

Van der Corput 列に基づく 補間法の数値的安定性

名古屋大学工学部 島田 達生

1. はじめに

区間 $(0, 1)$ 上に一様分布する数列は, 多く知られてゐるが Van der Corput 列は, その数列を 2 で打切つても, 分布の等間隔性 (一様性) がよいことと, その構成が 2 進法演算で正確にできることに特長がある¹⁾. 区間 $(0, 1)$ 上の Van der Corput 列を複素平面上の単位円周上に写し, これを補間点とする補間法を考える. 補間多項式をべき級数で表示すると複数が 2 べきの高速 Fourier 変換の合成により手間少なくて済む. 本文では, この補間法の数値的安定性について述べる. したがって Lebesgue 定数²⁾の評価が本質的な問題となる.

2 進法表示の正の整数

$$k = k_1 2^0 + k_2 2^1 + \dots + k_n 2^{n-1}, \quad k_n = 1 \quad (1)$$

与えられたビット列 k に対し、双対列を

$$k^* = k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \cdots + k_n 2^{-n}, \quad n \geq 1$$

$$0^* = 0, \quad n = 0$$

で定義する。 $\{k^*\}$ を Van der Corput 列という。

k が n ビットの整数列のとき、 k^* は正確に n ビットの小数と
なる。

例. $\{k^*\}$ の最初の部分の 2 進表示は次の通りである。

k	k の 2 進表示	k^* の 2 進表示	k^*
0	0 0 0	0. 0 0 0	0
1	0 0 1	0. 1 0 0	$1/2$
2	0 1 0	0. 0 1 0	$1/4$
3	0 1 1	0. 1 1 0	$3/4$
4	1 0 0	0. 0 0 1	$1/8$
5	1 0 1	0. 1 0 1	$5/8$

2. Van der Corput 列.

Van der Corput 列のつくり方を示す。

1) 定義にしない n ビットの正の整数をビット反転し
 n ビット右に桁移動し、小数化する。

2)

$$(2k+1)^* = (1 + k^*)/2, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$3) \quad (k+2^n)^* = k^* + 2^{-n-1} \\ 0 \leq k < 2^n, \quad n=0, 1, \dots$$

区間 $[0, 1)$ 上に分布する ℓ 個の実数 $\{k^*; 0 \leq k < \ell\}$ を $\lambda_k = \exp(2\pi i k^*)$ によって, 複素平面上の単位円周にうつし, ℓ 個の零点を

$$\omega_\ell(z) \equiv \prod_{0 \leq k < \ell} (z - e^{2\pi i k^*}) = \prod (z - \lambda_k) \quad (2a)$$

とすれば, これは高々 n 個の円周等分多項式の積

$$\omega_\ell(z) = \prod_{\nu=1, \ell_\nu \neq 0}^n (z^{2^{\nu-1}} + \lambda_\ell^{2^{\nu-1}}) \quad (2b)$$

ただし $\ell = \ell_1 2^0 + \ell_2 2^1 + \dots + \ell_n 2^{n-1}$, $\ell_n = 1$ として表すことができる²⁾.

簡単のため $\zeta = \bar{\lambda}_\ell z$ と変数変換すれば

$$\omega_\ell(z) = \lambda_\ell^\ell \prod_{\nu=1, \ell_\nu \neq 0}^n (\zeta^{2^{\nu-1}} + 1) \quad (2c)$$

となる. したがって $|\omega_\ell(z)|$ の最大値は $z = \lambda_\ell$ ($\zeta = 1$) のとき達成される. 上式より $\omega_\ell(z)$ の根が単位円周上一様分布することは明らかであり, Van der Corput 列の最大の特長は (2c) の表示にあるといつてよい.

補間法の数値的安定性は Lagrange 多項式

$$l_k(z) = \frac{\omega_k(z)}{(z - \lambda_k) \omega_k'(\lambda_k)}, \quad 0 \leq k < l$$

の大きさによって支配される。

以下 Lagrange 多項式の幾何平均, 算術平均について述べることにする。

3. Lagrange 多項式の幾何平均

単位円周上の l 個の標本点 $\lambda_k, 0 \leq k < l$ に対し l 次の Vandermonde の行列式を

$$V_l(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{l-1} \\ - & - & \dots & - \\ \lambda_0^{l-1} & \lambda_1^{l-1} & \dots & \lambda_{l-1}^{l-1} \end{bmatrix}$$

と書けば, よく知られてゐるように

$$= \prod_{0 \leq i < j < l} (\lambda_j - \lambda_i).$$

また

$$V_{l+1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \omega_l(\lambda_l) V_l(\lambda_0, \dots, \lambda_{l-1}).$$

