

二階楕円型偏微分方程式の無限境界値問題

名大 理 中 井 三 留

§ 1. 序

M を非完閉 m 次元 ($m \geq 2$) 可付号連結 C^∞ 多様体 M_0 の末部
即ち M_0 の相対非完閉な部分領域 M でその M_0 に因する相対境界
 α は有限個の C^3 級の単純閉超曲面からなるとする. 但し M は
 M_0 全体でもかまわぬから $\alpha = \emptyset$ の場合もある. M の理想境界
を β とする. $M \cup \alpha$ が M_0 内完閉でないと仮定しているから無
論 $\beta \neq \emptyset$ であるが, β の位相的実現方法は問題としないで単
に $\alpha \cup M \cup \beta$ が完閉位相空間となることだけを仮定する.

$M \cup \alpha$ 上次の形の二階楕円型偏微分作用素 A を考える:

$$(1) \quad Au(x) = -\frac{1}{\sqrt{a(x)}} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{a(x)} a^{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^j} \right) + \sum_{i=1}^m b^i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} + c(x) u(x),$$

こゝに $(a^{ij}(x))$ と $(b^i(x))$ は夫々 $M \cup \alpha$ 上 C^2 及び C^1 級の反変テン
ソル, $c(x)$ は $M \cup \alpha$ 上の C^1 函数で

$$(2) \quad c(x) \geq 0 \quad (x \in M \cup \alpha)$$

を満足するものとする. $a(a^{ij}(x))$ は各 $x \in M \cup \alpha$ につき対称且

真に正定付号で $(a_{ij}(x)) = (a^i_j(x))^{-1}$, $a(x) = \det(a_{ij}(x))$ とし,
加うるに次の仮定を置く:

$$(3) \quad c(x) \neq 0 \quad \text{又は} \quad \alpha \neq \emptyset.$$

$M \cup \alpha$ 内完閉集合をもつ C^1 函数 f とする時, $\alpha \cup M \cup \beta$ 上の
広義連続函数 u で $u|_M \in C^2(M)$ 且

$$(4) \quad A(u|M) = f|M, \quad u|_\alpha = 0, \quad u|_\beta = \infty$$

となる如き u を求める問題 $\pi(M, A; \alpha, \beta; f)$, いわば無
限値境界値問題を考える.

条件 (3) があるときは M 上の *Dirichlet* 問題に関する A_x の
Green 函数 $G(x, y)$ が存在することはよく知られている (9 頁
[3]). $M \cup \alpha$ の完閉集合の補集合 N で

$$(5) \quad \sup_{(x, y) \in N \times N, x \neq y} \frac{G(x, y)}{G(y, x)} < \infty$$

となるものがとれるとき, A は M 上 殆ど自己共役 と呼ぶことに
する.

上と同種の N で $\alpha \cap \bar{N} = \emptyset$ なるものを任意にえらぶとき,

$$(6) \quad \inf_{x \in N} G(x, y) > 0$$

がある $y \in M$ で, 従ってすべての $y \in M$ で, 成り立つとき,
理想境界 β は A 放物的 であるということにする.

我々の目的は次の結果に証明を与えることである:

主定理: A が殆ど自己共役且 β が A 放物的ならば, 任意の函数 f に対し問題 $\pi(M, A; \alpha, \beta; f)$ は解をもつ.

この結果は $M_0 \subset E^3$ (3次元 Euclid空間), $A = \Delta$ (Laplace作用素) の時 Evans [1] が初めて証明した. それとは独立に $M_0 \subset E^2$, $A = \Delta$ で Selberg [15] が同じ結果を得た. 彼等の名に因んでこれらの解のことを Evans ポテンシャル又は Evans-Selberg ポテンシャルと調和函数論では呼んでいる. Evans の方法が $M_0 \subset E^2$ の場合にも適用出来ることを Nashiro [13] が示した. これらの結果は二つの方向への拡張の出発点となる. 一は Δ を更に一般の楕円型作用素に広げること, 二は方程式の定義域を多様体に広げることである. 前者については $M_0 \subset E^2$ 又は E^3 で $Au = -\Delta u + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$ の場合の Inoue [2] の研究がある. 后者即ち M を多様体にする最初の試みは M が Riemann 面, $A = \Delta$ の時 Kuramochi [6] によってなされ, 同じ状況のもとに [8] が別証を与えた. それは Sario-Nashiro の教科書 [14] に詳しく紹介されている. 更に [10] は M が Riemann 面, $Au = -\Delta u + cu$ の場合で証明した.

上述の主定理は以上の諸結果の一般化であるが, 結果の報告 [12] のみで証明はこゝで初めて発表する.

