

Fuchs 型方程式系の 局所理論

神戸大 理 吉田 正章
高野 恭一

§ I 序 以下我々は, 方程式系 (完全積分可能とする)

$$(1) \quad dX = \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{x_i} dx_i \right) X$$

を考える。ここで $P_i(x)$ は $x=0$ で正則な $m \times m$ 行列で,

$$(2) \quad P_i(x) = \sum_{k \geq 0} P_{i,k} x^k.$$

我々は, $\{P_{i,k}\}$ のどの成分が, (1) の解の局所的ふるまいを決定するかを見出すであろう。

$x=0$ で正則な可逆行列 $U(x)$ による変換 $X = U(x)Y$ は, (1) を Y に関する以下の如き方程式に変換する。

$$(3) \quad dY = \left(\sum_{i=1}^n \frac{Q_i(x)}{x_i} dx_i \right) Y,$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(x)}{x_i} dx_i = U(x)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{x_i} dx_i \right) U(x) - U(x)^{-1} dU(x).$$

第一に, 我々は, (3) が § 4 で定義する 'reduced form' になるように $U(x)$ を決める。次に, 我々は, 成分が非負な

整数の対角行列 $L_i = \text{diag}(l_i^1, \dots, l_i^m)$ を使った変換 $Y = x_1^{L_1} \dots x_n^{L_n} Z$ によって, 'reduced' な (3) を定数行列 $B_1, \dots, B_n$ を係数にする方程式 $dZ = (\sum B_i/x_i dx_i)Z$ に変換する。

このノートを準備している時に, 我々は T. Kimura から, R. Génard が, 我々と似た問題を解きつつあることを教えられた。

(注) このノートで '正則' とは holomorphic のことである。

§ 2 収束定理. 我々は後で使うある収束定理を準備する。

定理 1 $|x| < \varepsilon$ で正則な行列 $F_i(x)$ を係数にする方程式

$$(5) \quad du = \left(\sum_i \frac{F_i(x)}{x_i} dx_i \right) u$$

のどんな形式的ベキ級数解も $|x| < \varepsilon$ で収束して, (5) の正則な解を表す。

§ 3. 積分可能条件 (1) の積分可能条件は,

$$(6)_{i,j;k} \quad k_j P_{i,k} - k_i P_{j,k} + \sum_{k'+k''=k} [P_{i,k'}, P_{j,k''}] = 0.$$

ここで, $k = (k_1, \dots, k_n)$.

§ 4 Reduced Form への reduction

定義 $dX = (\sum P_i(x)/x_i dx_i)X$ が $(k, (\alpha, \beta))$ について, 'reduced' とは, もしある i に対して, $a_i^{\alpha\alpha} - a_i^{\beta\beta} - k_i \neq 0$ なら, すべての $j=1, \dots, n$ に対して, $P_{j,k}^{\alpha\beta} = 0$ が成立すること. ここで, $P_i(x) = \sum_{k \geq 0} P_{i,k} x^k$, $P_{i,k} = (p_{i,k}^{\alpha\beta})$, $P_{i,0} = (a_i^{\alpha\beta})$. 更に, すべての $(k, (\alpha, \beta))$ について 'reduced' なら, 方程式が, 'reduced' と言う。

先づ我々は, $U(x) = \sum_{k \geq 0} U_k x^k$ をうまく取って, 変換された方程式を 'reduced' にする。

4.1 型式的 reduction $U(x)$ を以下の様に分解する

$$U(x) = U_0 \cdot U_1(x) \cdots U_N(x) \cdots$$

ここで, U_0 は nonsing. const 行列,

$$U_N(x) = U_N^{(1,m)}(x) \cdot U_N^{(2,m)}(x) \cdots U_N^{(m,m)}(x) U_N^{(1,m-1)}(x) \cdot$$

$$U_N^{(2,m-1)}(x) \cdots U_N^{(1,1)}(x) \cdot U_N^{(2,1)}(x) \cdots U_N^{(m,1)}(x),$$

$$U_N^{(\alpha,\beta)} = I + \sum_{|k|=N} U_k^{(\alpha,\beta)} x^k,$$

$U_k^{(\alpha,\beta)}$ は constant 行列で, (α, β) 成分が, $u_k^{\alpha\beta}$ で, 残は 0. 我々は順々に, $U_0, U_1^{(1,m)}(x), U_1^{(2,m)}(x), \dots, U_N^{(\alpha,\beta)}(x), \dots$ を決める.

