

乱流遷移のLESの及ぼすフィルタリングの影響

京都工芸繊維大学機械システム工学科
徳永 宏 (Hiroshi Tokunaga)

1. はじめに

計算流体力学の進歩, 電子計算機の急速な高速度化により, 乱流の数値シミュレーションの研究が急速な進歩を遂げた. しかしながら, 実用上重要な高いレイノルズ数における乱流や複雑な幾何形状を持つ機器内外の乱流を計算するためには, 現在及び近い将来の計算機では十分でなく, LESによる計算が有望視されている.

ここでは, LESを使う場合に重要となるフィルタリングの方法を幾つか提示し, 適切でないフィルターを用いると乱流の計算で結果が大きく異なるケースがあることを直接数値計算の結果と比較しながら議論する.

数値計算方法として, 本稿では渦度・ベクトルポテンシャル法に4次精度の離散化を組み合わせた方法を用い, LESのモデルとして, Dynamical Subgrid Scale Modelを使い, チャンネル内流れの乱流遷移の計算を検証のため行った.

2. LESにおけるフィルタリング

ここでは, 本稿で用いるLESにおける幾つかのフィルタリング手法について説明する. 2.1 シャープカットオフフィルター

3次元の実空間での物理量の格子点 (i, j, k) での値を f_{ijk} で表し, これを以下のように離散フーリエ変換し

$$\tilde{f}_{l,j,n} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_3} f_{i,j,k} \omega_1^{-il} \omega_3^{-kn}, \quad \omega_i = \exp(2\pi i/N_i) \quad (1)$$

$\tilde{f}_{l,j,n}$ のある波数以上の値をカットするシャープカットオフフィルターを適用し, その結果を $\bar{f}_{l,j,n}$ とし, さらに逆離散フーリエ変換を行うと

$$\bar{f}_{ijk} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_3} \tilde{f}_{l,j,n} \omega_1^{il} \omega_3^{kn} \quad (2)$$

2.2 ボックスフィルター

一次元で説明する

$$\bar{f} = \int_{D_1} G_1(x-x') f(x') dx' \quad (3)$$

$$G_1(x) = \frac{1}{2\Delta_1}, \quad (|x| < \Delta_1), \quad (4)$$

$$= 0, \quad (\text{otherwise}) \quad (5)$$

ここで Δ_i は任意である. $f(x)$ に対して2次関数近似をすると

$$f(x) = a(x-x_i)^2 + b(x-x_i) + f_i \quad (6)$$

例として，等間隔格子 ($\Delta = \frac{1}{2}\Delta x$) 場合

$$\bar{f}(x_i) = \frac{1}{12}(f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1}) \quad (7)$$

となり，以下のような困難が回避できる．

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \bar{f} \neq \overline{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \quad (8)$$

2. 3 ダイナミック SGS モデル

物理量 f を以下のように平均量と変動量とに分離し

$$f = \bar{f} + f' \quad (9)$$

ナヴィエ・ストークス方程式に適用すると

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_j = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \quad (10)$$

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (11)$$

τ_{ij} に関してモデル化すると

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (12)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

$$\nu_t = C(x_2, t) \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_3 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (14)$$

$$C(x_2, t) = \langle L_{ij} M_{ij} \rangle / 2 \langle M_{ij} M_{ij} \rangle, \quad (15)$$

$$L_{ij} = -\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \widehat{\bar{u}_i} \widehat{\bar{u}_j}, \quad M_{ij} = \widehat{\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_3} (|\widehat{\bar{S}}| \widehat{\bar{S}}_{ij} - |\widehat{\bar{S}}| \widehat{\bar{S}}_{ij}). \quad (16)$$

ここで $\langle \rangle$ は空間平均を表す．また $\widehat{\bar{\Delta}_i}$ はテストフィルターの幅である．ボックスフィルターを用いる場合は

$$\nu_t = C(x_2, t) (\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_3)^{2/3} \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (17)$$

3. 基礎方程式及び数値計算方法

3. 1 渦度・ベクトルポテンシャル表示法

非圧縮性粘性流体の運動は，次のナヴィエ・ストークス方程式と連続の式で記述される．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad (i = x, y, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (18)$$

ここで，流速 $\mathbf{u}$ と渦度 ω は，ベクトルポテンシャルと ψ と速度ポテンシャル ϕ を用いて次の様に書き表される．

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi + \nabla \phi, \quad \omega = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (19)$$

このとき、速度ポテンシャルに対するラプラス方程式、ベクトルポテンシャルについてのポワソン方程式及び渦度輸送方程式が導かれる。

$$\Delta \phi = 0, \quad \Delta \psi_i = -\omega_i. \quad (20)$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \omega_i) = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2}, \quad (21)$$