単位円周上における $\omega_l(z)$ の絶対値最大を M_l とおけば
(2c) より

$$M_\ell \equiv \max_{|z|=1} |\omega_\ell(z)| = |\omega_\ell(\lambda_\ell)| = 2^{\sum \ell_\nu} \quad (3)$$

すなわち左辺は ℓ のビット1の個数だけに定まる.

$$-\frac{1}{\lambda}$$

$$\prod_{0 \leq k < \ell} \ell_k(z) = \frac{\omega_\ell(z)^{\ell-1}}{\prod_{j \neq k} (\lambda_j - \lambda_k)}$$

$$= (-1)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}} \omega_\ell(z)^{\ell-1} / V_\ell(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1})^2$$

であるから Lagrange 多項式の幾何平均 $G_\ell(z)$

$$G_\ell(z) \equiv \left\{ \prod_{0 \leq k < \ell} |\ell_k(z)| \right\}^{1/\ell}$$

の最大値 G_ℓ は, $z = \lambda_\ell$ のとき達成されて

$$G_\ell = |G_\ell(\lambda_\ell)| = \left(M_\ell^{\ell+1} / \prod_{0 \leq k \leq \ell} M_k^2 \right)^{1/\ell} \quad (4)$$

が成立する.

右辺は標本数 ℓ だけに依存するが, さらにくちしく見ると
これは行列式 $V_{\ell+1}(\lambda_0, \dots, \lambda_\ell)$ を評価する.

また

$$|V_{\ell+1}(\lambda_0, \dots, \lambda_\ell)| = \prod_{0 \leq k \leq \ell} M_k$$

に注意する. 右辺の $M_0, M_1, \dots, M_\ell$ に対し高々 n ビット
の $\ell+1$ 個の整数 $0 \leq k \leq \ell$ を $\ell+1$ 行 n 列の行列で2進

表示する。この長方形行列の要素は 0, 1 であり, ほぼ等しく
に分布している。1 の個数が Van der Monde 行列式の値を
決定する。長方形行列は $\ell+1$ 次元の列ベクトル $\mathbf{v}^T$ からなると
見る。最後尾の n 列では

$$(0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots) ^T$$

と分布する。0 と 1 の個数の差は, 要素の総数 $\ell+1$ の偶奇に
依って 0, 1 を取る。いざこれ = (2 も 0 の方が高い $2^0 = 1$ 個
だけ多い。 $n-1$ 列は $(0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots) ^T$ と分布
し, $\ell=1$ 無関係に 0 の ~~個~~ ^位 が, 1 より高い $2^1 = 2$ 個多い。

以下同様。1 から ℓ までの整数の 2 進表示の 1 の個数を
 $\mu(\ell)$ とおけば, 前述したことから

$$\frac{1}{2} \{(\ell+1)n - 2^{n+1}\} \leq \mu(\ell) \leq \frac{1}{2}(\ell+1)n \quad (5)$$

ただし $n = \lceil \log_2 \ell \rceil + 1$.

ℓ の桁数だけでなくビット 1 の個数

$$\beta(\ell) = \sum_{v=1}^n \ell_v$$

や, その位通が判るとすれば, すなわち

$$\ell = 2^{\lambda_1} + 2^{\lambda_2} + \dots + 2^{\lambda_m}, \quad m = \beta(\ell)$$

ならば

$$\mu(l) = \rho(l) + \sum_{1 \leq k \leq \rho(l)} \left(\rho(l) - k + \frac{1}{2} \right) 2^{1-k}$$

が得られる。(証明略)

例. $l = 6$ ならば $6 = 2^1 + 2^2$. したがって $\rho(6) = 2$,
 $\mu(6) = 2 + (2-1+\frac{1}{2})2^1 + (2-2+\frac{2}{2})2^2 = 2+3+4=9$.

実際, 1 から 6 までは 2 進表示すれば

1, 10, 11, 100, 101, 110

であり, ビット1の個数は9個である.

以上の議論から次の結果を得る.

定理1. 単位円周上に分布する l 個の点 $\lambda_k = e^{2\pi i k/l}$,
 $0 \leq k < l$ から作られる Lagrange 多項式の幾何平均 $G_l(z)$
 の単位円周上における最大値 G_l は, $z = \lambda_l$ のとき達成され
 て

$$G_l = 2^{\rho(l)(1+1/2)} / 2^{2\mu(l)/l}$$

と表わされる.

不等式 (5) を用いて, G_l の上下からの評価を得る.

