

Allmost sufficiently large manifold of type II

北大 教養 小林 一章

大学院 平山 律子

§ 1. 序

W. Jaco らによって提起された次の問題を考える.

Question: M は closed irreducible 3-manifold, $\pi_1(M)$ は infinite group ならば, $\pi_1(M)$ は closed surface の基本群と同型な群を subgroup としてもつか?

この問題を考えるうちに, 次の結論を得た.

定理. M は closed 3-manifold, $\pi_2(M) = 0$, $\pi_1(M)$ は infinite group とする. α は M の中の次の条件を満足する simple closed curve とする

$$(1) \quad \alpha \neq 0 \text{ in } \pi_1(M)$$

$$(2) \quad \partial \bar{U}(\alpha) \text{ 上の distinguished longitude } l \text{ は } \langle l \rangle \in H_1(M - \bar{U}(\alpha)) \text{ で infinite order}$$

$$(3) \quad nm(\{[l]\}, \pi_1(M - \bar{U}(\alpha))) = gp(\{[l]\}, \pi_1(M - \bar{U}(\alpha)))$$

ならば, $\pi_1(M)$ は closed orientable surface の基本群と同型

な部分群をもつ

ここで $[\alpha]$, $\langle \alpha \rangle$ はそれぞれ homotopy class, homology class である.

$nm(X, G) = \text{the smallest normal subgroup by } X \text{ in } G$

$gp(X, G) = \text{the subgroup generated by } X \text{ in } G$

を意味する.

この定理の応用として, Heil に示された次の系を得る.

[系] M は Seifert fiber space, $\pi_2(M) = 0$, $\pi_1(M)$ が infinite group ならば, $\pi_1(M)$ は closed orientable surface の基本群を部分群としてもつ.

(証明)

α として M の中の normal fiber を表現している simple closed curve をとると, 定理 (1), (2), (3) の条件を満たす.

§2. 定理の証明の準備.

定理の証明の前に, いくつかの lemma を証明する.

lemma 1. M は closed orientable 3-manifold, $\pi_2(M) = 0$
 α は simple closed curve, m は $\partial U(\alpha)$ の distinguished meridian とするなら, $[m] \neq 1 \in \pi_1(M - \dot{U}(\alpha))$

(証明). もし $[m] = 1$ とすると loop theorem より proper に embed された B^2 が存在して $\partial B^2 = m$ とできる. ここで

$\Sigma^2 = B^2 \cup B_1^2$ (B_1^2 は $U(\alpha)$ の meridian disk) とおくと Σ^2 は α と一点で transversely に交わっているから Σ^2 は M を split しない。
 しかし、 $\pi_2(M) = 0$ より Σ^2 は compact contractible 3-manifold に bound されるから、 Σ^2 は M を split するので矛盾が生じる。

lemma 2. M は closed orientable 3-manifold, α は simple closed curve とすると

$\text{Im}(H_1(\partial U(\alpha); \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_1(M - \mathring{U}(\alpha); \mathbb{Z}))$ は infinite

(証明) $\text{Im}(H_1(\partial U(\alpha); \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_1(M - \mathring{U}(\alpha); \mathbb{Z}))$ が finite と仮定すると、 $\text{Im}(H_1(\partial U(\alpha); \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M - \mathring{U}(\alpha); \mathbb{Q})) = 0$

$(M - \mathring{U}(\alpha), \partial U(\alpha))$ の $\mathbb{Q}$ -係数 homology exact sequence, Poincaré dual を使うと $H_1(\partial U) = 0$ となり矛盾が出る。

lemma 3. M は closed orientable 3-manifold, α は simple closed curve, l は $\partial U(\alpha)$ 上の distinguished longitude とするとき、distinguished homeo $h: S^1 \times D^2 \rightarrow U(\alpha)$ の適当なとり方によって、 $\langle l \rangle$ は $\pi_1(M - \mathring{U}(\alpha))$ で infinite order とできる。

(証明)

$\langle \alpha \rangle \in H_1(M)$ で infinite order であれば $\langle l \rangle$ は $H_1(M - \mathring{U}(\alpha))$ で infinite order となるから、finite 即ち $p\langle \alpha \rangle = 0$ のとき、