ここで、物体を過ぎる流れの計算を容易にするために、一般化座標

$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta), z = \zeta$ を導入する。このとき、たとえば、 x, y に関する 1 階微分及びヤコビアンは次式の様に表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad J = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right). \quad (22)$$

物体表面の法線方向及び接線方向のベクトルポテンシャルの成分は次式のように定義される。

$$\psi_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad \psi_t = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (23)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ 及び $\mathbf{t}$ は、それぞれ法線方向及び接線方向の単位ベクトルを示す。物体面上のベクトルポテンシャルと渦度の境界条件は次の通りである。

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial n} = \psi_t = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (24)$$

3. 2 数値計算方法

数値計算方法として、線の方法を採用する。この方法では、空間の離散化と時間積分が独立に取り扱われる。例えば、渦度の ξ 方向微分は次の様に表示される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \Big|_{ijk} = \frac{\omega_{i+1,j,k} - \omega_{i-1,j,k}}{2 \Delta \xi}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \Big|_{ijk} = \frac{\omega_{i+1,j,k} - 2\omega_{i,j,k} + \omega_{i-1,j,k}}{\Delta \xi^2}, \quad (25)$$

その結果、偏微分方程式は次の時間に関する常微分方程式に変換される。

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{F}(\vec{\omega}), \quad \vec{\omega} = (\omega_{x,2,2,2}, \omega_{x,3,2,2}, \dots, \omega_{z,I-1,J-1,K-1})^T. \quad (26)$$

時間積分法として、4 次精度の Runge-Kutta-Gill 法を用いる。

3. 3 ポワソン方程式に対する数値計算方法

離散化には、渦度輸送方程式と同様の方法を用い、反復計算法として SOR 法を使う。加速係数は、1.8 とした。

4. チャンネル内流れの乱流遷移の LES と DNS の比較

本数値計算方法をチャンネル内流れの乱流遷移の数値計算に適用する。ここでは、シャープカットオフフィルターを用いた計算（以後 SCF）、ボックスフィルターを用いた計算（以後 BF）及び直接数値シミュレーション（以後 DNS）を実行し、結果比較を行う。レイノルズ数は 2×10^3 とし、流れ方向及びチャンネル奥行き方向の計算領域は、

乱流を維持できる最小の値を採用した。計算格子は、 $33 \times 65 \times 33$ である。初期条件として、平面ポワズイユ流に有限振幅の Tollmien-Schlichting 波を重ね合わせたものを用いた。空間の離散化精度は 4 次とした。なお、DNS には 65^3 の格子を用いた。

