

円管ポアズイユ流の安定性について

航技研 伊藤 信毅 (Nobutake Itoh)

1. はじめに

円管内のポアズイユ層流に対して線形安定計算を行うと、微小攪乱が常に減衰し、流れの安定性を示すことは周知の事実である (Davey & Drazin 1969, Salwen & Grosch 1972)。そこで、実験的に観測される乱流への遷移は、何らかの原因で流れに有限な振幅を持つ攪乱が導入されて非線形発達をするためであろうと説明されてきた。しかし、実際に非線形安定理論を適用した結果はまだ満足すべき説明を与えていないように思われる (Davey & Nguyen 1971, Itoh 1977, Davey 1978)。

本研究は従来の弱い非線形理論を拡張し、ある種の共鳴現象に起因する不安定の可能性を追求する。攪乱としては周方向にも変動する一般的な三次元進行波を対象とする。線形安定計算によって波の位相速度を求め、共鳴の条件をみだす二つの波動に対して非線形干渉の解析を行う。

2. 攪乱方程式

円管の半径と定常層流の最大流速を用いて諸量を無次元化する。円柱座標 (r, θ, x) に対する速度成分を $(w, v, U+u)$ と書き, $U=1-r^2$ が基本流, 小文字の速度が攪乱を表わすものとする。攪乱としては次式で表わされる斜行波を考える。

$$v(r, \theta, x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(r, t) e^{ik(\alpha x + \beta \theta)} \quad (2.1)$$

$\beta=0$ (軸対称) の場合には流れ函数 ψ ($u = \frac{1}{r} D\psi$, $w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$) を導入し, 非軸対称の場合には v_k を消去した形に攪乱方程式を書く。 $k=1$ に対してはそれぞれつぎのようになる。

$$(D^2 - \frac{1}{r} D - \alpha^2 - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R U)(D^2 - \frac{1}{r} D - \alpha^2) \psi_1 = R(r D f_1^{(1)} - i\alpha r f_1^{(3)}), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \{(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{r^2})(D^2 + \frac{1}{r} D - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R U) + \frac{2\alpha^2}{r} D\} u_1 \\ & - \{i\alpha(D^2 + \frac{3}{r} D - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R U)(D + \frac{1}{r}) - \frac{\beta^2}{r^2}(2i\alpha + R r D U)\} w_1 \\ & = \beta R(\frac{\beta}{r^2} f_1^{(1)} - \frac{\alpha}{r} f_1^{(2)}), \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} & (D^2 + \frac{3}{r} D + \frac{1}{r^2} - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R U)(D^2 + \frac{3}{r} D + \frac{1}{r^2} - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}) w_1 \\ & + \frac{2i\alpha}{r} \{2(D^2 + \frac{1}{r} D - \alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}) - R \frac{\partial}{\partial t} - i\alpha R U\} u_1 \\ & = -R \{i\alpha D f_1^{(1)} + \frac{i\beta}{r} (D + \frac{1}{r}) f_1^{(2)} + (\alpha^2 + \frac{\beta^2}{r^2}) f_1^{(3)}\}, \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\text{ただし, } f^{(1)} = (u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w D) u, \quad f^{(2)} = \{u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w (D + \frac{1}{r})\} v,$$

$f^{(3)} = (u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + wD)w - \frac{v^2}{r}$ とし、下添字はフーリエ展開を行ったものの成分を示す。また、 $D \equiv \partial/\partial r$, R は Re 数である。