証明する。

(I). $|p| > 1$ のとき $\langle l \rangle$ は $H_1(M - \dot{U}(\alpha))$ で finite order.
 i.e. $g\langle l \rangle = 0$ とする. $U(\alpha)$ の中に $\beta \sim \alpha \cup \dots \cup \alpha$ となる
_{homologous}
 simple closed curve $\exists$ とすると $\langle \beta \rangle = 0 \in H_1(M)$ となり,
 surface F が存在して $\partial F = \beta$ とできる. ここで $\gamma \equiv F \cap \partial U(\alpha)$
 とおくと, γ は simple closed curve で $\langle \gamma \rangle = a\langle m \rangle + g\langle l \rangle$
 in $H_1(\partial U(\alpha))$, $(a, g) = 1$. m, l はそれぞれ meridian,
 longitude である

$\langle \gamma \rangle = g\langle l \rangle = 0$ in $H_1(M - \dot{U}(\alpha))$ であるから $a \neq 0$ なら $\langle m \rangle$ も
 finite order となり, lemma 2 に矛盾ある.

(II). $|p| = 1$ のとき. (I) と同様に $g\langle l \rangle = 0$ として矛盾を出す.
 $\langle \gamma \rangle = a\langle m \rangle + g\langle l \rangle$ と同じくすると, $|g| > 1$, $a \neq 0$ なら $\langle m \rangle$
 は finite となり矛盾.

$|p| = |g| = 1$, $a = 0$ のとき問題であるか. このとき h
 distinguished homeo $h: S^1 \times D^2 \rightarrow U(\alpha)$ を新しく h' として
 $h'(m') = h(m') = m$, $h'(l') = h(m'l') = ml$ と定義し直し. ここで
 meridian, longitude m, l を $h'(m') = m$, $h'(l') = l$ とおく.
 あると $\langle \gamma \rangle = -\langle m_1 \rangle + \langle l_1 \rangle$ とかけて. 前の事から $\langle l_1 \rangle$ は infinite
 order でなければならぬ.

[定義] index 2 の embedded surgery の定義をある.

F は proper に embed された compact orientable manifold M

の中の 2-sided surface とし. α は simple closed curve.

$\exists B^2 \subset M$. such that $\partial B^2 = \alpha$, $B^2 \cap F = \alpha$ と仮定する.

$U(B^2)$: regular neighborhood か $U(B^2) \cap \overline{F} \stackrel{\text{put}}{=} A \cong S^1 \times I$ なら.

$U(B^2)$ に embed された B^2 と parallel な B_1^2, B_2^2 を. $(B_1^2 \cup B_2^2) \cap F$
 $= (\partial B_1^2 \cup \partial B_2^2) \cap F = \partial A$ となる A に対して

$F' = (F - \overset{\circ}{A}) \cup (B_1^2 \cup B_2^2)$ とおくと. F を F' に変えることを
 index 2 の embedded surgery と呼ぶ.

lemma 4. M は compact orientable 3-manifold

F は compact connected orientable surface で M に proper に
 embed されている. もし $\text{Ker}(\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M)) \neq \{1\}$ なら

$\exists F'$: compact connected orientable surface such that
 $\partial F' = \partial F$, $\text{Ker}(\pi_1(F') \xrightarrow{i_*} \pi_1(M)) = \{1\}$

(証明) $[\partial F] = 1$ なら $F' \cong D^2$.

$[\partial F] \neq 1$ なら loop theorem より $\exists B^2 \subset M$ such that $B^2 \cap F = \partial B^2$.

$[\partial B^2] \in \text{Ker } i_*$. この B^2 を使って. index 2 の embedded surgery

をする. その surface を F_1 とし. disconnected なら ∂F を含む

component を F_1 とおく. この操作を $\text{Ker}(\pi_1(F_1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M))$

が Kill するまで行う. 最後にできた surface を F' とおくと.

F' は proper に embed された compact connected orientable
 surface で $\text{Ker } i_* = \{1\}$ である.

lemma 5. M は compact 3-manifold, $\pi_2(M) = 0$.
 $\pi_1(M)$ は infinite group なら $\pi_1(M)$ は torsion free.

§ 3. 定理の証明.

I. orientable case.

α は仮定で与えられた simple closed curve とすると.

lemma 5 より, $[\alpha]$ は infinite order である.