図 1 にチャンネル奥行き方向の渦度の等値面を示す。DNS の結果と較べて BF の結果は渦度が全体として弱められており、また一部消失している渦も見受けられる。

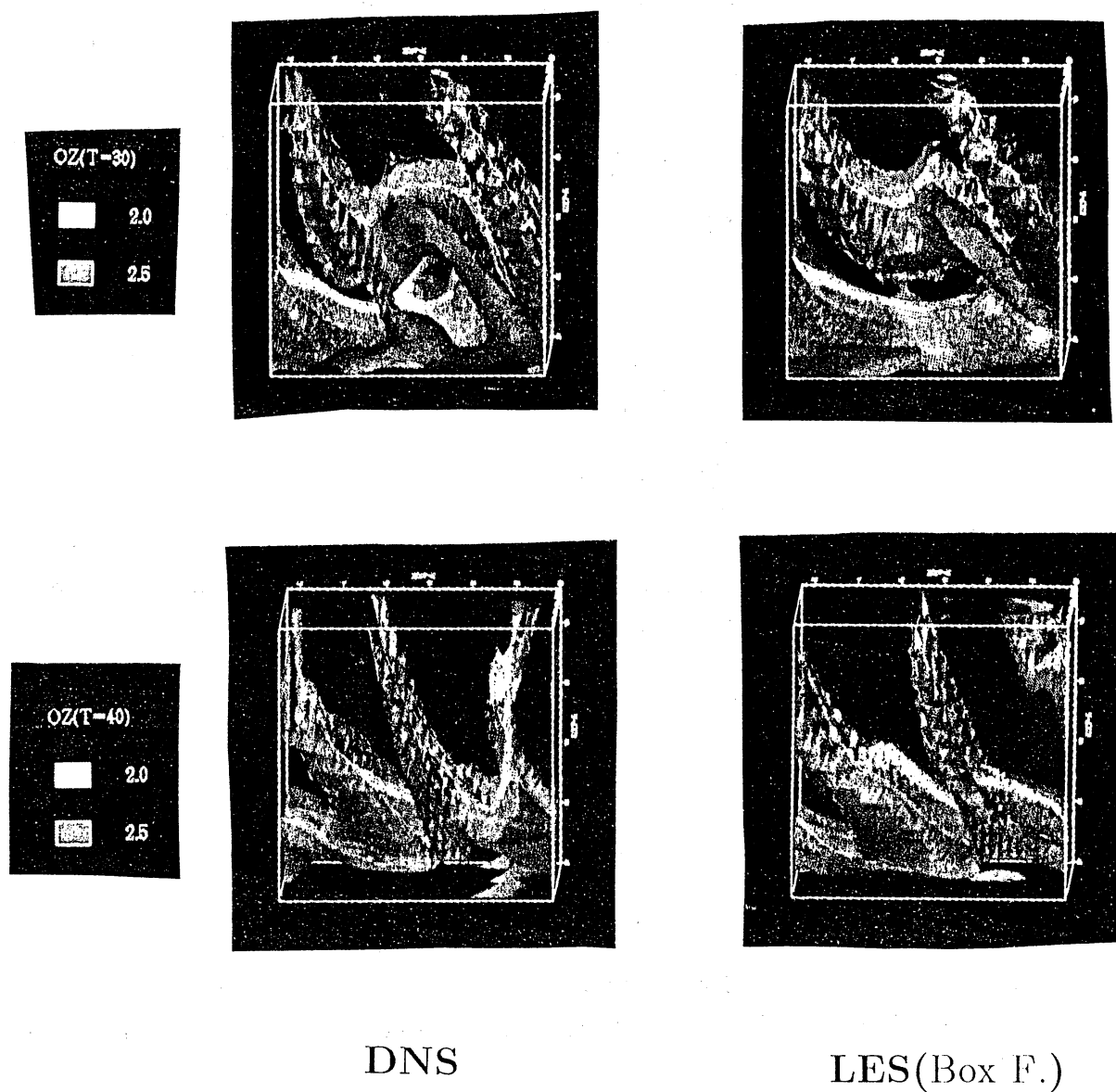
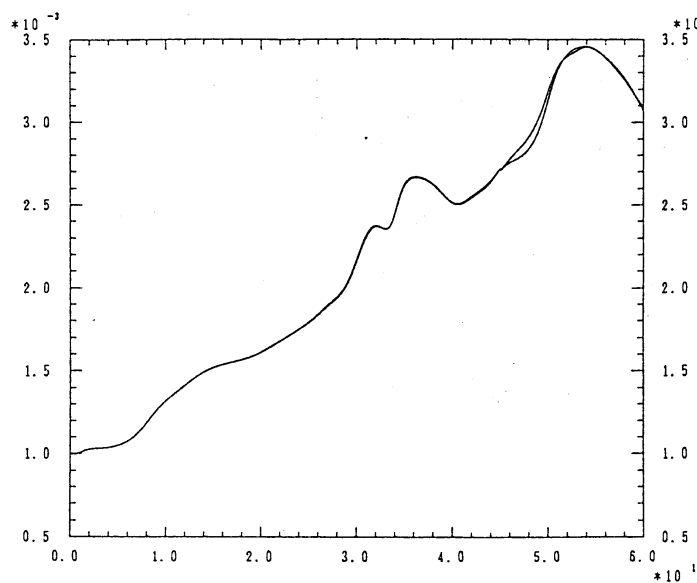
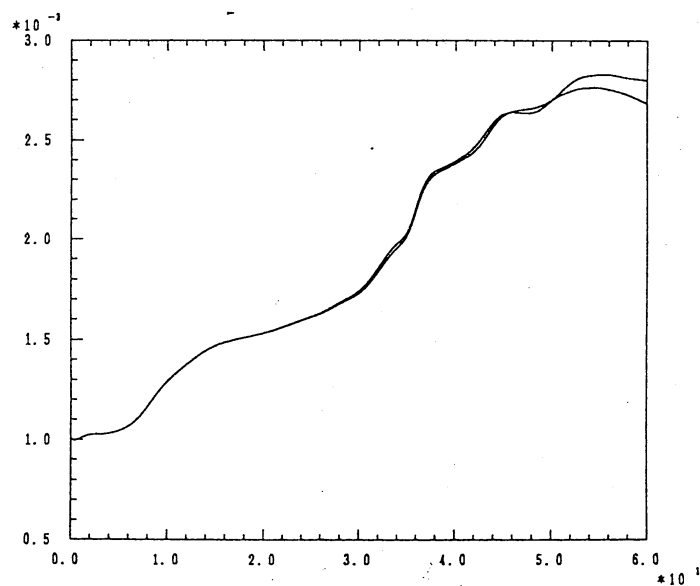


