $k=1$ の時, 又その時に限って, $J(\phi, h) = 1$ は解をもつ。

(ii) $\alpha' > \beta'$ のときは, Q'' が整数点 i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{N}$ で,

$(1+\lambda a)\alpha' = (1-\lambda b)\beta'$ なるものが存在する λ が必要条件となる。

注意 I. (ii) の時, Q'' が整数点だけでは十分条件でない。

例えば, $h(X, Y) = X^{\alpha} Y^{\beta} (X^{b_1} Y^a + c_1)^{\nu_1} (X^{b_2} Y^a + c_2)^{\nu_2}$ で,
 $(1+2a)\alpha' = (1-2b)\beta'$ ($\alpha' = \alpha + (\nu_1 + \nu_2)b_1$, $\beta' = \beta + (\nu_1 + \nu_2)a$) と仮定する。この時,

$$(v_1 c_1 + v_2 c_2) \begin{vmatrix} 1-2b & 1+2a \\ \alpha'+b & \beta'-a \end{vmatrix} + (c_1 + c_2) \begin{vmatrix} 1-b & 1+a \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 0$$

の場合に限り、 ϕ が存在し、 $\phi = c_0 XY(X^{1/b}Y^a + c_1)(X^{1/b}Y^a + c_2)$ である。

注意 II. $(a+b)d < 0$ の場合は、定理の証明中の主張:

$v_i + \mu_i \geq 1$ が成立しないので、更に複雑である。例えば、

$$h(X, Y) = X(X^3 Y^2 + c_1)^2 \quad (a=2, b=-3, d=2) \text{ のとき}$$

で、 $\phi = -3X^2 Y(X^3 Y^2 + c_1)^{-3}(X^3 Y^2 + 3c_1)$ が解。

§6. 境界障害.

$(f, g) \in J(f, g) = 1$ なる多項式の対とし、基本変換でなると仮定しよう。そのとき、適当な座標変換をくりかえせば、 $m = \deg(g)$ で、 $g_m = X^p Y^q$ ($p > q > 0$) と仮定できる。定理(2.7)より、 $N(g)$ は長方形 $OPQR$ の中に入らなければならない。

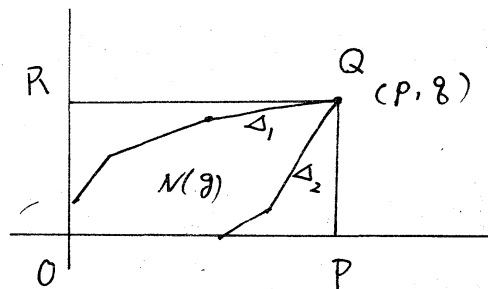


Figure 3

この章では、§5 の結果を、 $N(g)$ の条件として、翻訳しよう。まず、補題(2.3)と、(3.2)より、

補題(6.1) f, g が定数項を含むと仮定すると、 $N(f)$ と

$N(g)$ は相似.

次に $\Delta_1, \Delta_2 \in \text{Figure 3}$ の中の 1-単体とする。 $R \notin N(g)$ と仮定する。(これは $X' = X + c_1, Y' = Y$ の形の座標変換で、いつでもできる。) $(a_i, b_i; d_i) \in \Delta_i$ の重みとすれば、
 $-a_1 \geq 0 > -b_1, (a_1 + b_1)d_1 > 0$. 又 $p > q$.
 よリ、定理(5.2)は次の事になり得る。

定理(6.2). (1) $\Delta_1 \in N$ が存在して, $(1+\Delta_1, 1)g = (1+\Delta_1, 1)p$
 (2) $a_2 > 0 > b_2, a_2 + b_2 \leq 0$.

注意 III. $J(f, g) = 1$ なる g は当然 K^2 から K^1 の写像として、臨界点をもたないが、その逆は正しくない。たとえば、 $g = X + \sum_{i=1}^k c_i (X^a Y^b)^i$ ($a \geq 2, b \geq 1$) は臨界点をもたないが、 $J(f, g) = 1$ なる f を持たない。なぜなら g が、基本変換の片割れでない事は自明だし、 $N(g)$ の $(1, 0)$ と (ka, ka) と端とする 1-単体は明らかに、障害をもつから。

(6.3): 一般に、 $J(f, g) = 1$ 時、 $g_m \sim X^p Y^q$ ($p+q=m, p>q>0$) の時、 $N(g) \ni (0, 1), (1, 0)$.

なぜなら、 f, g のいずれかは X, Y の独立な一次項を含む、 $N(f)$ と $N(g)$ は相似であるから。

注意 IV. 定理(6.2)や(3.5)は $N(g)$ の各単体に関する

る障害をのべたが, $\bar{N}(g)$ の全体の構造よりくる. 障害もあるのでは分りかたない. $\text{degree } g = m$, $g_m = x^p y^q$
 $(p > q > 0)$ と仮定し, 各 $\Delta \in \bar{N}(g)$ に対し, $f_\Delta = h_\Delta^{e_\Delta}$
 と書く. ただし, A_Δ は square-free で, $e_\Delta \geq 1$ なる
 整数. $\{e_\Delta\}_{\Delta \in \bar{N}(g)}$ の最大公約数 を $e(g)$ とする.

定理(6.4) $e(g) > 1$.

証明 各 $\Delta \in \bar{N}(g)$ に対し, (6.1) によ, Δ に対応する
 $N(f)$ の単体 Δ' とする. (3.2) より, $f_{\Delta'} = c_\Delta \cdot h_\Delta^{e_\Delta}$
 とかけ, $a_\Delta \cdot \deg_\Delta h_\Delta = \deg_{\Delta'} f_{\Delta'}$. n は f の次数とすれば,
 $a_\Delta = \deg_\Delta h_\Delta^{-1} \cdot \deg_{\Delta'} f_{\Delta'} = \frac{n}{m} \cdot e_\Delta$. したがって, e_Δ
 は m_1 の約数である. ただし, $n/m = n_1/m_1$, $(n_1, m_1) = 1$,
 従って, $e(g) = 1$ と仮定すれば, $m_1 = 1$. i.e. $m \mid n$ と
 得る. しかしながらこれは古典的議論より矛盾: $f = c \cdot g^{\frac{n}{m}}$
 $= f - c g^{\frac{n}{m}}$ と f' とすれば, $J(f', g) = 1$ で, $\deg f' < \deg f$.
 有限回で矛盾に到る.

例 $g = X + XY^2 \Rightarrow e(g) = 1$ で, 相移の f は存在しない.

例 $g = X^n (X^2 Y + 1)^{3n} + X^{2n} (XY + 1)^{4n} - X^{6n} Y^{4n}$

$e(g) = n$ で, $\bar{N}(g)$ は, 境界上には, 障害がない. ただし,
 g は沢山の臨界点をもつ.

筆者は, 境界上の局所, 大域にわたる障害も持たず, か

2. 臨界点をもたない, 多項式 $g(X, Y)$ の例?, 基本変換の相棒でないものを知らない。詳細は [O] を見てください。

文献

- [Ab] S.S. Abhyankar, Expansion techniques in Algebraic Geometry, Tata Inst. Fundamental research 1977.
- [J]. H.W.E. Jung: Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. 184 (1942), 161-174.
- [B-C-W] H. Bass, E.H. Connell, D. Wright: The jacobian conjecture, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 7, 1982, 287-330
- [O] M. Oka, On the boundary obstructions to the jacobian problem, 準備中.