(6) $i, j \geq 0$ より (2) の $P_{i,0}$ ($i=1, \dots, n$) は互いに可換故, U_0 をうまく取って,

(7) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} A_i = U_0^{-1} P_{i,0} U_0, i=1, \dots, n \text{ は下三角,} \\ \text{(ii) if } a_i^{\alpha\alpha} - a_i^{\beta\beta} = 0 \text{ for some } i, \text{ then } a_j^{\alpha\beta} = 0, j=1, \dots, n \end{array} \right.$ とできる. こゝに, $A_i = (a_i^{\alpha\beta})$. U_0 で変換された方

程式は, $(0, (\alpha, \beta))$ について, 'reduced' になる。更に,
 $\delta > \beta$ または, $\delta = \beta$ かつ $\gamma < \alpha$ のとき, $(\gamma, \delta) < (\alpha, \beta)$ と書いて,
 我々は以下の Prop. を得る。

Proposition I (Induction Process). $dX = (\sum \frac{P_{i,0}}{x_i} dx_i) X$
 が, k ($|k| < N$) あるいは, k ($|k| = N$) かつ $(\gamma, \delta) < (\alpha, \beta)$ なる
 $(k, (\gamma, \delta))$ について 'reduced' とせよ。更に, $P_{i,0} = A_i$ が (η) を
 満すとせよ。しからば, 適当な変換 $X = \bigcup_N^{(\alpha, \beta)} Y$ によって変
 換された方程式は, k ($|k| < N$) あるいは, k ($|k| = N$) かつ
 $(\gamma, \delta) \leq (\alpha, \beta)$ なる $(k, (\gamma, \delta))$ について, 'reduced'。更に,
 変換された方程式を $dY = (\sum Q_{i,k} / x_i dx_i) Y$ とすると,

$$(8) \quad Q_{i,k} = P_{i,k} \quad \text{for } k(|k| < N) \quad i=1, \dots, n,$$

$$(9) \quad q_{i,k}^{\gamma, \delta} = p_{i,k}^{\gamma, \delta} \quad \text{for } k(|k| = N), (\gamma, \delta) < (\alpha, \beta).$$

もし, $a_{i_0}^{\alpha, \alpha} - a_{i_0}^{\beta, \beta} - k_{i_0} \neq 0$ for some i_0 なら, $u_k^{\alpha, \beta}$ ($|k| = N$) は,

$$(10) \quad (a_{i_0}^{\alpha, \alpha} - a_{i_0}^{\beta, \beta} - k_{i_0}) u_k^{\alpha, \beta} + p_{i_0, k}^{\alpha, \beta} = 0$$

によって決定される。

どんどんやっていって, 無限積を展開して,

定理 2 型式バキ級数 $\sum_{k \geq 0} U_k x^k$ ($\det U_0 \neq 0$) によっ
 て, (1) は 'reduced' form になるようにできる。

注 1 $\sum U_k x^k$ は 高々有限個の不定因子しか含まぬ。

注 2 もし, $P_{i,0}$ の固有値の差が integer でなければ,
 (1) は, $dY = (\sum P_{i,0} / x_i dx_i) Y$ に変換され, このとき $\bigcup(\alpha)$