$\phi: \pi_1(M - \dot{U}(\alpha)) \rightarrow H_1(M - \dot{U}(\alpha)) \rightarrow \langle \ell \rangle \cong \mathbb{Z}$ に対し, ℓ は aspherical だから $\exists f: M - \dot{U}(\alpha) \rightarrow \ell$ such that $f_* = \phi$.
 f は一点 $x \in \ell$ に対し, transversally にしておくと, $f^{-1}(x)$ は proper に embed された compact orientable surface,
 $[\partial f^{-1}(x)] = m \ell^\mu \in \pi_1(\partial U(\alpha))$

lemma. $\mu = 0$ なら M は incompressible orientable surface をもつ. (F が incompressible surface とは $\text{Ker}(\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M)) = \{1\}$ とする)

(証明) $f^{-1}(x)$ に対し index 2 の embedded surgery を行くと, incompressible orientable surface $\overset{F'}{M} - \dot{U}(\alpha)$ から lemma 4 より とることもできる. $[\partial F'] = m \ell^\mu$. ここで $\mu = 0$ を仮定すると.

$[\partial F'] = m$. lemma 1 より $m \neq 1$ だから $F' \neq D^2$

$F'' = F' \cup B^2$, B^2 は meridian disk in $U(\alpha)$ とおく.

もし $\text{Ker}(i_*'(\pi_1(F'') \rightarrow \pi_1(M))) \neq \{1\}$ なら index 2 の embedded surgery をすると.

$F'' \sim F_1 \cup \dots \cup F_t$ $\therefore F_i$ は incompressible surface を得る.

$I(X, \alpha)$ を X と α の intersection number と定義すると.

$I(F'', \alpha) = 1$ だから $\exists F_i$ such that $I(F_i, \alpha) = 1$.

この F_i に対して $F_i \neq S^2$ $\odot F_i \cong S^2$ なら $[m] = \frac{1}{\pi} k [m] k^{-1}$

と表わすと $[m] = [m]^{\xi}$ in $\pi_1(\partial U(\alpha))$ ξ は even

$[m]^{\xi-1} = 1$ in $\pi_1(\partial U(\alpha))$ ならば矛盾. $F_i \neq S^2$ とする incompressible surface がある.

従って $\mu \neq 0$ としてよい.

$\lambda_* = \pi_1(f^{-1}(x)) \rightarrow \pi_1(M - \dot{U}(\alpha))$ が $\ker \lambda_* \neq \{1\}$ なら $\exists B^2 \subset$

$M - \dot{U}(\alpha)$ を使って index 2 の embedded surgery をする. 最後に

$f_1: M - \dot{U}(\alpha) \rightarrow \ell$ such that

(1) $f_1 \simeq f$.

(2) f_1 は $x \in \ell$ に対して transverse

(3) $f_1^{-1}(x)$ の component は proper に embed され T connected incompressible orientable surface F' $\partial F' = m\ell^{\mu}$, $F' \cong D^2$.

を得る.

$W \stackrel{\text{put}}{=} (M - \dot{U}(\alpha)) \cup_h (S^1 \times D^2)$ $h: S^1 \times D^2 \rightarrow (\alpha)$ homeo
such that $h(m') = m\ell^{\mu}$

$F' \stackrel{\text{put}}{=} F' \cup B'$ B' は meridian disk

f_1 と $f_2: W \rightarrow \ell$ は 拡張 しておく.

もし $\ker(i_2^* = \pi_1(F') \rightarrow \pi_1(W)) \neq \{1\}$ なら surgery しておく.

$F'' \sim F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_t$ とする. $F_i \cap h(S^1 \times D^2) \cong \{D^2\}$.

F_i と l との intersection を考えると. このうちで

$$F_i \cap h(S^1 \times D^2) = D_i^2 \cup \dots \cup D_s^2 \quad s: \text{odd} \text{ となるものがある.}$$

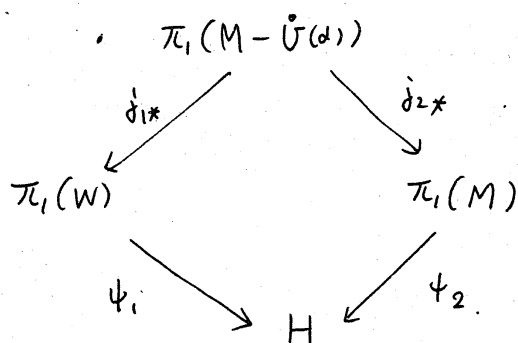
$$F_i \cong S^2 \text{ とすると. } [m, l^\mu] = \prod_{j=1}^{\mu} k_j [m, l^{\mu_j}] k_j^{-1} \text{ とかいた.}$$

$$[l]^\mu = [l]^\mu \text{ in } \pi_1(M) \text{ (by condition (3)) } \mu \neq 0 \text{ から}$$

$[l]$ は infinite order に矛盾し. $F_i \not\cong S^2$

従って W は incompressible surface ($\neq S^2$) を含む.