系1.

$$\left(2^{\rho(l)-n} \right)^{1+1/2} < G_l < \left(2^{\rho(l)-(n-1)} \right)^{1+1/2}$$

l が十分大きければ

$$2^{\beta(l)-n} \lesssim G_l \lesssim 2^{\beta(l)-n+1}$$

と簡単化される。

標本数 l のビット 1 の個数は, 1 以上高々 n であるから

$$2^{-(n-1)} \leq G_l \leq 2$$

となる。左辺の不等式が成り立つのは $\beta(l)=1$ となるとき

l が 2 のべき 2^{n-1} の場合であり, 右辺の不等式が対応する場合は $\beta(l)=n$, すなわち l のビットがすべて 1 のときである。 $\beta(l)$ を一定とし $2n$ を 1 増せば, すなわち l を $2l$ と倍加すれば, G_{2l} は G_l の約 $1/2$ となる。

以上のことを補間法の数値的安定性の立場から解釈するならば, 標本数は, それを 2 進表示したときビット 1 の個数が少なくなるような数であることが望ましい。たとえば 2 のべき, あるいはその 3 倍, 5 倍等の数である。Lagrange 多項式の幾何平均が, その次数に無関係に有界であるという事実は単位円周上の一様分布列の著しい特徴である。

4. Lagrange 多項式の算術平均。— Lebesgue 定数 —
前節に用いた l 次多項式 $\omega_l(z)$ は, 高々 $[\log_2 l] + 1$ 個の円周等分多項式の積に分解されることを述べたので, 以下

$$\omega_\ell(z) = \prod_{\nu=1, \ell_\nu \neq 0}^n (z^{2^{\nu-1}} + 1) \quad (6)$$

と仮定する. いま λ についても Lagrange 多項式は

$$L_\lambda(z) = \frac{\omega_\ell(z)}{(z-\lambda)\omega'_\ell(\lambda)}, \quad \lambda \in \{\omega_\ell(\lambda)=0\}$$

である. Lebesgue 関数

$$\Lambda_\ell(z) = \sum_{\lambda} |L_\lambda(z)|, \quad |z|=1$$

を単位円周上で評価することが問題にある.

等間隔分布の場合, 右から $\Lambda_\ell(1) = \frac{2}{\pi} \log \ell + O(1)$ で発散することが知られている³⁾. Lebesgue 関数の最大値は等間隔分布する標本点の丁度中点で実現される.

等間隔分布する場合の標本数をあらためて N とおき, どのような関数を入力したとき, $\Lambda_N(z)$ となるかを考える. いま, $\lambda \in \{\lambda^{N+1}=0\}$ であるから, 入力の関数として

$$\frac{|L_\lambda(1)|}{L_\lambda(1)} = \frac{|1-\lambda|}{1-\lambda} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

とすればよい. 平方根は正の実軸にカットを入れ上半平面の値をとるものとする. 三角関数の選定直交関係より

$$\Lambda_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq k < N} \frac{z^k}{\sin \frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})}, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{N}$$

が得られる.

任意の定積分 $\int_0^1 f(t) dt$ に対する 2^n 項の中矢公式による
積分を $\int_0^1 f(t) d\mu_n(t)$ で表わせは,

$$\Lambda_N(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\lambda \sin N\theta|}{\lambda \sin \theta} d\mu_n(\theta), \quad N = 2^n \quad (7)$$

と書ける.

上2等間隔分布の場合を予備として, “準等間隔分布”
の場合を考える. 標本矢は円周等分多項式 $z^{2^v} + 1$ の零矢の
積集合であるから Lebesgue 関数の最大値は, それらの共通
の中矢, たとえば $z = 1$ と考えられる. 直観的には殆んど
明らか (実験的にも多くの例で確かめた) であるが証明でき
ないので, 本論文では ^{これ}事実として仮定する.

再び多項式 (6) に即して考える. $\lambda \in \{\lambda^{2^{v-1}} + 1 = 0\}$ ならば

$$\omega'_\lambda(\lambda) = \left(\prod_{k > v, \lambda_k \neq 0} 2 \cdot \prod_{k < v, \lambda_k \neq 0} (1 + \lambda^{2^{k-1}}) \right) \cdot 2^{v-1} \lambda^{2^{v-1}-1}$$

であるから Lagrange 多項式は

$$l_\lambda(z) = \frac{\omega'_\lambda(z)}{z^{2^{v-1}} + 1} \cdot \left\{ \frac{1}{2^{v-1}} \cdot \frac{z^{2^{v-1}} + 1}{1 - z\lambda} \cdot \prod_{\substack{k > v \\ \lambda_k \neq 0}} 2 \cdot \prod_{\substack{k < v \\ \lambda_k \neq 0}} (1 + \lambda^{2^{k-1}}) \right\}$$

