

Non-vanishing of the value of L -functions attached to primitive forms at a fixed point on the critical line

広島大学大学院工学研究科 市原由美子 (Yumiko Ichihara)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1 はじめに

$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の $\mathbb{Q}$ -有理点全体は有限生成アーベル群であることが Mordell の定理によって知られており、その階数は Mordell-Weil 階数と呼ばれており、BSD 予想 (Birch and Swinnerton-Dyer conjecture) によって対応する L -関数 $L(E, s)$ の関数等式の折り返しの点 ($s = 1$) における零の位数と一致していると予想されている。また、楕円曲線 E の導手を N とすると、 L -関数 $L(E, s)$ に対して重さが 2 の自明な指標を持つ $\Gamma_0(N)$ に関する primitive form f に付随する L -関数 $L_f(s - 1/2)$ が有限個の Euler factor を除いて一致している。従って BSD 予想への興味から $s = 1/2$ における $L_f(s)$ の零の位数に興味がある。特に位数が 0、つまり non-vanishing となる場合に関しては 1995 年以降に様々な L 関数に対して多くの結果が出されており、それらには次の Duke の結果が大きな影響を与えている。

定理 (Duke [4], 1995). χ を mod q の primitive な Dirichlet 指標とする。 N を q と互いに素な素数とする。十分大きな $N_0 = N_0(q)$ と絶対定数 C が存在し、 $N > N_0$ に対して次が成立する。

$$\#\{f \in B_2(N) \mid L_f(1/2, \chi) \neq 0\} > \frac{CN}{(\log N)^2}$$

ここで $B_k(N)$ は重さ k の $\Gamma_0(N)$ に関する cusp form 全体の空間の直交基底であり、特にこの定理の仮定の下では $B_2(N)$ は primitive form 全体と取ることができる。

Duke と同じ条件で χ が自明な指標の場合、Duke の結果は Kowalski and Michel [11] によって改良されている。

また、零の位数が 0 以外の場合も当然調べられるべきものである。零の位数の upper bound は Mestre [13] や R. Murty [14] によって Wiel の明示公式を利用した研究がされ、2000 年には Kowalski, Michel and VanderKam [12] によって重さ 2 の $\Gamma_0(N)$ に関する primitive form について N が十分に大きい素数であれば 99% の primitive form f に対して $L_f(s)$ の $s = 1/2$ における零の位数が 4 以下であることを示されている。

2 cusp form

cuspidal form について基礎的な情報をまとめておく。 k を偶数とし、 N を自然数として、重さ k でレベル N の $\Gamma_0(N)$ に関する cuspidal form 全体の空間を $S_k(N)$ とする。つまり上半平面で定義される関数 f で $\gamma \in GL_2(\mathbb{R})^+$ に関する作用を

$$(f|_k \gamma)(z) = (\det \gamma)^{k/2} (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + d}{cz + d}\right), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とした時、

$$\gamma \in \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) ; c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

の作用について不変で cuspidal で 0 となる正則関数全体を指す。cuspidal form f は Fourier 級数展開でき、

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f,\infty}(n) e^{2\pi i n z}$$

と書くことにする。これを「 f の ∞ における Fourier 級数展開」と呼ぶ。 $S_k(N)$ には Hecke 作用素が作用しており、その同時固有関数で $a_{f,\infty}(1) = 1$ としたものを normalized Hecke eigenform と呼ぶ。また $S_k(N)$ の内積を

$$\langle f, g \rangle_N = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}} f(z) \overline{g(z)} y^{k-2} dx dy, \quad (z = x + iy)$$

として定義する。 $S_k(N)$ の直交基底として normalized Hecke eigenform を取ることができる ([15] Theorem 4.5.4)。

