

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	おおばやし いっぺい 大 林 一 平
学位（専攻分野）	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) Exponential decay of correlations for surface semiflows with an expanding direction (拡大的な方向を持つ曲面上の semiflow の相関の減衰)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 國府 寛司 教 授 穴倉 光広 教 授 重川 一郎 教 授

京都大学	博士 (理 学)	氏 名	大林 一平
論文題目	Exponential decay of correlations for surface semiflows with an expanding direction		

(論文内容の要旨)

Borel 有限測度 m を持つ空間 X 上で定義された, m -可測写像 $T : X \rightarrow X$ が定める力学系を考える. T -不変な確率測度 μ と X 上の $L^2(\mu)$ 関数 ϕ, ψ に対し,

$$\rho_{\phi, \psi}(n) = \int \phi(x) \cdot \psi \circ T^n(x) d\mu(x) - \int \phi(x) d\mu(x) \int \psi(x) d\mu(x)$$

を相関関数, ϕ, ψ を observable と呼ぶ. 不変測度の存在や相関の漸近的性質は力学系 T の統計的性質を調べる上で非常に重要である. 離散時間の力学系だけでなく, 連続時間の力学系でも同様の定義や問題が考えられる.

主論文では, suspension semiflow と呼ばれる, 比較的解析しやすく離散時間と連続時間の力学系をつなぐ重要な力学系のクラスの相関の減衰について調べた. 写像 $T : X \rightarrow X$ で不変な確率測度 μ と L^1 関数 $r : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ に対し, 空間 X^r を $\{(x, s) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq s \leq r(x)\} / \sim$ で定義する. ここで $\sim$ は $(x, r(x)) \sim (T(x), 0)$ から定まる同値関係である. X^r 上の semiflow F_t を $F_t(x, s) = (x, t + s) / \sim$ で定義すると, F_t は X^r 上の測度 $\mu^r = \mu \times \text{Leb} / \int r d\mu$ を保存する. この F_t を写像 T から導かれる X^r 上の suspension semiflow, r を roof function と呼ぶ.

連続時間の力学系における相関の減衰の研究は, 90 年代以降, T が Markov 的である場合に, Chernov や Dolgopyat の結果を起点として進んできた (1998). Avila, Gouëzel, Yoccoz らは, より一般に可算 Markov 分割を持つ C^1 拡大的写像の suspension semiflow における相関の指数的減衰の十分条件を与えた (2006). そこでは, suspension semiflow を定義する写像 T と正值関数 r に関する「 $r = \psi + \phi \circ T - \phi$ を満たす区分的定数関数 ψ と C^1 関数 ϕ は存在しない」という cocycle 条件が重要な役割を果たしている.

本論文では, T が Markov 的でない 1 次元写像の場合を考える. T が作用する空間の部分区間を考え, その上の可算分割と分割の各元に自然数を対応させる関数 R を考え, $T^{R(x)}(x) = T^{R(x)}(x)$ が Markov 的である場合に T はタワー構造を持つという.

主定理

T がタワー構造を持つ 1 次元写像が以下の条件を満たすならば, (T, r) で定義される suspension semiflow は Lebesgue 測度に絶対連続な不変測度を持ち, 相関関数は C^1 observable に対し指数的に減衰する.

- (1) 定数 K が存在し, T の任意の局所的な逆写像 h は $|h''| \leq K|h'|$ を満たす.
- (2) ある $\beta' < \inf |T'|$ が存在し, $\sum_i \beta'^{-R_i} < \infty$ ($R_i := R|_{(d_i, d_{i+1})}$) を満たす.

(3) T^R の点 x_0 における backward orbit $\{a_k^R\}_{k=-\infty}^0$, $\{b_k^R\}_{k=-\infty}^0$ とそれに対応する T の backward orbit $\{a_k\}_{k=-\infty}^0$, $\{b_k\}_{k=-\infty}^0$ が存在し,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r'(b_{-k})}{(T^k)'(b_{-k})} \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r'(a_{-k})}{(T^k)'(a_{-k})}$$

を満たす.

主定理の証明においては, (3) の backward orbit に関する条件が, 上述の Avila et al(2006) の結果の状況では cocycle 条件と同値であることが重要な役割を果たす.

主定理の 1 つの応用として, β -変換 ($1 < \beta < 2$ に対して $T(x) = \beta x \bmod 1$ で定義される写像) が定める suspension semiflow の相関の指数的減衰は, C^1 の roof function に対して C^1 open dense な条件であることが示された.

以上が本論文の主要結果である.

(論文審査の結果の要旨)

申請者の研究は、力学系の統計的性質に関するものである。力学系の研究ではカオスと呼ばれる、複雑で時間発展による状態の変化が予測困難な現象を扱う。このような現象が自然界にも工学的現象としても広く見られるということは1970年代までに認識され、研究が大きく進展したが、現在でも重要な未解決問題が残されている。カオス力学系はその初期値鋭敏性のために数値計算による解析には限界があるが、一方でその複雑さによって統計的な秩序が現れる。例えば力学系がエルゴード的であるならば、エルゴード定理より大数の法則が成立し、また、相関が指数的に減衰すれば、いくつかの付帯的条件の下で中心極限定理が成立する。このように相関の減衰の問題はカオスの性質を知るために重要な問題であり、申請者の結果はこの問題に対する優れた貢献である。

連続時間の力学系の相関の減衰を示すことは離散時間の場合よりも難しい。例えば suspension semiflow の roof function が定数である場合を考えると、空間方向にどれほど混合しても、流れの方向にはまったく混ざらない。連続時間の力学系の場合には流れの方向には縮小的でも拡大的でもないため、混合性や相関の減衰を議論することが困難になる。連続時間の力学系での相関の減衰に関するこれまでの研究は主に Markov 的力学系を対象としていた。Avila, Gouëzel, Yoccoz の cocycle 条件は Markov 的な力学系においては相関の指数的減衰の良い特徴付けであるが、Markov 的でないタワー構造を持つ力学系に直接は適用できない。一方、本研究で与えた backward orbit に関する条件は、Markov 的力学系では cocycle 条件と同値であり、しかも Markov 的でないタワー構造を持つ力学系と親和性が高く、このような力学系において相関の指数的減衰の良い特徴付けを与えている。

区間上の写像は様々な場合にタワー構造を見いだせることが知られている。そのため、本研究の結果を発展させて、 β 変換のみならず、より一般的な1次元写像の suspension semiflow に対して相関の指数的減衰が示せると期待される。このように、主論文の backward orbit の条件を用いることで相関の指数的減衰の検証ができる力学系が、従来より大きく広がったことが、本研究の重要な貢献であるといえよう。

以上により、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成22年1月19日に試問を行った結果、合格と認めた。