図 1. DNS と BF における渦度の等値面の比較

図 2 に壁面摩擦応力の時間変化を示す。BF による結果は摩擦応力を低めに見積もり、また時刻 $t = 50$ 過ぎで上下の壁面で値が異なってくるのが解る。



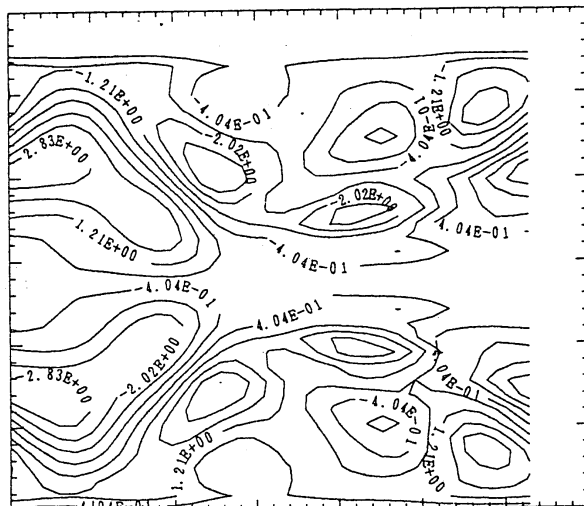
DNS



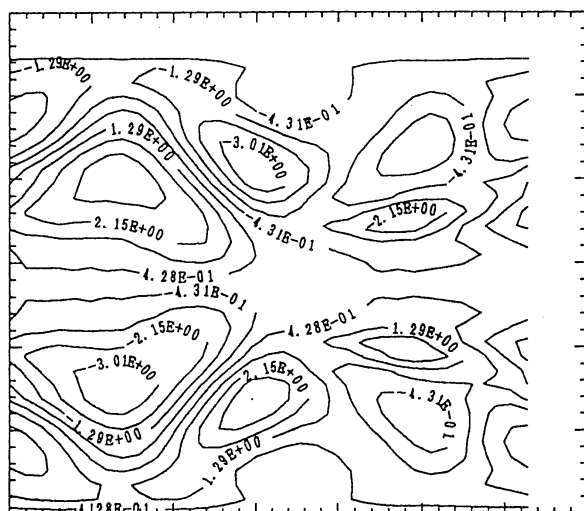
LES(B.F.)

図 2. 壁面摩擦応力の時間発展

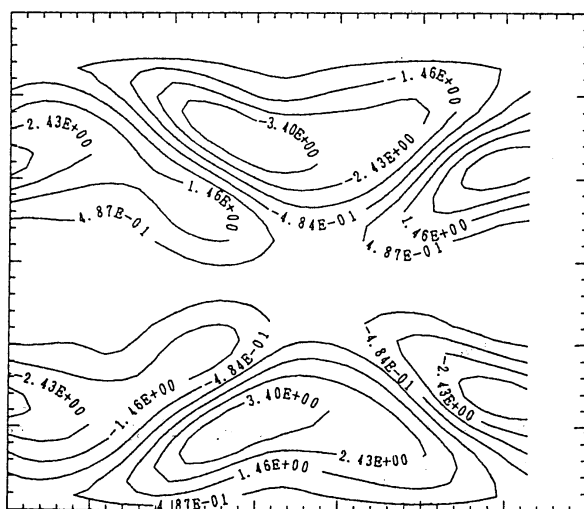
図 3 に壁面上の奥行き方向渦度の等高線を示した。SCFの結果は、ほぼDNSの結果と一致するものの、BFによる結果は十分ではない。



DNS



LES(S.C.F)



LES(B.F.)

図3. 壁面上奥行き方向渦度の等高線

まとめ

渦度・ベクトルポテンシャル表示法に Dynamic Subgrid Scale Model を結合し，フィルタリングとしてシャープカットオフフィルター，ボックスフィルターを用い，チャンネル内流れの乱流遷移を実行し，DNS のと比較したところ，以下の結論が得られた．

- (1) DNS の実行には 65^3 の格子が必要である．
- (2) シャープカットオフフィルターは良好な結果を与えるものの，一般化座標には適用出来ない．
- (3) ボックスフィルターは乱流を弱める効果を持ち，正確な計算には今後の一層の研究が必要である．

参考文献

- [1] Tokunaga, H., Numerical Simulations Using Vorticity-Vector Potential Formulation, Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford/NASA Ames, 175 (1992).
- [2] Kim, J., Moin, P. and Moser, R., Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number, J. Fluid Mech. **177**, 133 (1987).
- [3] Tokunaga, H., LES of Transition to Turbulence in a Plane Channel Using Vorticity-Vector Potential Formulation, Proc. 1st Asian Computational Fluid Dynamics Conference, Hong Kong, ed. Hui, W. H., Kwok, Y. K. and Chahnov, J. R., vol. 2, 767 (1995).
- [4] 徳永，渦度・ベクトルポテンシャル表示法によるチャンネル内流れの乱流遷移の LES，日本機械学会論文集（B），**62**, 97 (1996).