N の約数 M について $S_k(M)$ は $S_k(N)$ の部分空間である。 $M \mid N$ で $M \neq N$ なる $S_k(M)$ について、その元 f に対して $f|_\ell$ を

$$f|_\ell = f|_k \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定義する。任意の $\ell \mid N/M$ について $f|_\ell$ は $S_k(N)$ に入る。言い換えれば、この対応で $S_k(N)$ には N より小さいレベルの cuspidal form で表せるものとそうでないものが入っていることになる。 N より小さいレベルからくるもの、つまり $f \in S_k(N)$ について、 $M \mid N$ ($M \neq N$) と $\ell \mid N/M$ と $h \in S_k(M)$ が存在して $f = h|_\ell$ と書ける時、 f を old form と呼ぶ。また old form の空間

$$\{f|_\ell \mid f \in S_k(M), \ell \mid N/M, M \mid N (M \neq N)\}$$

の直交補空間に入るものを new form と呼ぶ。normalized Hecke eigen new form を今後 primitive form と呼び、 $H_k(M)$ を重さ k の M に関する primitive

form 全体とする。このとき $S_k(N)$ の直交分解を

$$S_k(N) = \bigoplus_{M|N} \bigoplus_{f \in H_k(M)} \langle f|_\ell; \ell | N/M \rangle$$

と書くことができる。これは [8] に言及されている。実際の証明は [2] [16] による。今後 $B_k(N)$ は $H_k(N) \subset B_k(N)$ となるように取ることにする。

3 背景

楕円曲線の L -関数は重さ 2 の primitive form の L -関数に対応する。既に言及したように Duke の結果では

$$\#\{f \in B_2(N) \mid L_f(1/2, \chi) \neq 0\}$$

の lower bound が示されているが、 N は 素数 と制限されているので $B_2(N)$ と $H_2(N)$ とは一致している。しかし、一般的には $B_k(N)$ として $H_k(N)$ を取ることはできない。

Duke の結果の後、Akbari や Kamiya によって次が示された。

定理 (Akbari [1], 1999). χ を mod q の primitive な Dirichlet 指標とする。 N を q と互いに素な 素数 とする。十分大きな $N_0 = N_0(q, k)$ と正定数 $C = C(k)$ が存在し、 $N > N_0$ に対して

$$\#\{f \in H_2(N) \mid L_f(1/2, \chi) \neq 0\} > \frac{CN}{(\log N)^2}$$

が成立する。

定理 (kamiya [9], 2000). χ を mod q の primitive な Dirichlet 指標とする。 y は実数、 N を q と互いに素な 自然数 とする。十分大きな $N_0 = N_0(q, |y|, k)$ と絶対定数 C が存在し、 $N > N_0$ に対して

$$\sum_{f \in \mathcal{F}, L_f(1/2+iy, \chi) \neq 0} |a_{f, \infty}(1)|^2 \geq \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} \frac{C}{\log N}$$

次が成立する。ここで $\mathcal{F}$ は $S_k(N)$ の正規直交基底。

kamiya の結果を正規直交基底ではなく、直交基底である normalized Hecke eigenform 全体 $\mathcal{F}' = \{g\}$ で書き直してみる。 $f = g/\sqrt{\langle g, g \rangle}$ として Kamiya の結果を用いて、

$$\sum_{g \in \mathcal{F}', L_g(1/2+iy, \chi) \neq 0} \frac{1}{\langle g, g \rangle} \geq \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} \frac{C}{\log N}$$

が得られる。Banks [3] により $GL(3)$ の L -関数の Siegel の零点の非存在が示されているので、Hoffstein and Lockhart [5] の結果と合わせると g が new form であれば

$$\langle g, g \rangle \gg_k \frac{N}{\log N} \quad (1)$$

であることが分かっている (Hoffstein and Lockhart の論文での内積の定義と本稿の内積の定義は $\text{vol}(\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H})$ のズレがあることを注意しておく)。以上より次が分かる。

定理 (kamiya [9], Banks [3], Hoffstein-Lockhart [5]). χ を mod q の primitive な Dirichlet 指標とする。実数 y を固定して、 N を q と互いに素な 自然数 とする。

$$M > \max_{f \in B_k(N) - H_k(N)} \frac{1}{\langle f, f \rangle}$$

とすれば、十分大きな $N_0 = N_0(q, |y|, k)$ と正定数 $C = C(k)$ が存在し、 $N > N_0$ に対して

$$\#\{f \in B_k(N) \mid L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0\} > \frac{C}{\log N} \min \left\{ \frac{N}{\log N}, \frac{1}{M} \right\}$$