と表わされる. ただし積 $\prod_k$ において番号 k が動く集合が
空ならば, この積は 1 とする. 以下同様,

こゝより $\lambda = e^{it}$ とおけば

$$|\ell_\lambda(1)| = \frac{1}{2^{v-1} \sin \frac{t}{2}} \cdot \prod_{\substack{k < v \\ \lambda_k \neq 0}} \left| \cos 2^{k-1} \frac{t}{2} \right|$$

標本数 ℓ の 2 進展開を

$$\ell = 2^{p-1} + \ell_{p+1} 2^p + \cdots + 2^{v-1} + \ell_{v+1} 2^v + \cdots + 2^{n-1}, \quad p \geq 1$$

とすると

$$\sin 2^{p-1} \theta \prod_{k=p}^{v-1} \cos 2^{k-1} \theta = 2^{-v+p} \sin 2^{v-1} \theta$$

こゝを使って

$$|\ell_\lambda(1)| = \frac{2^{v-p} \left| \sin 2^{p-1} \frac{t}{2} \right|}{2^{v-1} \sin \frac{t}{2}} \prod_k \left| \cos 2^{k-1} \frac{t}{2} \right|$$

ただし k の動く範囲は $p \leq k < v$ かつ $\lambda_k \neq 0$ である。

したがって

$$\begin{aligned} \sum_\lambda |\ell_\lambda(1)| &= \frac{2^{v-p}}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin 2^{p-1} \theta|}{\sin \theta} \prod_k |\cos 2^{k-1} \theta| d\mu_{v-1}(\theta) \\ &= 2^{v-p} \prod_k |\cos 2^{k-1} \theta_3| \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin 2^{p-1} \theta|}{\sin \theta} d\mu_{v-1}(\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

こゝで積分に關する平均値の定理を使った。 θ_3 は

$\frac{\pi}{2^v} < \theta_3 < \pi - \frac{\pi}{2^v}$ を満たす適当な点である。中身各式の標本点は $\frac{\pi}{2^{v-1}}(j + \frac{1}{2})$, $0 \leq j < 2^{v-1}$ であるこゝから

$$\prod_k \sin 2^{k-v-1} \pi < \prod_k |\cos 2^{k-1} \theta_3| < \prod_k \cos 2^{k-v-1} \pi.$$

~~これは~~ $C_{p,v}$ とおけば、これは 1 より小さい正数である。
 中の項

ただし k の動く範囲が空集合なら 1 であり 2 に注意.

さらに簡単のため

$$f_{m,n} \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin 2^m \theta}{\sin \theta} \right| d\mu_n(\theta) \quad (9)$$

とおく. 明らかに

$$f_{0,n} = 1, \quad n \geq 0$$

$$f_{n,n} = A_{2^n}(1), \quad f_{n-1,n} = f_{n,n} / \sqrt{2}$$

である. この計算結果を示す.

$f_{m,n}$ の数表

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
1	1.4142						
2	1.3066	1.8478					
3	1.2815	1.6172	2.2870				
4	1.2753	1.5678	1.9288	2.7278			
5	1.2738	1.5559	1.8556	2.2408	3.1689		
6	1.2734	1.5530	1.8381	2.1438	2.5528	3.6102	
7	1.2733	1.5523	1.8338	2.1207	2.4320	2.8648	4.0514
8		1.5521	1.8327	2.1151	2.4034	2.7203	3.1768
9			1.8325	2.1136	2.3964	2.6862	3.0085
10					2.3946	2.6798	2.9689

この数値例からみると $f_{m,n}$ は, m, n に関し, 下列の

は単調減少, 単調増加の傾向を示す.

以上のことから次の結果を得る.

標本数 l の 2 進表示を

$$l = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \dots + 2^{\nu_m}$$

とすると Lebesgue 定数は

$$\Lambda_l(1) = 2^{-\nu_1} \sum_{k=1}^m 2^{\nu_k} C_{\nu_1, \nu_k} f_{\nu_1, \nu_k} \quad (10)$$

と表わされる.

