

葉層構造と Weil コホモロジー類

北大理 鈴木治夫 (Haruo Suzuki)

C^∞ -多様体 M 上の C^2 -葉層構造 F に対し, "葉成分" de Rham コホモロジー群の元は F の定義イデアルを de Rham コチェイン複体の部分複体とみて得られるコホモロジー群から, M の de Rham コホモロジー群への準同形写像を定める。

J. Heitsch と S. Hurder [HH] による Weil 作用素は, このよう
に "葉成分" de Rham コホモロジー群の元の一つとみ直すことが
できる。

まず Weil 測度に基づき, S. Hurder と A. Katok [HK] による葉層 2 次特性類の自明性に関する結果を説明し, ついで葉層ホロノミー亜群における横断測度のモジュラ・コホモロジー類の一般化として, Weil 作用素に対応するホロノミー亜群のコホモロジー類を構成する。 §1 は Weil コホモロジー類の構成, §2 は Weil 測度の説明, §3 は葉層構造の軟化 (tempered) コサイクルと柔順性 (amenability) の概念の導入による Weil 測度の消滅定理であり, I 形葉層構造に対する次元差的

(redidual) 2次特性類の自明性を導く。 §4 は高次元モジュラ・コホモロジー類の構成に当てる。

§1. Weilコホモロジー類

M は n 次元閉 Hausdorff C^∞ -多様体, $(M, \mathcal{F})$ を余次元 q の C^2 -葉層構造とする。 $A(M)$ は M の de Rham 複体, $A(M, \mathcal{F}) \subset A(M)$ は $\mathcal{F}$ の定義イデアルとする。 $\mathcal{F}$ の積分可能性によって, $A(M, \mathcal{F})$ は外微分作用素 d に関して閉じており, したがって $A(M)$ の部分複体となる。 $H_{DR}^*(M)$, $H^*(M, \mathcal{F})$ をそれぞれ M の de Rham コホモロジー群, $A(M, \mathcal{F})$ のコホモロジー群とする。 M 上に一つの Riemann 計量をとることにより, 接ベクトル束 $T(M)$ は $\mathcal{F}$ の葉に接する部分ベクトル束 $T(\mathcal{F})$ とその法ベクトル束 $V(\mathcal{F})$ との Whitney 和 $T(M) = T(\mathcal{F}) \oplus V(\mathcal{F})$ に分解し, $A(M)$ の微分形式は2重次数をもつが, その葉方向の外微分を $d_{\mathcal{F}}$ とすると $d_{\mathcal{F}} \circ d_{\mathcal{F}} = 0$ がいえる。 この $d_{\mathcal{F}}$ に関する, 横断次数 0 , 葉次数 s のコホモロジー群を $H_{\mathcal{F}DR}^{0,s}(M)$ と書き, $(M, \mathcal{F})$ の次数 $(0, s)$ の "葉成分" または 葉層 de Rham コホモロジー群 とよぶ。 鈴木 $[S_1, S_2]$ により, 準同形写像 $\chi: H_{\mathcal{F}DR}^{0,s}(M) \rightarrow \text{Hom}(H^*(A, \mathcal{F}), H_{DR}^{0,s}(M))$ が, $[z] \in H_{\mathcal{F}DR}^{0,s}(M)$, $[\varphi] \in H^*(A, \mathcal{F})$ に対して,

$$(\chi([z]))([\varphi]) = [z \wedge \varphi]$$

で与えられる。

θ^b, θ^r をそれぞれ $V(F)$ 上の Bott 接続, Riemann 接続とするとき, $\theta = t\theta^b + (1-t)\theta^r$ ($t \in \mathbb{R}$) は $V(F) \times \mathbb{R}$ 上の接続を定める。 θ の曲率形式を Ω^{br} , c_i を i 次 Chern 多項式とし, i は内部積を表わすものとすると,

$$h_i(\theta^b, \theta^r) = \int_0^1 i(\partial/\partial t) c_i(\Omega^{br}) dt$$

とある。 θ^b, θ^r の曲率形式をそれぞれ Ω^b, Ω^r とかくことにすると, i が奇数のとき Ω^r は歪対称であるから $c_i(\Omega^r) \equiv 0$ と反り, 1 に代って

$$\begin{aligned} dh_i(\theta^b, \theta^r) &= c_i(\Omega^b) - c_i(\Omega^r) \\ &= c_i(\Omega^b) \end{aligned}$$