が成立する。

BSD-予想の観点に立てば $H_k(N)$ に興味があるので、Akbari の結果を一般の自然数 N に拡張することを考える。

4 L -関数

まず保型 L -関数の定義や性質を紹介する。 k と N はそれぞれ偶数と自然数として、 $f \in S_k(N)$ は normalized Hecke eigenform とする。 f の Fourier 係数 $a_{f,\infty}(n)$ に対して $\lambda_{f,\infty}(n) = a_{f,\infty}(n)/n^{(k-1)/2}$ と置き、 $\Re(s) > 1$ で L -関数を

$$L_f(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{f,\infty}(n) \chi(n)}{n^s}$$

と定義する。ここで χ は mod q の Dirichlet 指標で $(q, N) = 1$ である。この L -関数は全 $\mathbb{C}$ -平面に正則に解析接続され、次の関数等式を持つ。

$$\Lambda_N(s; f, \chi) = i^k C_\chi \Lambda_N(1-s; f|_k \omega_N, \bar{\chi}), \quad (2)$$

ここで

$$\Lambda_N(s; f, \chi) = \left(\frac{q\sqrt{N}}{2\pi} \right)^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L_f(s, \chi)$$

であり、

$$\omega_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}.$$

で、 C_χ は大きさ 1 の数。また

$$(f|_k \omega_N)(z) = (f|_k \sigma_0)(z), \quad \sigma_0 = \sigma_{0,N} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{N}^{-1} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix}$$

が成立している。 $f|_k \omega_N$ の Fourier 級数展開を「 f の 0 における Fourier 級数展開」と呼び、

$$(f|_k \omega_N)(z) = (f|_k \sigma_0)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f,0}(n) e^{2\pi i n z} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{f,0}(n) n^{\frac{k-1}{2}} e^{2\pi i n z}$$

と書くことにする。 f が primitive form であれば

$$(f|_k \omega_N)(z) = (f|_k \sigma_0)(z) = \pm f$$

となる。

5 Duke の結果の証明方法

$f \in H_k(N)$ に対する $L_f(1/2 + iy, \chi)$ の non-vanishing を考える前に、まず Duke, Akbary, Kamiya の証明のストーリーを紹介する。Cauchy の不等式によって

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{f \in B_k(N)} \frac{L_f(1/2 + iy, \chi)}{\langle f, f \rangle} \right|^2 \\ & \leq \sum_{\substack{f \in B_k(N) \\ L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0}} \frac{1}{\langle f, f \rangle} \sum_{f \in B_k(N)} \frac{|L_f(1/2 + iy, \chi)|^2}{\langle f, f \rangle} \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。 $M \geq \max\{1/\langle f, f \rangle_N\}$ とすれば、右辺の最初の和は

$$\sum_{\substack{f \in B_k(N) \\ L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0}} \frac{1}{\langle f, f \rangle} \ll_k \#\{f \in B_k(N) \mid L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0\} M \quad (4)$$

と評価される。ここで、Duke の結果が出た当時はまだ Banks の結果はなかったが、 N が素数であれば $f \in H_2(N) = B_2(N)$ は $GL(1)$ からのリフトではなく (1) が成立することが分かっており、 $M = \log N/N$ とすることができたことを注意しておく。従って左辺の first moment

$$\sum_{f \in B_k(N)} \frac{L_f(1/2 + iy, \chi)}{\langle f, f \rangle} \quad (5)$$

の lower bound と右辺の second moment

$$\sum_{f \in B_k(N)} \frac{|L_f(1/2 + iy, \chi)|^2}{\langle f, f \rangle} \quad (6)$$

の upper bound を得ることができれば (3) と (4) と合わせて結果が得られることが分かる。(5), (6) は近似関数等式と Petersson's formula を用いて調べられる (そのために (3) において内積で割ったものを扱っている)。近似関数等式は色々なタイプがあるが、

$$L_f\left(\frac{1}{2} + iy, \chi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{f,\infty}(n)\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}+iy}} e^{-(\frac{n}{x})^h} - I \quad (7)$$

を利用する。ここで I は

$$I = \frac{i^k C_\chi}{2\pi i} \int_{(d)} \left(\frac{4\pi^2}{q^2 N}\right)^{s+iy} G_k\left(s + \frac{1}{2} + iy\right) X^s \frac{\Gamma\left(1 + \frac{s}{h}\right)}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{f,0}(n)\bar{\chi}(n)}{n^{\frac{1}{2}-s-iy}} ds.$$