3. 線形安定計算の結果

方程式 (2.2) または (2.3) において、右辺の非線形項を無視し、 $\partial/\partial t$ を $-i\omega$ に置き換えると線形常微分方程式が得られる。これを $r=0$ で $|v| < \infty$, $r=1$ で $w=0$ の境界条件のもとに解くと固有値 ω の列が α, β, R の函数として定まる。各 β (≥ 0 , 整数) と R の組合せに対して $\alpha=0$ における固有値の虚数部 (増幅率) の大きい方から番号を付けることにすると Salwen & Grosch (1972) の図1～図7のような結果が得られる。いま、固有値の実数部と α の比 c_r (位相速度) の αR に対する変化を図示すると図1と図2の実線が得られる。図中の実線は同じ値を $\frac{1}{2}\alpha R$ の位置にプロットしたもので、実線と実線が交わる点は基本波 (α, β) と二倍の高調波 $(2\alpha, 2\beta)$ が同じ位相速度を持つことを示す。基本波とその高調波が同じ位相速度で動くときに非線形干渉が著しくなることは既によく知られている (Craink 1971, Itoh 1985)。なお、図の横座標に αR が取られているけれども、これは R 一定のときの α を表わすものと考えてよい。同図は $R \geq 500$ の範囲で任意の Re 数に対して成立する。

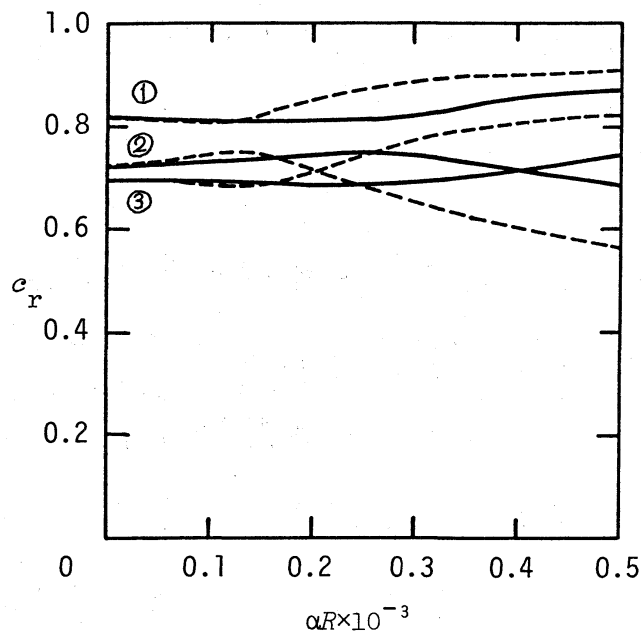


図1. 軸対称攪乱の
位相速度
実線は横座標を $\frac{1}{2}$ に
縮尺したもの, ①は
固有値の番号.

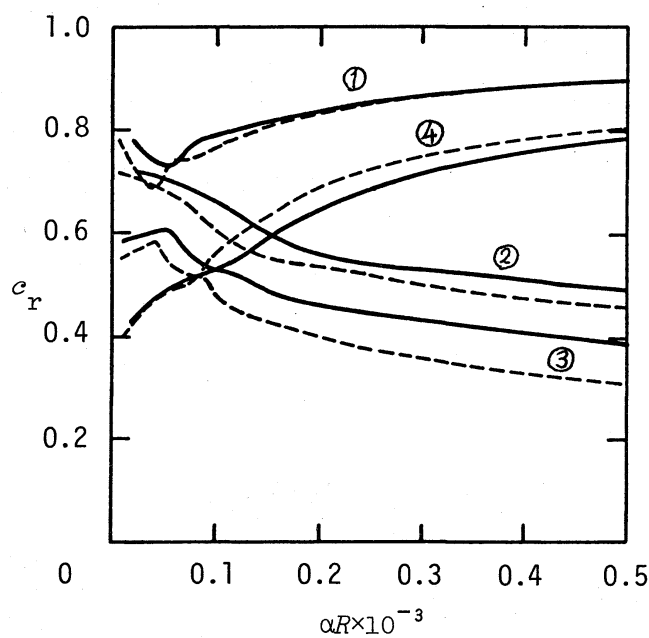


図2. 非軸対称攪乱
の位相速度
実線は $\beta = 1$. 実線は
 $\beta = 2$ で横座標を $\frac{1}{2}$ に
縮尺したもの.