は一意にきまる。

4.2. 解析的 reduction 定理1より, 定理2の $\sqcup(x)$

は収束し, holomorphic. 故に,

定理3. (i) に対して, 収束級数 $\sqcup(x) = \sum_{k \geq 0} \sqcup_k x^k$
($\det \sqcup_0 \neq 0$) をはく取って, $X = \sqcup(x) Y$ と変換すると,

$$(ii) \quad dY = \left(\sum Q_i^{(\alpha)} / x_i \right) Y.$$

そこで,

$$(i) \quad Q_i(x) = A_i + \sum_{k \geq 0} Q_{i,k} x^k \quad (\text{有限和}). \quad A_i: \text{下三角},$$

$$(ii) \quad g_i^{\alpha\beta}(x) = g_i^{\alpha\beta} \cdot x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}, \quad b_\mu = a_\mu^{\alpha\alpha} - a_\mu^{\beta\beta}, \quad \mu=1, \dots, n.$$

$g_i^{\alpha\beta}(x)$ は, $a_\mu^{\alpha\alpha} - a_\mu^{\beta\beta}$ が非負な整数 ($= b_\mu$) のときに限り,
nonzero であり得る.

§5. Singular な変換 'reduced' な (ii) を考える.

$L_i = \text{diag}(l_i^1, \dots, l_i^n)$ とせよ. Singular な変換 $Y = x_1^{L_1} \cdots x_n^{L_n} Z$
は (ii) を, $dZ = \left(\sum B_i(x) dx_i \right) Z$, $B_i = (b_i^{\alpha\beta}(x))$, $Q_i(x) = (g_i^{\alpha\beta}(x))$,
 $b_i^{\alpha\beta}(x) = g_i^{\alpha\beta}(x) x_1^{l_i^1 - l_i^1} \cdots x_n^{l_i^n - l_i^n} - \delta_\beta^\alpha l_i^{\alpha}$ に移す.

我々は, l_i^{α} をうまく取って, $b_i^{\alpha\beta}(x)$ を constant にする.

$\{a_i^{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, m}$ を class に分ける. i.e. $[a_i^{\alpha\beta}] = [a_i^{\beta\beta}] \Leftrightarrow$

$a_i^{\alpha\beta} - a_i^{\beta\beta} \in \mathbb{Z}$. $a_i^{\alpha\alpha_0}$ を class $[a_i^{\alpha\beta}]$ の中で, real part が
最小のものとする. $l_i^{\alpha} = a_i^{\alpha\alpha_0} - a_i^{\alpha_0\alpha_0}$ とすれば, $b_i^{\alpha\beta}(x)$ は
constant $b_i^{\alpha\beta}$ になる.

定理4 適当な nonnegative integer l_i を取って,
 $Y = x_1^{L_1} \cdots x_n^{L_n} Z$ で, reduced な (II) を変換すると,

$$dZ = \left(\sum B_i / x_i dx_i \right) Z, \quad B_i \text{ は constant で,}$$

$$B_i = A_i - L_i + \sum_{k>0} Q_{i,k} \quad (\text{有限和}) \quad \text{となる.}$$

注意3 定理4 内の l_i は unique には決らないが,
 l_i^α と別のものとするば, $l_i^\alpha - l_i^\beta = l_i^\beta - l_i^\beta$ for any α, β with
 $[a_i^\alpha] = [a_i^\beta]$.

§6 結論 定理3, 4より.

定理5. (I) は, $X = U(x) x_1^{L_1} \cdots x_n^{L_n} Z$ により.

$dZ = \left(\sum B_i / x_i dx_i \right) Z$ に移る. そして, $U(x), L_i, B_i$
 は, (I) の係数から, 代数的に計算できる. また $P_i(0)$
 と $B_i + L_i$ は固有値が等しい.

定理5と全く同じようにして,

定理6. 方程式

$$dX = \left(\sum_{i=1}^v P_i(x) / x_i dx_i + \sum_{i=v+1}^n P_i(x) dx_i \right) X$$

($P_i(x)$: 正則 at 0)

は, $X = \left(I + \sum_{k_{v+1} + \cdots + k_n \geq 1} U_k x^k \right) Y$ によって,

$$dY = \left(\sum_{i=1}^v \frac{P_i(x_1, \dots, x_v, 0, \dots, 0)}{x_i} dx_i \right) Y \quad \text{に移る.}$$