である。右辺の積分路の (d) は $d - i\infty$ から $d + i\infty$ への積分 (d は実数とする) を意味する。また $G_k(s)$ は $L_f(s, \chi)$ の関数等式からくる Gamma factor で、

$$G_k(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - s\right)}{\Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right)}$$

である。 h や d の取り方は今は深く考えないでおけば、この表示を用いることによって first moment や second moment が $\lambda_{f,\infty}(n)$, $\lambda_{f,0}(m)$ やそれらの積の和、和は $f \in B_k(N)$ を互るもの、で表せることが見て取れる。それらには次の Petersson's formula

$$\begin{aligned} \Delta_{k,N}(m, n; \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_f \frac{\overline{\lambda_{f,\mathbf{a}}(m)} \lambda_{f,\mathbf{b}}(n)}{\langle f, f \rangle_N} \\ &= \delta_{m,n} \delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \\ &\quad + 2\pi i^{-k} \sum_{c \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})} c^{-1} S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(m, n; c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

を用いることができる (Iwaniec [7] の section 4.2 を参照)。ここで $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は ∞ 又は 0 をとる。 $\delta_{*,\dagger}$ は Kronecker の記号、 J_{k-1} は J -Bessel 関数で、 $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ は Kloosterman 和を意味していて、

$$S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(m, n; c) = \begin{cases} S(m, n, \ell N) & \text{if } \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ S(m\bar{N}, n, \ell) & \text{if } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \end{cases}$$

であり、 $\bar{N}$ は $N\bar{N} \equiv 1 \pmod{\ell}$ なるものとする。また (8) の右辺の c に関する和は次を互る。

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \{c = \ell N : \ell \in \mathbb{N}\} & \text{if } \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ \{c = \ell\sqrt{N} : \ell \in \mathbb{N} \text{ and } (\ell, N) = 1\} & \text{if } \mathbf{a} \neq \mathbf{b}. \end{cases}$$

Kloosterman 和や J -Bessel 関数の評価はよく分かっているので、first moment (5) については asymptotic formula が得られて lower bound が分かり、second moment (6) については upper bound が得られる。従って (3) と (4) から

$$\#\{f \in B_k(N) \mid L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0\}$$

の lower bound が得られる。Duke の証明のストーリーはこのような論法による。3章で紹介した Akbary や Kamiya の結果も基本的にこの証明方針である。Kamiya の結果は $\max\{\langle f, f \rangle\}$ が old form に対して評価できないので M を具体的に取れず、1st Fourier 係数の和の lower bound という結果になっている。 N が素数の場合は $S_k(N)$ の old form は $S_k(1)$ からくるもののみなので、Akbary は (4) を old form と new form に分けて、old form のノルムを評価し、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f \in B_k(N) \\ L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0}} \frac{1}{\langle f, f \rangle} &< \sum_{\substack{f \in H_k(N) \\ L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0}} \frac{1}{\langle f, f \rangle} + \sum_{\substack{f \in B_k(N) - H_k(N) \\ L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0}} \frac{1}{\langle f, f \rangle} \\ &\ll_k \#\{f \in B_k(N) \mid L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0\} \frac{\log N}{N} + \dim S_k(1) \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

を導いて結果を得た。

この章の内容に関しては Kamiya [10] の記事も興味深いので参照されたし。

6 目的と問題

さて3章の最後に述べたように、 $f \in H_2(N)$ に関しての $L_f(1/2)$ の non-vanishing について考察したい。Duke の論法を用いるのであれば Petersson's formula が $S_k(N)$ の直交基底 $B_k(N)$ を互るので、Akbary のように一旦 $B_k(N)$ の和を取り、そこから $H_k(N)$ の和を取り出すという操作は避けられない。しかし、もし $H_k(N)$ の和を $B_k(N)$ の和から $B_k(M)$, $M < N$ の和を引くことで表現できるのであれば、 $H_k(N)$ の和に対して Petersson's formula を適用できるので、Duke の論法を $H_k(N)$ の和に対して展開することができる。つまり (3) でなく、

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f(1/2 + iy, \chi)}{\langle f, f \rangle} \right|^2 \\ &\leq \sum_{\substack{f \in H_k(N) \\ L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0}} \frac{1}{\langle f, f \rangle} \sum_{f \in H_k(N)} \frac{|L_f(1/2 + iy, \chi)|^2}{\langle f, f \rangle} \end{aligned}$$