上式が簡略化される特別な場合を述べる.

$$1) \quad l = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \text{のとき, } f_{0, k} = 1,$$

$$C_{0, k} = 1 \quad \text{と仮定する}$$

$$\Lambda_{2^n-1}(1) = 2^n - 1.$$

$$2) \quad l = 2^\nu + 2^{\nu+1} + \dots + 2^n, \quad \nu < n \quad \text{のとき, } C_{\nu, k} = 1,$$

$$k > \nu \quad \text{と仮定する}$$

$$\Lambda_{2^{n+1}-2^\nu}(1) = 2^{-\nu} \sum_{k=\nu}^n 2^k f_{\nu, k}.$$

$$\nu < 1 = 3 \cdot 2^{n-1} \quad \text{のとき}$$

$$\Lambda_{3 \cdot 2^{n-1}}(1) = 2^{-(n-1)} (2^{n-1} f_{n-1, n-1} + 2^n f_{n-1, n})$$

$$= f_{n-1, n-1} + 2 f_{n-1, n}$$

$$= \Lambda_{2^{n-1}}(1) + \sqrt{2} \Lambda_{2^n}(1).$$

3) $l = 1 + 2 + \dots + 2^{\nu-1} + 2^n = 2^n + 2^{\nu-1}$, $\nu \leq n$ のとき

$$\Lambda_{2^n+2^{\nu-1}}(1) = 2^{\nu-1} + 2^{\nu} \Lambda_{2^{n-\nu}}(1)$$

が得られる。とくに興味があるのは 2^n+1 のときであって

$$\Lambda_{2^n+1}(1) = 1 + 2 \Lambda_{2^{n-1}}(1).$$

これは 2^n-1 の場合と比べるべくもない。

標本数を倍々に増してゆくとき, Lebesgue 定数の漸近的増大の傾向は, 標本数 l のビットパターンによって著しく異なる。任意の 2 のべき乗と 1 との素な数 p を基準にして, それを 2 倍にして Lebesgue 定数と “階差” を求めたものが次の Lebesgue 定数表である。

標本数を 2 倍にしたときの階差は一定となるので, 標本数を倍々に増やすとき Lebesgue 定数は対数オーダーで発散する。

階差が小さい順序にビットパターン (p の 2 進表示) を列挙すれば $p = 1, 3, 5, 9, \dots$ である。いずれもビット 1 の個数 $\beta(p)$ が小さい程階差も小さい。

これらのことは Lebesgue 定数の一般的表现 (10) から判ることである。Lebesgue 定数の増大が対数オーダーから線形オーダーに変わるのは $\Lambda_{2^n-1}(1) = 2^n-1$ の場合である。

Lebesgue 定数表 $\Lambda_{p,2^k}$

k	2^k	Λ_{2^k}	$\Delta \Lambda$	$\Lambda_{3 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$	$\Lambda_{5 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$
0	1	1.000	0.414	3.000	1.027	3.828	1.211
1	2	1.414	0.434	4.027	1.055	5.039	1.243
2	4	1.848	0.439	5.082	1.063	6.282	1.253
3	8	2.287	0.439	6.145	1.064	7.535	1.256
4	16	2.728	0.441	7.209	1.065	8.791	1.257
5	32	3.169	0.441	8.274	1.066	10.048	1.256
6	64	3.610	0.441	9.340	1.065	11.304	
7	128	4.051		10.405			

k	2^k	$\Lambda_{7 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$	$\Lambda_{9 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$	$\Lambda_{11 \cdot 2^k}$	$\Delta \Lambda$
0	1	7.000	2.153	4.696	1.393	8.657	2.584
1	2	9.153	2.200	6.089	1.434	11.241	2.643
2	4	11.353	2.214	7.523	1.446	13.884	2.659
3	8	13.567	2.217	8.969	1.450	16.543	
4	16	15.784	2.218	10.419	1.450		
5	32	18.002	2.219	11.869			
6	64	20.221					

前節で述べた Lagrange 多項式の幾何平均との関連で算術平均 $A_\ell \equiv \Lambda_\ell(1)/\ell$ についてみるならば、上界は $1/2$ 、下界は $O(\log \ell / \ell)$ である。

5. おわりに

単位円周上に分布する Vander Corput 列の中実 (前節では一例として $\alpha=1$ とした) の Lebesgue 関数は最大値をとるといふ推測の下で Lebesgue 定数を求めた。この推測は杉浦洋君の数多い数値実験より生れたものである。

参考文献

- 1) L. Kuipers and H. Niederreiter: Uniform Distribution of Sequences, Chap. 2, John Wiley and Sons, Inc. (1974)
- 2) 島田達生, 長谷川武夫, 二宮幸三: 等差数列的に標本数 ε 以内の補内積自動積分法, 情報処理, Vol. 19, pp 248-255 (1978)
- 3) A. Zygmund: Trigonometric Series, vol. II, chap. 10, Cambridge at the University Press (1959), second edition.