次の diagram を考える



$$\pi_1(W) = \langle g_1, \dots, g_p \mid r_1, \dots, r_q \rangle \text{ とする. } [\alpha] = g_1 \text{ と仮定}$$

$$\psi_1: \pi_1(W) \longrightarrow H = \langle g_2, \dots, g_p \mid r'_1, \dots, r'_q \rangle \quad (1)$$

す. ち.

$$\psi_1(g_1) = 1, \quad \psi_1(g_i) = g_i \quad (i \neq 1)$$

r'_i は r_i において g_1 を 1 と置きかえた relator.

同様にして $\psi_2(g_1) = 1, \psi_2(g_i) = g_i$ を定義する.

そこで $H \neq \{1\}$ としてよい.

$$\textcircled{1} \quad \pi_1(M) = \ker \psi_2 = \text{nm}(\{g_1\}, \pi_1(M)) = \text{gp}(\{g_1\}, \pi_1(M)) \cong \mathbb{Z}$$

$H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ より incompressible surface ($\neq S^2$) をもつ [7].

$W \supset F_0$ に対し $G = \pi_1(F_0)$, $G' = \psi_1(G)$ とおく

G_0 : smallest subgroup of $\pi_1(M - \mathcal{U}(\alpha))$ s. t. $j_{1*}(G_0) = G$

$G'' = j_{2*}(G_0)$, $G \cap \ker \psi_1 = \{1\}$, $G'' \cap \ker \psi_2 = \{1\}$ である.

何故なら, 条件 (3) より $nm(\{g_1\}, \pi_1(W)) = gp(\{g_1\}, \pi_1(W))$

$$nm(\{g_1\}, \pi_1(M)) = gp(\{g_1\}, \pi_1(M))$$

$w \in G \cap \ker \psi_1 = G \cap gp(\{g_1\}, \pi_1(W))$ があるとすると,

$\exists$ S path in M , such that $[S]w[S^{-1}] \in \pi_1(F'')$

$$f_2^*([S]w[S^{-1}]) = 0 \in \pi_1(l) \quad \textcircled{\ast} f_2(F'') = \mathcal{U}.$$

又, $w = g_1^t$, $f_2^*([S]w[S^{-1}]) = g_1^t$ 矛盾.

同様に $G'' \cap \ker \psi_2 = \{1\}$ も示せる.

従って, $G'' \underset{\psi_2}{\cong} G' \underset{\psi_1}{\cong} G = \pi_1(F)$ となり $\pi_1(M)$ は closed orientable surface の基本群を部分群にもつ.

(II) non-orientable case.

M の double covering $\tilde{M}$ $p: \tilde{M} \rightarrow M$ をとる. $\tilde{M}$ は orientable になる. 定理の条件で与えられる simple closed curve α の lift したのを $\tilde{\alpha}$ とおくと, $\tilde{\alpha}$ は $\tilde{M}$ の中で条件 (1), (2), (3) が成り立っている. p_* は injective であるから, $\pi_1(M)$ は closed orientable surface の基本群に同型な群を部分群としてもつ.

参考文献

1. B. Evans and W. Jaco : Varieties of groups and three manifold . *Topology* 12 (1973) 83-97.
2. W. Jaco : The structure of three manifold groups
(mimeographed note)
3. C. D. Papakyriakopoulos : On solid tori . *Proc. London Math. Soc.* (3) 7 (1957) 281-299
4. P. Scott : An introduction to 3-manifold
(Lecture note)
5. J. R. Stallings : On fibering certain 3-manifold
J. London Math. Soc. 7 (1973) 246-250
6. ——— : On the loop theorem , *Ann of Math.*
(2) 72 (1960) 12-19
7. F. Waldhausen : Gruppen mit Zentrum und
3-dimensionale Mannigfaltigkeiten , *Topology* 6
505-517.
8. W. Heil : Almost sufficiently large Seifert fiber space,
Michigan Math. J. 20 (1973) 217-222