を考える。ここで second moment については Kamiya による一般論により

$$\sum_{f \in H_k(N)} \frac{|L_f(1/2 + iy, \chi)|^2}{\langle f, f \rangle} < \sum_{f \in B_k(N)} \frac{|L_f(1/2 + iy, \chi)|^2}{\langle f, f \rangle} \ll_k \log N$$

が分かっている。更に (1) が $f \in H_k(N)$ に対して成立しているので、

$$\left| \sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f\left(\frac{1}{2} + iy, \chi\right)}{\langle f, f \rangle} \right|^2 \ll_k \#\{f \in H_k(N) \mid L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0\} \frac{(\log N)^2}{N} \quad (9)$$

が既に分かっている。従って問題は左辺の first moment

$$\sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f(1/2 + iy, \chi)}{\langle f, f \rangle}$$

の asymptotic formula を得ることである。得られれば、そこから first moment の lower bound を得ることができ、目的の lower bound を示すことができる。

今後は Petersson's formula を用いることを見越して

$$\sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f(1/2 + iy, \chi)}{\omega_{k,N}(f)} = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f(1/2 + iy, \chi)}{\langle f, f \rangle} \quad (10)$$

を考えることにする。

7 直交基底

first moment (10) に Petersson's formula を適用させるために $H_k(N)$ を互る和を $B_k(*)$ を用いて表す必要がある。そこで2章の最後に述べたように

$$S_k(N) = \bigoplus_{M|N} \bigoplus_{f \in H_k(M)} \langle f|_\ell; \ell \mid N/M \rangle$$

であるので old form の空間 $\langle f|_\ell; \ell \mid N/M \rangle$ の直交基底を決める必要がある。

実は Iwaniec, Luo and Sarnak [8] が N が square-free の場合に old form の空間の直交基底を作っている。しかし、その直交基底は分母に primitive form の p th Fourier 係数が含まれており (p は素数)、Petersson's formula をそのまま利用できる形になっていない。ただ $p \mid N$ であれば Fourier 係数の値に関しては十分な情報があるので、 $N = p^a$ の形の場合を考えることにする。 p がレベルを割っていることを必要としているので、 $S_k(1)$ からくる old form は排除したい。従って、今後は p を素数として $N = p^a$, k は偶数で $0 < k < 12$ 又は $k = 14$ と制限して話を進める。

さて、old form の空間の直交基底を作る方法は Iwaniec, Luo and Sarnak に倣う。まず $E(z, s)$ を Eisenstein 級数

$$E(z, s) = y^{s-k+1} \sum_{\gamma \in \Gamma_0(p^a)_\infty \setminus \Gamma_0(p^a)} |j(\gamma, z)|^{-2(s-k+1)}$$

を用いて

$$F(s) = \langle E(z, s) f(\ell_1 z), f(\ell_2 z) \rangle_{p^a}$$

を考え、これを $E(z, s)$ の留数で書いたものと Rankin-Selberg L -関数 $L_{f \otimes f}(s)$ の留数で書いたものを比較することで次の補題が得られる。

補題 1. p は素数、 k は偶数で $0 < k < 12$ 又は $k = 14$ とする。 $1 \leq m \leq a$ として $f \in H_k(p^m)$ をとる。 $0 < \ell_i \mid p^{a-m}$ について

$$\langle f|_{\ell_1}, f|_{\ell_2} \rangle_{p^a} = \lambda_{f, \infty}(\ell) \ell^{-\frac{1}{2}} \langle f, f \rangle_{p^a}$$

が成立する。ここで $\ell = \ell_1 \ell_2 (\ell_1, \ell_2)^{-2}$ である。

補題 1 を用いて old form の空間の基底が決定できる。

補題 2. 補題 1 の仮定の下、 $f \in H_k(p^m)$ について $f_1 = f$ とし、 $d \neq 1$ について

$$f_d = \begin{cases} d^{\frac{k}{2}} f(dz) & m \geq 2 \\ p\sqrt{p^2-1}^{-1} \left(d^{\frac{k}{2}} f(dz) - p^{-\frac{1}{2}} \lambda_{f, \infty}(p) \left(\frac{d}{p} \right)^{\frac{k}{2}} f\left(\frac{dz}{p}\right) \right) & m = 1 \end{cases}$$