4. 基本波と平均流中がみの干涉

波動成分同志の非線形干涉を考える前に、一つの波動と平均流中がみ成分の干涉を調べておく。平均流の中がみは位相速度を持たないので、どのような波動とも常に一定の相互作用を行う。

フーリエ級数 (2.1) において v_0 と v_1 および $v_1 (= \tilde{v}_1, \sim$ は複素共役を表わす) だけが卓越した大きさを持ち、他は無視できる場合を考える。線形解に一次の相互干涉で生じる項を加え、振幅の3乗以上の微小項を無視すると、

$$v_0 = B(t) v_0^{(0)}(r) + |A(t)|^2 v_0^{(1)}(r), \quad (4.1a)$$

$$v_1 = A(t) v_1^{(0)}(r) + A(t) B(t) v_1^{(1)}(r) \quad (4.1b)$$

のように書ける。ここで振幅函数 A, B は次式に支配される。

$$\frac{dB}{dt} = -i(\omega_0 B + \lambda_0 |A|^2), \quad \frac{dA}{dt} = -i(\omega_1 A + \lambda_1 AB) \quad (4.2)$$

ω_0 と ω_1 は線形解の固有値、 λ_0 と λ_1 は $v_0^{(1)}$ と $v_1^{(1)}$ を支配する非同次方程式の可解条件から定まるランダウ型定数である。

平均流に関する量は純虚数 $\omega_0 = i\omega_{0i}$, $\lambda_0 = i\lambda_{0i}$ になるから B は実数としてよいが、基本波に関する量は複素数 ($\omega_1 = \omega_{1r} + i\omega_{1i}$, $\lambda_1 = \lambda_{1r} + i\lambda_{1i}$) になるため、 A も複素数である。

以上を考慮し、さうに $\lambda_{1i} B = \mathcal{B}$ (実数) と置いて、(4.2) を

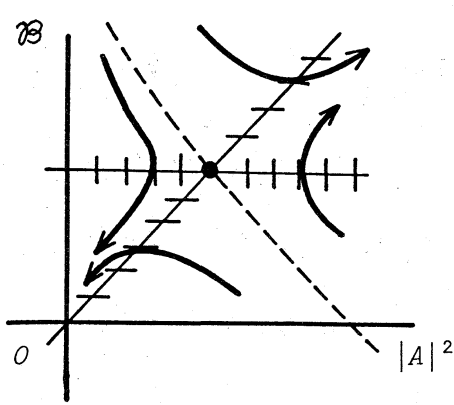
つぎのように書き直す。

$$\frac{d\varnothing}{dt} = \omega_{oi}\varnothing + \lambda_{oi}\lambda_{li}|A|^2, \quad \frac{d|A|^2}{dt} = 2|A|^2(\omega_{li} + \varnothing) \quad (4.3)$$

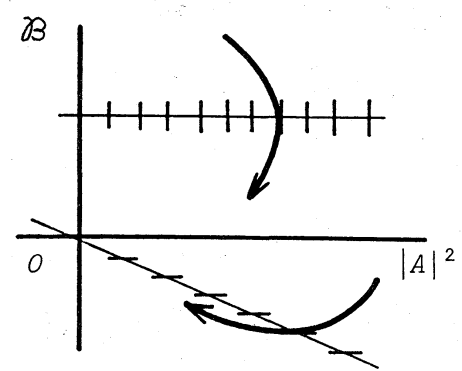
上式は $|A|^2$ と $\varnothing$ を座標軸とする位相平面上に解曲線群を定義する。第1式の右辺を0に等しいと置いた式は原点を通る直線を表わし、その上で解曲線の勾配は $d\varnothing/d|A|^2 = 0$ である。

また第2式の右辺から $d|A|^2/d\varnothing = 0$ をみたす直線が定まる。円管流では $\omega_{oi} < 0$, $\omega_{li} < 0$ であるから、解曲線の形状を支配する量は $\lambda_{oi}\lambda_{li}$ の符号だけになる。図3に示すように、 $\lambda_{oi}\lambda_{li} < 0$ ならば解曲線は原点に収束し、 $\lambda_{oi}\lambda_{li} > 0$ ならば初期振幅が十分大きくなったときに解の発散が現われる。後者は数居型不安定の条件を与えている。