とある。 鈴木 [S] により, i が奇数ならば h_i の $(0, 2i-1)$ 成分 $(h_i)_{0, 2i-1}$ は F の葉方向の外微分 d_F に関し閉となり, そのコホモロジー類

$$[(h_i)_{0, 2i-1}] \in H_{\text{FDR}}^{0, 2i-1}(M)$$

は θ^b, θ^r のえらび方によらない。

$I(GL(q; \mathbb{R})) \cong \mathbb{R}[c_1, c_2, \dots, c_q] \subset GL(q; \mathbb{R})$ のリ-環 gl_q の随伴不変多項式から成る次数つき環とし, $I(GL(q; \mathbb{R}))_q = I(GL_q; \mathbb{R}) / (\deg > 2q)$ とおく。 $\wedge(y_1, y_3, \dots, y_\ell)$ ($\ell = 2\lfloor q/2 \rfloor - 1$) は $\{y_1, y_3, \dots, y_\ell\}$, $\deg y_i = 2i-1$ によって生成される次数つき交代多元環とする。 微分作用素 d をもつ次数つき多元環を

$$WO_g = \wedge(y_1, y_3, \dots, y_e) \otimes I(GL(g; \mathbb{R})_g,$$

$$d(y_i \otimes 1) = 1 \otimes c_i,$$

$$d(1 \otimes c_i) = 0$$

によって定める。微分作用素をもつ次数つき多元環の間の準同形写像 $\Delta = \Delta(\theta^b, \theta^r) : WO_g \rightarrow A(M)$ を

$$\Delta(y_i \otimes 1) = \tilde{r}_i(\theta^b, \theta^r),$$

$$\Delta(1 \otimes c_i) = c_i(\omega^b)$$

と定めると、これはコホモロジー準同形写像 $\Delta_* : H^*(WO_g) \rightarrow H_{DR}^*(M)$ を引き起こす。 Δ_* は θ^b, θ^r のどちらによらない。 $\chi[(\tilde{r}_i)_{0, 2v-1}] : H^*(M, \mathbb{F}) \rightarrow H_{DR}^{*+2v-1}(M)$ は Weil 作用素 $\chi(y_i)$ と一致するのより、 $[(\tilde{r}_i)_{0, 2v-1}] \in \underline{\text{Weil}}$ のコホモロジー類と呼ぶことにする。

§2. Weil 測度

$\pi : P \rightarrow M$ は法バクト W 束 $V(\mathcal{F})$ の g -枠から成る、主 $GL(g; \mathbb{R})$ -束とする。 $GL(g; \mathbb{R})$ は P の右から作用する。 $V(\mathcal{F})$ 上の C^2 -Riemann 計量 r は C^2 -断面写像 $s_r : M \rightarrow P/O_g$ を定める。 $S(\mathfrak{gl}_g^*)$ はリ-環 $\mathfrak{gl}_g$ の双対空間 $\mathfrak{gl}_g^*$ の対称多元環とし、各 $\alpha \in \mathfrak{gl}_g^* \in S(\mathfrak{gl}_g^*)$ の次数 2 の元 $\tilde{\alpha}$ とみなす。 $S(\mathfrak{gl}_g^*)_g = S(\mathfrak{gl}_g^*) / (\deg > 2g)$ とおく。截端 (truncated) Weil 多元環とは、微分作用素 d をもつ次数つき多元環 $W(\mathfrak{gl}_g)_g$ を、

$$W(\mathfrak{gl}_g)_g = \wedge \mathfrak{gl}_g^* \otimes S(\mathfrak{gl}_g^*)_g,$$

$$d = d' + d'',$$

$$d'\alpha = d \wedge \alpha,$$

$$i(\omega)d'\tilde{\alpha} = \Theta(\omega)\tilde{\alpha}, \quad \Theta(\omega) = -(\text{ad } \omega)^*, \quad \forall \omega \in \mathfrak{gl}_g$$