とおくと、 $S_k(p^a)$ は直交分解

$$S_k(p^a) = \bigoplus_{m=1}^a \bigoplus_{f \in H_k(p^m)} \bigoplus_{d \mid p^{a-m}} \langle f_d \rangle,$$

を持つ。更に $\langle f_d, f_d \rangle_{p^a} = \langle f, f \rangle_{p^a}$ が成立している。

N が square-free の場合、 Iwaniec, Luo and Sarnak [8] の (2.45) がこの補題に対応している。ここでは N が素数冪なので彼らの結果より簡単な形になっている。この章の最初に述べたように Iwaniec, Luo and Sarnak の結果では (2.40) が分母に入るため、 cusp form の Fourier 係数が分母に入る。 Petersson's formula を利用したいので分母は f に依らない方が望ましい。この場合も実際は Iwaniec, Luo and Sarnak の結果と同様に $(1 - \lambda_{f, \infty}(p)^2/p)^{1/2}$ が分母に入っている。しかし f のレベルが p で割れるので、 $\lambda_{f, \infty}(p)^2 = 1/p$ 、または 0 が分かっている ([15] Theorem 4.6.17 を参照) 上記のような形で直交基底を得ることができるのである。補題 2 から次の補題がすぐに分かる。

補題 3. 補題 2 の仮定の下、 f_d ($d \neq 1$) の Fourier 係数は

$$\lambda_{f_d, \infty}(n) = \begin{cases} d^{\frac{1}{2}} \lambda_{f, \infty}\left(\frac{n}{d}\right) & m \geq 2 \\ d^{\frac{1}{2}} p \sqrt{p^2-1}^{-1} \left(\lambda_{f, \infty}\left(\frac{n}{d}\right) - p^{-1} \lambda_{f, \infty}(p) \lambda_{f, \infty}\left(\frac{np}{d}\right) \right) & m = 1 \end{cases}$$

と書ける。ここで、もし x が整数でなければ $\lambda_{f, \infty}(x) = 0$ とする。

補題 2 より $B_k(p^a)$ を次のように取ることにする。

$$B_k(p^a) = \bigcup_{m=1}^a \bigcup_{f \in H_k(p^m)} \bigcup_{d \mid p^{a-m}} \{f_d\}$$

書き直すと

$$B_k(p^a) = H_k(p^a) \cup B_k(p^{a-1}) \cup \left\{ \bigcup_{m=1}^{a-1} \bigcup_{f \in H_k(p^m)} \{f_{p^{a-m}}\} \right\}$$

が分かる。

8 Asymptotic formula

近似関数等式 (7) を思い出す。今までは h や d の取り方には触れずにいたが、近似関数等式の証明を追いながら h や d の取り方を説明する。まず $X > 0$ として

$$e^{-X^h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{\Gamma(1+s/h)}{s} X^{-s} ds$$

であることから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{f,\infty}(n)\chi(n)}{n^{1/2+iy}} e^{-(n/X)^h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} L_f(s+1/2+iy, \chi) X^s \frac{\Gamma(1+\frac{s}{h})}{s} X^{-s} ds$$

が分かる。右辺の積分路を左に移動させることにより、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{f,\infty}(n)\chi(n)}{n^{1/2+iy}} e^{(n/X)^h} \\ &= \text{留数} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(d)} L_f(s+1/2+iy, \chi) X^s \frac{\Gamma(1+s/h)}{s} X^{-s} ds \end{aligned}$$

という式が得られる。留数から $L_f(1/2+iy, \chi)$ が表れ、右辺の被積分関数の L -関数を関数等式 (2) を用いて $L_f(1/2-s-iy, \bar{\chi})$ で書き、級数表示をすると近似関数等式 (7) が得られる。関数等式で折り返した L -関数を級数表示するためには $d < -1/2$ となるように d を取ればよい。

しかし、後に Petersson's formula を用いるためにこの近似関数等式に対して $f \in B_k(N)$ を互る和を取りたいので、そこまで見越して d を設定する必要がある。近似関数等式に対して $f \in B_k(N)$ を互る和を取り、 $\sum_f$ と $\sum_{n=1}^{\infty}$ とを交換してみると、後に紹介する (12) によれば $\sum_f$ から $n^{(k-1)/2}$ くらいの大きさが出るので、それを込みで級数が収束するように d を設定する。従って $d < -1/2 - (k-1)/2$ である必要があることが分かるので、 $d = -k/2 - \varepsilon$ と取る。