実際にランダウ型定数を計算した結果が図4に示されている。軸対称攪乱の場合には αR のほとんどの領域で $\lambda_{oi}\lambda_{li} < 0$, $\alpha R \times 10^{-3} = 0.4$ の近傍だけで値が正になる。非軸対称の場合には $\alpha R \times 10^{-3} > 0.2$ で $\lambda_{oi}\lambda_{li} > 0$ になり、そこでは数居型不安定の起こりうることを示している。しかし、不安定が起こる領域では $|\lambda_{li}|$ または $|\lambda_{oi}|$ が比較的小さな値を取ることに注意すべきである。攪乱が発散的成長をするために必要な数居振幅はこれらに反比例して大きくなるから、図4の結果は不安定の可能性を示すとともに、それが起こりにくいことを意味する。

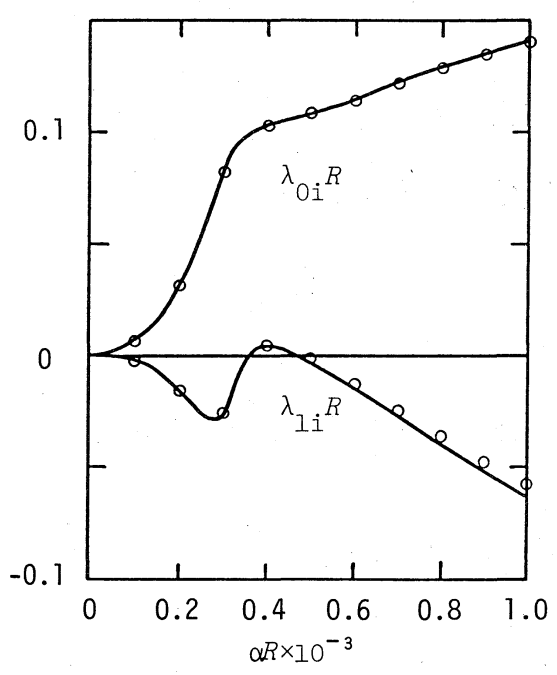


i) $\lambda_{0i} \lambda_{1i} > 0$ のとき

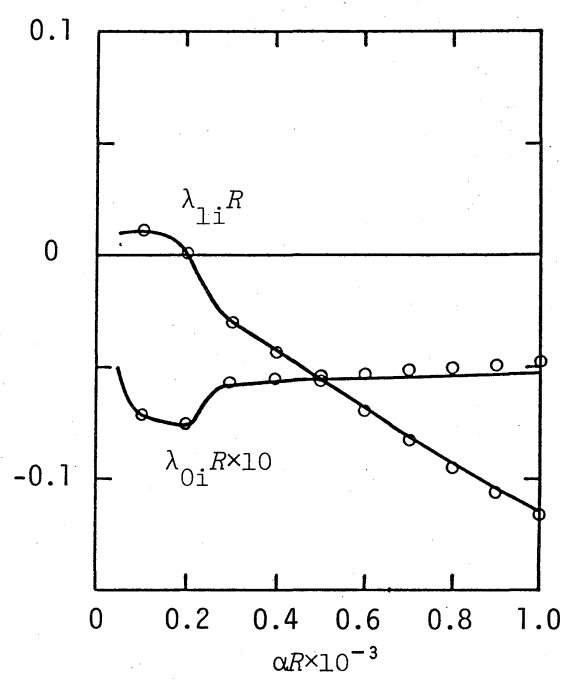


ii) $\lambda_{0i} \lambda_{1i} < 0$ のとき

図3. $|A|^2$ - B 平面における線曲線の形状



a) $\beta = 0$



b) $\beta = 1$

図4. 基本波-平均流干渉のランダウ定数

— : $R = 1000$, $\circ$: $R = 2000$.