$$d''\alpha = \tilde{\alpha},$$

$$d''\tilde{\alpha} = 0$$

となるものである。 $W(\mathfrak{gl}_g)_g$ の中で O_g -基底形式, すなわち O_g のリ-環 O_g の任意の元 α に対し $i(\alpha)$ を施すと 0 になり, O_g の元の随伴変換で不変な形式全体から成る $W(\mathfrak{gl}_g)_g$ の d -不変部分環を $W(\mathfrak{gl}_g, O_g)_g$ とかく。 WO_g の $1 \otimes C_i$ を $C_i \in S(\mathfrak{gl}_g^*)_g$ に対応する $1 \otimes C_i$ と同一視し, $y_i \otimes 1$ に対して微分作用素が可換となるように $\bar{y}_i \in \wedge \mathfrak{gl}_g^* \otimes S(\mathfrak{gl}_g^*)_g$ を定めることにより, WO_g は $W(\mathfrak{gl}_g, O_g)_g$ の部分環と取扱うことができてこの対応は同形写像

$$H^*(WO_g) \cong H^*(W(\mathfrak{gl}_g, O_g)_g)$$

を引きおこす。(C. Godbillon [G] 参照.)

$V(\mathbb{F})$ の上の Bott 接続 θ^b は枠束 P 上の接続を定め, したがって微分作用素をもつ次数つき多元環の写像

$$R(\theta^b) : W(\mathfrak{gl}_g, O_g)_g \rightarrow A(P/O_g),$$

$$R(\theta^b)\alpha = \alpha \theta^b,$$

$$R(\theta^b)\tilde{\alpha} = \alpha \Omega^b$$

を定める。 F. Kamber と Ph. Tondeur [KT, 123-125] に
よれば,

$$\Delta(\theta^b, \theta^r) = ds_r^* \circ R(\theta^b)|_{W\mathcal{O}_g} : W\mathcal{O}_g \rightarrow A(M)$$

となる。 $\tau : W(\mathfrak{gl}_g, \mathcal{O}_g)_g \rightarrow \wedge \mathfrak{gl}_g^*$ は第 1 因子への射影写像
とし $\tau_i = \tau(\bar{y}_i)$ とおく。 $R(\theta^b)(S(\mathfrak{gl}_g^*)) \wedge \tau^* A(M, \mathbb{F}) = 0$ であ
ることから,

$$\begin{aligned} h_i &= ds_r^* \circ R(\theta^b)(\bar{y}_i) \quad \text{mod } A(M, \mathbb{F}) \\ &= ds_r^* \circ R(\theta^b)(\tau_i \otimes 1) \quad \text{mod } A(M, \mathbb{F}) \end{aligned}$$

となる。 (U, π) は局所葉層座標, $s : U \rightarrow P|_U$ は局所正規
直交 C^2_g -枠場で, s_r のリフトとなるものとする。 $L \subset U$
における連結葉 (plaque) とすると, L は可縮 $\theta^b|_L$ は平坦だ
から, $P|_L \cong \mathbb{R}^{n-g} \times GL(g; \mathbb{R})$ で, $GL(g; \mathbb{R})$ の左不変ベクトル
場 X および $\mathbb{R}^{n-g} = L$ の座標 y に対して

$$\theta^b(\partial/\partial y, X) = X$$

となる。 s に対して, C^2 -写像 $g : L \rightarrow GL(g; \mathbb{R})$ が定まり,
 $s(y) = (y, g(y))$ と表わされることから,

$$\begin{aligned} \theta^b \circ ds(\partial/\partial y) &= \theta^b(\partial/\partial y, dg(\partial/\partial y|_{g(y)})) \\ &= g(y)^{-1} dg(\partial/\partial y|_{g(y)}) \end{aligned}$$

を得る。 $\mathfrak{gl}_g$ -値 1 次形式 $A_s = g^{-1} dg : T(\mathbb{F})|_U \rightarrow \mathfrak{gl}_g$ は
 $A_s(\partial/\partial y|_y) = g(y)^{-1} dg(\partial/\partial y|_{g(y)})$

によって定めると,

$$\begin{aligned}
A_s^*(\tau_i) &= ds^* \circ R(\theta^b)(\tau_i \otimes 1) \\
&= ds^* \circ R(\theta^b)(\bar{y}_i) \quad \text{mod } A(M, \mathbb{F}) \\
&= ds_r^* \circ R(\theta^b)(\bar{y}_i)
\end{aligned}$$