すると上記の積分路の移動によって出る留数は $-k/2 - \varepsilon < \Re(s) < 1$ の間にある極からということになる。 $\Gamma(1+s/h)$ は $\Re(s) > -h$ で極を持たないので、留数を $L_f(1/2+iy, \chi)$ のみにするために $-h < -k/2 - \varepsilon$ となるように h を取る。従って $0 < \varepsilon < 1/4$, $h = (k+1)/2$ としておく。

得られた近似関数等式 (7) を用いて first moment (10) を表すと

$$\begin{aligned} & \sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{L_f(\frac{1}{2}+iy, \chi)}{\omega_{k,p^a}(f)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)e^{-(\frac{n}{X})^h}}{n^{\frac{1}{2}+iy}} \left[\sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,\infty}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)} \right] - \frac{i^k C_X}{2\pi i} \int_{(c_1)} \left(\frac{4\pi^2}{q^2 p^a} \right)^{s+iy} X^s \\ & \quad \times \frac{\Gamma(1+\frac{s}{h})}{s} G_k\left(s+\frac{1}{2}+iy\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{\frac{1}{2}-s-iy}} \left[\sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,0}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)} \right] ds \quad (11) \end{aligned}$$

が得られる。さて、これから asymptotic formula を導くために、上の式の中で四角で囲んだ和

$$\sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,a}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)} = \sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,a}(n)\lambda_{f,\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f)} \quad (a = \infty, 0)$$

を Petersson's formula を用いて評価する必要がある。 k を $H_k(p) = S_k(p)$ となるように制限していたので、 $a = 1$ であればそのまま Petersson's formula を利用できる。 $a \geq 2$ の場合は $H_k(p^a)$ を $B_k(*)$ で書き直す必要がある。7 章の最後で見たことから

$$\begin{aligned} \sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,a}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)} &= \sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,a}(n)\lambda_{f,\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f)} \\ &= \sum_{f \in B_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,a}(n)\lambda_{f,\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f)} - \sum_{f \in B_k(p^{a-1})} \frac{\lambda_{f,a}(n)\lambda_{f,\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f)} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{a-1} \sum_{f \in H_k(p^m)} \frac{\lambda_{f_{p^{a-m}},a}(n)\lambda_{f_{p^{a-m}},\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f_{p^{m-a}})} \end{aligned}$$

と書ける。補題 3 より、 $a \geq 3$ であれば $a - m \geq 1$ に対して

$$\lambda_{f_{p^{a-m}},\infty}(1) = 0$$

である。また $H_k(p) = B_k(p)$ となるように k を設定したので、

$$\begin{aligned} \sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,a}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)} &= \Delta_{k,p^a}(n, 1; a, \infty) - \Delta_{k,p^{a-1}}(n, 1; a, \infty) \\ &\quad + \begin{cases} 0 & a \geq 3 \\ \sum_{f \in H_k(p) = B_k(p)} \lambda_{f,p,a}(n)\lambda_{f,p,\infty}(1)\omega_{k,p^2}(f_p)^{-1} & a = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

が分かる。さて $\lambda_{f,p,\infty}(n)$ は補題 3 より $\lambda_{f,\infty}(*)$ で表せており、

$$(f_p | \sigma_{0,p^2})(z) = \pm \frac{p}{\sqrt{p^2-1}} \left(f(z) - p^{\frac{k-1}{2}} \lambda_{f,\infty}(p) f(pz) \right)$$

より

$$\lambda_{f,p,0}(n) = \begin{cases} \pm p \sqrt{p^2-1}^{-1} \lambda_{f,\infty}(n) & p \nmid n \\ 0 & p \mid n. \end{cases}$$

であるので、 $\lambda_{f,p,0}(n)$ も $\lambda_{f,\infty}(*)$ で表せる。全て総合すると first moment (11) の四角の部分は $\Delta_{k,*}(*, 1; *, \infty)$ の和を用いて書け、Petersson's formula (8) で扱えることが分かる。実際、 $J_{k-1}(x) \ll_k x^{k-1}$ が知られており、Kloosterman 和については Weil の評価

$$|S_{a,b}(m, n; c)| \leq (m, n, c)^{1/2} c^{1/2} d(c)$$

が分かっていることから

$$\Delta_{k,M}(m, 1; \mathbf{a}, \infty) = \delta_{m,1} \delta_{\mathbf{a},\infty} + \begin{cases} O_k(d(M)m^{\frac{k-1}{2}} M^{-k+\frac{1}{2}}) & \mathbf{a} = \infty \\ O_k(m^{\frac{k-1}{2}} M^{-\frac{k}{2}}) & \mathbf{a} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