5. 共鳴不安定理論

基本波を適当に選ぶと、その高調波が同じ位相速度を持つことは既に述べた。そこで、フーリエ級数(2.1)において v_1 と v_2 およびそれらの複素共役成分のみが卓越した大々々を持つ場合を考え、その一次干渉による効果を調べる。

二つの波の振幅 $|A|$ と $|B|$ が十分小さいものと仮定し、振幅の2乗項まで残すと、§4 と同じように

$$v_1 = A v_1^{(\omega)} + \tilde{A} B v_1^{(\omega)}, \quad v_2 = B v_2^{(\omega)} + A^2 v_2^{(\omega)}, \quad (5.1)$$

$$\frac{dA}{dt} = -i(\omega_1 A + \lambda_1 \tilde{A} B), \quad \frac{dB}{dt} = -i(\omega_2 B + \lambda_2 A^2) \quad (5.2)$$

と書くことができる。ここで線形固有値 ω_1, ω_2 およびランダウ型定数 λ_1, λ_2 はいずれも複素数である。そこで、

$$A = |A| e^{i\theta_1}, \quad B = |B| e^{i\theta_2}, \quad \theta_2 - 2\theta_1 = \Theta, \quad \lambda_n = |\lambda_n| e^{i\sigma_n} \quad (n=1, 2) \quad (5.3)$$

と置き、(5.2)の実数部と虚数部を分離すると、次式を得る。

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2|A|^2 \{ \omega_{1i} + |\lambda_1| |B| \sin(\Theta + \sigma_1) \}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d|B|}{dt} = \omega_{2i} |B| - |\lambda_2| |A|^2 \sin(\Theta - \sigma_2), \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} = & -(\omega_{2r} - 2\omega_{1r}) - |\lambda_2| \frac{|A|^2}{|B|} \cos(\Theta - \sigma_2) \\ & + 2|\lambda_1| |B| \cos(\Theta + \sigma_1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

いま, (5.4) と (5.5) の右辺を 0 にする $|B|$ と $|B|/|A|^2$ の値を (5.6) に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} = & -(\omega_{2r} - 2\omega_{1r}) + \frac{|\lambda_1 \lambda_2| |A|^2}{\omega_{1i}} \left\{ \left(1 + \frac{2\omega_{1i}}{\omega_{2i}}\right) \sin(2\Phi + \sigma_1 - \sigma_2) \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{2\omega_{1i}}{\omega_{2i}}\right) \sin(\sigma_1 + \sigma_2) \right\} \quad (5.7) \end{aligned}$$

に変形される。位相差 Φ が振幅の大きさに依らずに平衡状態 $d\Phi/dt = 0$ をみたすための条件は

$$\omega_{2r} = 2\omega_{1r}, \quad \Phi = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1 + \delta) \quad (5.8)$$

である。ただし, $\sin \delta = -\{(\omega_{2i} - 2\omega_{1i})/(\omega_{2i} + 2\omega_{1i})\} \sin(\sigma_1 + \sigma_2)$, $-\pi/2 < \delta < \pi/2$ であり, このときの Φ は (5.7) の安定平衡点になる。もし Φ がこの一定値に保たれると仮定すれば, $|A|^2$ と $|B|$ の時間的発達を, (5.5) と (5.6) の解曲線として位相平面上に描くことができる。その結果は図 3 と同様になり, 数居型不安定が起るための条件は $\sin(\Phi + \sigma_1) \sin(\Phi - \sigma_2) < 0$, 即ち

$$|\delta| < \sigma_1 + \sigma_2 < 2\pi - |\delta| \quad (5.9)$$

で与えられる。 $|\delta|$ は通常小さな値を持ち, とくに $\omega_{2i} = 2\omega_{1i}$ のときに 0 であるから, (5.9) はほとんどの場合に成り立つと考えてよい。すなわち (5.5) と (5.6) の解曲線は図 3 (i) の形態を取ることになり, 数居型不安定の可能性を示唆する。