と反る。したがって

$$h_i = A_s^*(\tau_i) \quad \text{mod } A(M, \mathbb{F})$$

がいえる。

$\{(U_\alpha, \pi_\alpha)\}_{\alpha=1}^d$ は F の局所葉層座標近傍による M の有限開被覆とし, $P_\alpha = P|_{U_\alpha}$ とおく。Riemann 計量 s_r の U_α 上への制限を $s_{r,\alpha} : U_\alpha \rightarrow P_\alpha/O_q$ とかく。これは局所正規直交 q -枠場 $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow P_\alpha$ にもち上げられる。一般に $\{t_\alpha : U_\alpha \rightarrow P_\alpha\}$ は可測局所 q -枠場の集合とすると, 可測関数 $\alpha_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow O_q$ が存在し,

$$t_\alpha(x) \alpha_{\alpha\beta}(x) = t_\beta(x) \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

と反る反らば, $\{t_\alpha\}$ は O_q -関係にある という。 $p \in$

$GL(q; \mathbb{R})$ 上の左不変 Riemann 計量と同時に O_q の右作用で不変なものとする。 p は対称空間 $S_q = GL(q; \mathbb{R})/O_q$ 上の Riemann 計量 $\bar{p}$ を引き起こす。また s_r は C^2 -同相写像 $\bar{T} : P/O_q \cong M \times S_q$ を定める。

P/O_q の断面写像 s に対して

$$\|s\| = \text{ess. sup}_{x \in M} \bar{p}(\bar{T} \circ s(x), \bar{id})$$

と定めると, これは半ノルムと取る. g_b -値可測 p 次形式 $\omega: \wedge^p(T(M)) \rightarrow g_b$ に対し, そのノルム, 半ノルムが

$$\|\omega\| = \text{ess. sup}_{\substack{x \in M \\ v \in \wedge^p(T_x(M)) \\ |v|_x = 1}} \|\omega(v)\|$$

$$\|\omega\|_F = \text{ess. sup}_{\substack{x \in M \\ v \in \wedge^p(T_x(F)) \\ |v|_x = 1}} \|\omega(v)\|$$

によって定められる.

(M, F) における可測飽和集合族の Σ -代数 $\mathcal{B}(F)$ とし, $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^d \in \{\cup_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ に従属する 1 の分割とする. 積分の dominated convergence 定理を使い, O_b -関係にある局所 C^2 g -枠場 $\{s_{\alpha,j}\}_{j=1,2,\dots}$ を与えるが, 殆んどすべての $x \in \cup_\alpha$ に対し $\lim_{j \rightarrow \infty} s_{\alpha,j}(x) = s_\alpha(x)$ とおけるようにすることによって次の定理を得る.

定理 1 葉方向に C^2 であるような O_b -関係にある局所可測 g -枠場の集合を $\{s_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ とするとき, $\|s_\alpha\| < \infty$, $\|A_{s_\alpha}\|_F < \infty$ ならば, $[\varphi] \in H^{n-2i+1}(M, F)$, $B \in \mathcal{B}(F)$ に対して

$$\chi_B(y_i)[\varphi] = \sum_{\alpha=1}^d \int_{B \cap \cup_\alpha} \lambda_\alpha A_{s_\alpha}^*(\pi_i) \wedge \varphi$$

が定まる.

π_i は O_b -基底形式であるから, 右辺は $\{s_\alpha\}$, $\{\lambda_\alpha\}$ のとり方

によらない。

§3. 2次特性類の消滅定理

局所葉層座標近傍族 $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha=1}^d$ に対し, $T_\alpha \subset U_\alpha$ は葉に横断的な q 次元座標部分多様体で, $T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset$ ($\alpha \neq \beta$) と仮定する。 $T = \bigcup T_\alpha$ とおく。 $x \in M$ を通る葉を L_x とかく。 $T \times T$ の部分空間

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in T \times T \mid L_x = L_y\}$$

は主群構造を持ち, T 上の同値関係を定める。 $\mathcal{R}_x = \{y \in T \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$ とおく。 一般に G は完備可分距離空間の位相群とする。 $\mathcal{R}$ 上の可測 G -コサイクルは可測写像 $\psi: \mathcal{R} \rightarrow G$ で,

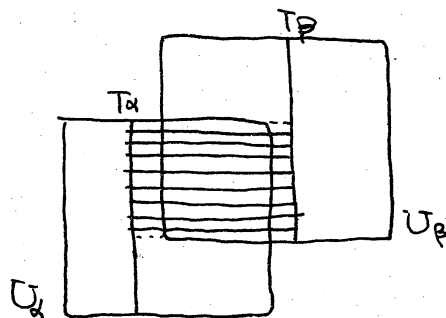
$$\psi(y, z) \psi(x, y) = \psi(x, z), \quad x \in T, \quad y, z \in \mathcal{R}_x$$