が得られる。従って次の定理が得られる。

定理 (Y.I [6]) . $k = 2, 4, 6, 8, 10, 14$, p は素数、 a を自然数とする。 χ は $\text{mod } q$, $(q, p) = 1$ の primitive な Dirichlet 指標。任意の実数 y を固定したとき

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k(p^a)} \frac{L_f\left(\frac{1}{2} + iy, \chi\right)}{\langle f, f \rangle_{p^a}} \\ &= 1 - c(a) \\ &+ \begin{cases} O_k(p^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} q^{\frac{k}{2}} (1+|y|)^{\frac{k}{2}}) & a = 1 \\ O_k(p^{-\frac{5}{4}} q^{\frac{k}{2}} (1+|y|)^{\frac{k}{2}}) & a = 2 \\ O_k((a+1)p^{-\frac{(a-1)k}{2}+\frac{(a-1)}{4}+\frac{k}{4}-1} q^{\frac{k}{2}} (1+|y|)^{\frac{k}{2}}) & a \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $c(a)$ は

$$c(a) = \begin{cases} 0 & \text{if } a = 1 \\ p(p^2 - 1)^{-1} & \text{if } a = 2 \\ p^{-1} & \text{if } a \geq 3 \end{cases}$$

である。

更に系として次が得られる

系 (Y.I [6]) . 定理と同じ条件の下、十分大きい正定数 $M = M(a, k, q, |y|)$ 又は $M = M(p, k, q, |y|)$ と正定数 $C = C(k)$ が存在して、 $p > M$ 又は $a > M$ に対して

$$\#\{f \in H_k(p^a) \mid L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0\} > C(1 - c(a))^2 \frac{p^a}{(\log p^a)^2}.$$

が成り立つ。

参考文献

- [1] A. Akbary, *Non-vanishing of weight k modular L -functions with large level*, J. Ramanujan Math. Soc. **14** (1999), no. 1, 37 - 54.

- [2] A. O. L. Atkin and J. Lehner, *Hecke operators on $\Gamma_0(m)$* , Math. Ann. **185** (1970) 134 - 160.
- [3] W. D. Banks, *Twisted symmetric-square L -functions and the nonexistence of Siegel zeros on $GL(3)$* , Duke Math. J. **87** (1997), no. 2, 343 - 353.
- [4] W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L -functions with large level*, Invent. math. **119** (1995) 165 - 174.
- [5] J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. Math. **140** (1994) 161 - 181.
- [6] Y. Ichihara, *The first moment of automorphic L -functions over primitive forms on the critical line*, preprint.
- [7] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Graduate Studies in Mathematics, **17**. American Mathematical. Society, Providence, RI, 1997.
- [8] H. Iwaniec, W. Luo and P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L -functions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **91** (2000), 55 - 131.
- [9] Y. Kamiya, *Certain mean values and non-vanishing of automorphic L -functions with large level*, Acta Arith. **93** (2000) no. 2, 157 - 176.
- [10] 神谷諭一, 保型形式に付随する L 関数のある平均値と non-vanishing 定理について, 数理解析研究所講究録 **1160** (2000) 19 - 24.
- [11] E. Kowalski and P. Michel, *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L -functions*, Duke. Math. J. **100** (1999) no. 3, 503 - 542.
- [12] E. Kowalski, P. Michel and VanderKam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L -functions at the center of the critical strip*, J. Reine Angew. Math. **526** (2000) 1 - 34.
- [13] J.-F. Mestre, *Formules explicites et minoration de conducteurs de variétés algebriques*, Compositio Math. **58** (1986) 253 - 281.
- [14] M. Ram Murty, *The analytic rank of $J_0(N)(\mathbb{Q})$* , CMS Conf. Proc. **15** (1995) 263 - 277.
- [15] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [16] A. Ogg, *On a convolution of L -series*, Invent. Math. **7** (1969) 297 - 312.