なお, $d|A|^2/dt = d|B|/dt = 0$ をみたす矣 (平衡矣) は次式で与えられる。

$$|A|^2 = \frac{2\omega_{1i}\omega_{2i}}{|\lambda_1\lambda_2|\{\cos\delta - \cos(\sigma_1 + \sigma_2)\}}, \quad |B| = -\frac{\omega_{1i}}{|\lambda_1|\sin(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \delta}{2})}. \quad (5.10)$$

6. むすび

前節の解析によって, 基本波とその二倍の波数を持つ高調波が同じ位相速度を持つときには条件(5.8)がみたされ, 数層型不安定の起こりうることが判った。しかし, 実際に数層振幅の値を計算したとき, それが極端に大きくなったのでは意味がない。そこで, 平衡矣の振幅(5.10)によって数層値を代表させることにし, $R \rightarrow \infty$ における漸近解を用いてその大ききの程度を評価しておく。

円管流における攪乱は 'centre mode' と 'wall mode' に別けられるが, ここでは前者を例に取る。(後者についても同様な議論がでる。) αR が十分大きいときには, 線形攪乱の位相速度は次式で与えられる(Pekeris 1948, Gill 1965)。

$$c = 1 + 4m^{-\frac{3}{2}\pi i}(\alpha R)^{-\frac{1}{2}} + \dots \quad (6.1)$$

そこで, 微小パラメタ $\varepsilon = (\alpha R)^{-1/4}$ を導入し, $\alpha \lesssim \varepsilon^{-1}$ と仮定する。さらに, r 座標の 'critical layer' における拡大を

考慮すると、攪乱方程式の係数に含まれる諸量はつぎの程度とみなせる。

$$D \sim O(\frac{1}{\varepsilon}), \quad \beta \sim O(1), \quad \omega R \sim O(\frac{1}{\varepsilon^4}), \quad U-C \sim O(\varepsilon^2). \quad (6.2)$$

以上を (2.3) に代入し、各項を比較すると、

$$\begin{aligned} u &\sim O(1), \quad v \sim O(\frac{1}{\varepsilon^3 R}), \quad w \sim O(\frac{1}{\varepsilon^3 R}), \\ f^{(1)} &\sim O(\frac{1}{\varepsilon^4 R}), \quad f^{(2)} \sim O(\frac{1}{\varepsilon^2 R^2}), \quad f^{(3)} \sim O(\frac{1}{\varepsilon^2 R^2}), \\ \omega_r &\sim O(\frac{1}{\varepsilon^2 R}), \quad \omega_i \sim O(\frac{1}{\varepsilon^2 R}), \quad \lambda \sim O(\frac{1}{\varepsilon^4 R}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

の評価を得る。したがって、(5.10) で与えられる攪乱振幅は $R \rightarrow \infty$ に対して、 $|A|, |B| \sim O(\varepsilon^2)$ となる。この結果は、Re 数が大きいほど数値値が低くなり、流れが不安定になり易いことを示している。

本研究は、円管ポアズイユ流の有限攪乱に対する不安定性について一つの可能性を示したものである。理論を進める段階で採用したいくつかの仮定についてはまだ十分な検討が齎んでいない。とくに、振幅展開における高次微小項の省略が妥当かどうかは非常に重要な問題であり、今後の研究が必要である。

REFERENCES

- Craik, A.D.D. 1971 J. Fluid Mech. 50, 393.
- Davey, A. 1978 J. Fluid Mech. 86, 695.
- Davey, A. & Drazin, P.G. 1969 J. Fluid Mech. 36, 209.
- Davey, A. & Nguyen, H.P.F. 1971 J. Fluid Mech. 45, 701.
- Gill, A.E. 1965 J. Fluid Mech. 21, 145.
- Itoh, N. 1977 J. Fluid Mech. 82, 469.
- Itoh, N. 1985 Laminar-Turbulent Transition (ed. V.V. Kozlov),
p. 463. Berlin: Springer-Verlag.
- Pekeris, C.L. 1948 Proc. U.S.Natn. Acad. Sci., Wash. 34, 285.
- Salwen, H. & Grosch, C.E. 1972 J. Fluid Mech. 54, 93.