と仮定する。 二つの G -コサイクル ψ_1, ψ_2 は, 可測写像 $f: T \rightarrow G$ が存在し,

$$\psi_1(x, y) = f(y)^{-1} \psi_2(x, y) f(x) \quad (x, y) \in \mathcal{R}$$

と仮定するとき, コホモローク であるといひ, $\psi_1 \sim \psi_2$ とかく。

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき $\gamma_{\alpha\beta}$ を $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ によって定めらる T_α の開集合から T_β の開集合の上への局所 C^2 -同形写像



とする。局所 C^2 -同形写像族 $\{\gamma_{\alpha\beta} \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\}$ は擬群 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{T})$ を定める。一般に $\mathcal{G}$ の元は (或る α, β に対し) $\mathbb{R}$ の開集合から $\mathbb{R}$ の開集合の上への局所 C^2 -同形写像である。

$x, y \in \mathbb{R}$ に対し, $\{(\alpha_i, \beta_i) \mid U_{\alpha_i} \cap U_{\beta_i} \neq \emptyset, 1 \leq i \leq N\}$ が存在して

$$y = \gamma_{\beta_N, \alpha_N} \circ \cdots \circ \gamma_{\beta_1, \alpha_1}(x)$$

と仮定するとき $|x, y| \leq N$ と定める。このとき $|x, y|$ はノルムと取り $\mathbb{R}$ 上の距離 (語距離) d を定める。 $\mathbb{R}$ 上の G -コサイクル ψ に対し, 連続関数 $c: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ が存在して,

$$|\psi(x, y)| \leq c(d(x, y))$$

と仮定するとき, ψ は 軟化 (tempered) コサイクル と呼ぶ。よく $\mathbb{R}$ 上の $GL(q; \mathbb{R})$ -コサイクル ψ が存在し, 任意の $\gamma \in \mathcal{G}$ および γ の定義領域の殆んどすべての点 x に対し

$$d\gamma(x) = \psi(x, \gamma(x))$$

と仮定。この ψ を $d\gamma$ で表わし, $\mathbb{R}$ に対する 逐 (変換) コサイクル と呼ぶ。

$\text{tr}(SL_q) = 0$ であることから, まず次のことがいえる。

定理 2 $V(\mathcal{T})$ の枠束 P が主 $SL(q; \mathbb{R})$ 束に縮約 (reduce) されるならば,

$$A_{g_\alpha}^*(\tau_i) \equiv 0 \quad \text{mod } A(M, \mathcal{T})$$

となり, したがって $B \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ に対して,

$$\chi_B(y_i) = 0.$$

位相群 H はコンパクト凸可分空間上の H の任意の連続アフィン作用が不動点をもつとき, 柔順 (amenable) であるという。S. Hunder [H] によれば, 柔順部分群 $H \subset GL(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ に対し, H のリー環を $\mathfrak{h}$, その極大コンパクト部分群を $J = H \cap O_{\mathfrak{g}} \subset H$ とするとき, 自然準同形写像

$$H^i(\mathfrak{gl}_{\mathfrak{g}}, H) \rightarrow H^i(\mathfrak{h}, J) \quad i > 1$$

は 0 写像となる。ただし $H^i(\mathfrak{gl}_{\mathfrak{g}}, H)$ は $\wedge^i \mathfrak{gl}_{\mathfrak{g}}^*$ の H -基底形式環 $(\wedge^i \mathfrak{gl}_{\mathfrak{g}}^*)_H$ の i -次元コホモロジーを表わすものとする。

$H^i(\mathfrak{h}, J)$ についても同様。このことと定理 1 から次のことがいえる。

定理 3 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow GL(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ が軟化コサイクルで, $\psi \sim d\chi$ と仮り, P が主柔順群束に縮約されるならば, $i > 1$ に対して $A_{\mathfrak{g}_\alpha}^*(\pi_i) \in \text{Im}(d\psi_i)$ と仮り, i が偶数

$$\chi_B(y_i) = 0.$$

K をコンパクト凸空間とし, $\psi \in K$ のアフィン自己同形写像全体の群 A は K に値をもつ $\mathbb{R}$ 上のコサイクルとする。

任意のこのようなコサイクル ψ に対し, 不変断面写像, すなわち可測写像 $h: T \rightarrow K$ で

$$\psi(x, y) h(x) = h(y) \quad \forall (x, y) \in T$$

と仮るものが存在するならば, $\mathbb{R}$ は 柔順 であるという。集

合 $X \subset T$ は $x \in X$ ならば $\mathcal{R}_x \subset X$ となるとき, 飽和 (saturated) であるという。 T の可測飽和部分集合族の Σ -代数を $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ とかく。可測飽和部分集合 A は, 二つの正測度をもつ互に素な飽和集合の和に分解できないとき, エルゴード的 であるという。とくに T がそれ自身エルゴード的飽和集合であるとき, $\mathcal{R}$ は エルゴード的 であるという。

$GL(g; \mathbb{R})$ の 2^b 個の極大柔順部分群の共役類に関する C. Moore [M] の結果に対応して, 次のことがいえる: ψ を柔順エルゴード的關係 $\mathcal{R}$ 上の $GL(g; \mathbb{R})$ -コサイクルとするとき, ψ は柔順部分群 $H \subset GL(g; \mathbb{R})$ に値をもつ軟化コサイクルにコホモロークとなり, $\mathcal{R}$ がエルゴード的でない場合, T は高々 2^b 個の $Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ $i=1, \dots, m$ に分解し, $\psi|_{Y_i}$ は柔順部分群 $H_i \subset GL(g; \mathbb{R})$ に値をもつ軟化コサイクルにコホモロークとなる。(S. Hurder と A. Kotok [HK, 22] 参照。) このことと定理 1, 3 とから次の結論がいえる。

定理 4 $B \in \mathcal{B}(T)$ で $T|_B$ が柔順 (すなわち $\mathcal{R}$ が柔順) ならば, $y \in H^p(g\mathbb{R}_g, O_g)$ $p > 1$ に対し

$$\chi_B(y) = 0.$$

関係形の Murray-von Neumann 分類 (J. Feldman と C. C. Moore [FM] 参照) によれば, 各 $B \in \mathcal{B}(T)$ は (測度 0 の集合を除いて) - 意的にそれぞれ T が I, II および III 形となる

ような可測飽和集合の和

$$B = B_I \cup B_{II} \cup B_{III}$$

に分解する。その中で $f|_{B_I}$ は可測断面写像をもち、 π にあがつて B_I/π は標準 Borel 測度空間となる。すなわち可測横断多様体 T が存在し、 B_I/π の上 Λ -対-に写される。定理 4 から次のことがいえる。

定理 5 $f|_B$ が I 形ならば柔順であり、 π にあがつて任意の $y \in H^p(g\mathbb{R}_g, \mathcal{O}_g)$ $p \geq 1$ に対して

$$\chi_B(y) = 0.$$

B/π の測度は B 上の絶対連続不変横断測度を引きおこすから、 $d\chi$ は $SL(g; \mathbb{R})$ に値をもつコサイクルにコホモロジーとなり、定理 2 から、

$$\chi_B(y_1) = 0.$$

以上により次の結論を得る。

定理 6 f が I 形ならば、すべての次元差的 (residual) な 2 次特性類 $y \in \mathcal{C}_2$ ($|y| = g$) は 0 となる。

§4. 葉層ホロノミー-垂降コホモロジーと高次元 Weil コホモロジー類

$(M, f) \in \mathcal{C}^2$ -葉層多様体とする。 $\gamma \in f$ の一つの葉上の点 x, y を結ぶ区分的 $\mathcal{C}^2$ -曲線弧とし、 $[\gamma] \in \gamma$ のホロノミー

同値類とする。 F のホロノミー一群は, F の葉を L と表わすとき,

$$G = G(F) = \bigcup_{F \ni L} \{(\alpha, y, [\gamma]) \mid x, y \in L, \gamma: [0, 1] \rightarrow L, \gamma(0)=x, \gamma(1)=y\}$$

によって定義される。 G は (必ずしも Hausdorff とは限らない) $2n-2$ 次元 C^2 -多様体と見る。 したがって G は一つの位相空間である。 $\partial G = \bigcup_{0 \leq n} \partial_n G$ を G の半単体的空間とする。 すなわち,

$$\partial_0 G = M,$$

$$\partial_n G = \{x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} x_n \mid x_i \in M, f_i = (\alpha_i, x_{i-1}, [\gamma_i]) \in G\}$$

$$n > 0$$

で, $\partial_0 G$ は M の位相, $\partial_n G$ は $G \times \cdots \times G$ の部分空間位相をもつものである, 写像

$$\partial_i: \partial_n G \rightarrow \partial_{n-1} G$$

$$s_i: \partial_n G \rightarrow \partial_{n+1} G \quad (0 \leq i \leq n)$$

が定義され,

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \quad (i < j),$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad (i \leq j),$$

$$\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \quad (i < j),$$

$$\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \quad (i > j+1),$$

$$\partial_i s_i = \partial_{i+1} s_i = \text{id}$$

と見るものである。

$(M, \mathcal{F})$, $(M', \mathcal{F}')$ を余次元 q の C^2 -葉層構造, $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ も $\mathcal{F}'$ に横断的且 C^2 -写像で,

$$f_0^* \mathcal{F}' = f_1^* \mathcal{F}' = \mathcal{F}$$

と仮定する。 $\mathcal{F}'$ に横断的且 C^2 -写像 $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow M'$ が存在し,

$$f_i(m) = H(m, i) \quad m \in M, \quad i = 0, 1$$

$$H^* \mathcal{F}' = \pi^* \mathcal{F}$$

($\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ は射影写像)

と仮定するば, f_0, f_1 は 葉を保つ写像 によって C^2 -ホモトピー であるといふ, $f_0 \underset{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}{\simeq} f_1$ とかく。余次元 q の葉層構造 $(M, \mathcal{F})$ は, $\mathcal{F}$ に横断的且 q 次元部分多様体 $N \subset M$ と, $\mathcal{F}$ に横断的且写像 $f: M \rightarrow N \subset M$ が存在し,

$$f \underset{\mathcal{F}, \mathcal{F}}{\simeq} \text{id}_M$$

と仮定するば, $\mathcal{F}$ -可縮 であるといふ。 $N \subset M$ の $\mathcal{F}$ -可縮部分多様体 とよぶ。 M の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ は, $\mathcal{U}$ の任意の有限個の交わりが $\mathcal{F}$ -可縮なるば, $\mathcal{F}$ -単純被覆 といふ。

θ^F, θ^V をそれぞれ $F = T(\mathcal{F})$, $V = V(\mathcal{F})$ の接続とする。

$T(M) = F \oplus V$ における接続 $\theta^F \oplus \theta^V$ を使うことによつて, M の任意の開被覆が開集合族による $\mathcal{F}$ -単純な細分をもつことばいえる。 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma} \subseteq (M, \mathcal{F})$ の局所葉層座標近傍による M の $\mathcal{F}$ -単純開被覆とする。有限部分集合 $s \subset \Sigma$ に対

12

$$U_s = \bigcap_{\alpha \in s} U_\alpha,$$

$$R_U = \{U_s\}_{s \in \Sigma}$$

とおく。 U の $\mathbb{F}$ -単純性によって、各 U_s (U_α) の中に連結葉とたゞ一点で交わる横断的族 s 次元部分多様体 N_s (N_α) と $\mathbb{F}$ -可縮写像 $r_s: U_s \rightarrow N_s$ を見出すことができる。

U に対応した位相 M_U が、その対象および射を

$$\{(x, U_s) \mid s \in \Sigma, x \in U_s\} \subset M \times R_U;$$

$$\{[(x, U_s) \rightarrow (y, U_t)] \mid s, t \in \Sigma\}$$

$$\subset \{(x, U_s) \mid s \in \Sigma, x \in U_s\} \times \{(y, U_t) \mid t \in \Sigma, y \in U_t\}$$

(共に部分空間の位相) と定めることにより得られる。

関手 $p_U: M_U \rightarrow G(\mathbb{F})$ を

$$p_U(x, U_s) = x,$$

$$p_U([(x, U_s) \rightarrow (y, U_t)]) = (x, y, [\gamma])$$

$$y = r_t(x)$$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow L_x \cap U_t \quad (C^2\text{-曲線})$$

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y$$

によって定める。実際 $L_x \cap U_t$ は可縮だから、 γ は x, y

によってホモトピーを除いてきまる。 $\mathcal{R}(M_U)$ を M_U の脈体とする。これは半単体的集合で、 p_U は半単体的写像

$$\mathcal{R}(p_U): \mathcal{R}(M_U) \rightarrow \mathcal{R}(G(\mathbb{F}))$$

を引きあかす。

$\mathcal{O}(Mn)$ の各 n -単体は

$$(x, i_0, \dots, i_n) = (x, U_{i_0}, \dots, U_{i_n}, U_{i_0}, \dots, U_{i_n}, \dots, U_{i_n})$$

$$x \in N_{i_0, \dots, i_n} \subset U_{i_0, \dots, i_n}$$

の形をもつ。 x に関し C^2 -関数と見る $\mathcal{O}(Mn)$ 上の実数値
コチェインの群を $\hat{C}^\bullet(\mathcal{O}(Mn))$ とかくと、

$$\mathcal{O}(Pn)^\#(C(G(F); \mathbb{R})) \subset \hat{C}^\bullet(\mathcal{O}(Mn))$$

および自然同形写像

$$\lambda: \hat{C}^\bullet(\mathcal{O}(Mn)) \cong C^\bullet(\mathcal{O}(Rn); C_F^2)$$

が得られる。 ここで C_F^2 は F の葉に沿って一定値をとる
 C^2 -関数の芽の層とする。 単体の重心細分作用素から、コ
チェイン写像 $k: C^\bullet(\mathcal{O}(Rn); C_F^2) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{O}(n); C_F^2)$ が

$$(kf)_{i_0, \dots, i_n}(x) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) f(x, o(i_{\sigma(0)}), \dots, o(i_{\sigma(n)}))$$

$$x \in U_{i_0, \dots, i_n}, \quad f \in C^\infty(\mathcal{O}(Rn); C_F^2)$$

によって定められ、同形写像

$$\begin{aligned} k^*: H^*(\mathcal{O}(Rn); C_F^2) &\cong H^*(\mathcal{O}(n); C_F^2) \\ &= \check{H}^*(n; C_F^2) \end{aligned}$$

を引きあかす。 以上により $k \circ \lambda \circ \mathcal{O}(Pn)^\#$ は準同形写像、

$$\Theta: H^*(G(F); \mathbb{R}) \rightarrow \check{H}^*(M; C_F^2)$$

を定める。 この Θ が同形となる場合、鈴木 [S1] の方法に
よる同形写像

$$\Phi: H_{\text{FDR}}^0(M) \cong \check{H}^1(M; \mathbb{C}_F^2)$$

と合わせて, Weil 2-形式類 $[(h_i)_{0,2v-1}]$ に対応する $H^{2v-1}(G(F); \mathbb{R})$ の元

$$m_i(M, F) = \bigoplus^i \Phi[(h_i)_{0,2v-1}]$$

を定めることができる。とくに $i=1$ に対しては, モジュラ・2-形式類 $m_1(M, F) = m(M, F)$ が得られる。
(鈴木 [S₂] 参照。)

参考文献

- [FM] J. Feldman and C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I, Trans. Amer. Math. Soc. 234(1977), 289 - 324.
- [G] C. Godbillon, Cohomologie d'algebres de Lie de champs de vecteurs formels, Seminaire Bourbaki 421.01 - 421.19 (1971/72).
- [H] S. Hurder, Foliation dynamics and leaf invariants, Comment. Math. Helvetici 60(1985), 319 - 335.
- [HH] J. L. Heitsch and S. Hurder, Secondary classes, Weil measures and the geometry of foliations, J. Differential Geometry 4(1984), 291 - 309.
- [HK] S. Hurder and A. Katok, Ergodic theory and Weil measures for foliations, Math. Sci. Res. Inst. preprint, 1984.
- [KT] F. Kamber and Ph. Tondeur, Foliated bundles and characteristic classes, Lecture Notes in Math. 493, Springer-Verlag, Berlin 1976.

- [M] C. C. Moore, Amenable subgroups of semi-simple groups and proximal flows, Israel J. of Math. 34(1979), 121 - 138.
- [S₁] H. Suzuki, An interpretation of Weil operator $\chi(y_1)$, Research Notes in Math. 131, Ed. L. A. Cordero, Differential Geometry, Pitman 1985, 228 - 244.
- [S₂] H. Suzuki, Modular cohomology class from the viewpoint of characteristic class, Research Notes in Math. 123, Ed. H. Araki and E. G. Effros, Geometric Methods in Operator Algebras, Pitman 1986, 375 - 386.