§ 2. Green 函数

仮定 (3) のもとで M 上 (1) の Green 函数 $G(x, y)$ が存在すること及びそれらの基本的性質については 9 卷 [3, 4, 5] に詳しい。それらの結果は自由に使う。我々は、更に、任意に M の座標小球 B を取る時 $(x, y) \in B \times B$, $x \neq y$, に対して定義された有界函数 $\omega(x, y)$ で $1/\omega(x, y)$ も有界となるものが存在して

$$(7) \quad G(x, y) = \begin{cases} \omega(x, y) |x - y|^{2-m} & (m \geq 3) \\ \omega(x, y) \log |x - y|^{-1} & (m = 2) \end{cases}$$

が凡ての $(x, y) \in B \times B$, $x \neq y$, で成立することを本質的に使いたい。このことは 9 卷 [3] の $G(x, y)$ の構成法をみるとわかる筈であるが、ここでは B 上 (1) の Green 函数 $G_B(x, y)$ が存在して (7) を満足している (Miranda [7] の Capitolo II) ことを基礎にして、仮定 (3) のもとで M 上に (1) の Green 函数 $G(x, y)$ が存在して (7) を満足することを交代法によって示そう。

B 内に十分小さな同心球 B_0 をとり、もし $\alpha = \emptyset$ なら $M - B_0$ 上 $c \neq 0$ である様にしておく。 ∂B_0 での境界値 1, α で 0, β における“境界値” 0 となる $M - \bar{B}_0$ 上 $Au = 0$ の解 $w(x)$ をとると (3) から

$$(8) \quad \eta = \max_{x \in \partial B} w(x) < 1$$

となる。ここで β における境界値 0 とは $\alpha \cup M$ を内部から相対コンパクトな滑らかな領域の増加列 $\{M_n\}$, $\alpha \subset \overline{M}_n$, で近似して, $\partial M_n - \alpha$ 上の境界値 0 としたものの極限とすることを意味すると定める。

各 $\varphi \in C(\partial B)$ に対し $K\varphi$ が $\overline{B}$ 上連続, $K\varphi|_{\partial B} = \varphi$ 且 B の上で $A(K\varphi|_B) = 0$ となるものを表す。同じく各 $\varphi \in C(\partial B_0)$ に対し $K_0\varphi \in C(M-B_0)$ で, $K_0\varphi|_{\partial B_0} = \varphi$, $K_0\varphi|_{\alpha} = 0$, $K_0\varphi$ の β に於ける“境界値” 0 となる $M-B_0$ 上 $Au=0$ の解となるものを意味する。更に $\varphi \in C(\partial B_0)$ に対し $T\varphi = K(K_0\varphi|_{\partial B})|_{\partial B_0}$ とおくと (8) により $\|T\| \leq \rho < 1$ であって, $y \in B_0$ のとき

$$\psi(\cdot, y) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(G_B(\cdot, y)|_{\partial B_0})$$

が定義できて

$$G(x, y) = \begin{cases} (K_0\psi(\cdot, y))(x) & (x \in M-B_0); \\ (K(K_0\psi(\cdot, y)))(x) + G_B(x, y) & (x \in B) \end{cases}$$

とおくと $(M-B_0) \cap B$ で上下の二函数が一致してうまくこれが定義され求める Green 函数になっていることがわかる。

$G(\cdot, y)|_{\partial B_0} = T\psi(\cdot, y) + G_B(\cdot, y)|_{\partial B_0}$ に注意して sup ノルムを使って次の評価を得る:

$$\|G(\cdot, y) - G_B(\cdot, y)\|_{\partial B_0} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T^n(G_B(\cdot, y)|_{\partial B_0}) \right\|_{\partial B_0} \leq \frac{\rho}{1-\rho} \|G_B(\cdot, y)\|_{\partial B_0}.$$

$Au=0$ の解に対する一致の定理を利用すると, $x \in B$ に対し

$$(K(G(\cdot, y)|_{\partial B} - G_B(\cdot, y)|_{\partial B}))(x) = G(x, y) - G_B(x, y)$$

が $x \neq y$ で成り立つことがわかり上の右辺は B 上 $A_x u = 0$ の解

となり, B_0 内更に小さな同心球 B_1 をとって $l = \sup_{y \in B_1} \|G(\cdot, y)\|_{\partial B_0}$

とおけば

$$(9) \quad \|G(x, y) - G_B(x, y)\|_{B_1 \times B_1} \leq lq/(1-q)$$

となる. これと $G_B(x, y)$ が B_1 上 (7) を満足することから同じことが $G(x, y)$ についても結論できる.

§3. Čech 境界

これ以後は特に断らぬ限り主定理証明の方便の為 $(\alpha \cup M) \cup \beta$ が $\alpha \cup M$ の Čech 完備化となる様な β の位相的実現を考える, 即ち $\alpha \cup M$ 上の広義連続函数は $\alpha \cup M \cup \beta$ 迄広義連続拡大が出来る様な β をとる. 各 $y^* \in \beta$ に対し $\lim_{y \in M, y \rightarrow y^*} G(x, y) \equiv G(x, y^*)$ は M 上 $Au=0$ の解で (6) より真に正, 又 α で境界値が 0 となる. そこで $(x^*, y^*) \in (\alpha \cup M \cup \beta) \times (\alpha \cup M \cup \beta)$ に対し

$$(10) \quad G(x^*, y^*) \equiv \lim_{x \in M, x \rightarrow x^*} \left(\lim_{y \in M, y \rightarrow y^*} G(x, y) \right)$$

と定義し $G(x, y)$ の定義域 $(\alpha \cup M) \times (\alpha \cup M) - (\text{対角線集合})$ を $(\alpha \cup M \cup \beta) \times (\alpha \cup M \cup \beta)$ 迄延長しておく. $y^* \in M$ の時 $\alpha \cup M \cup \beta$ 上 y^* 中心の小球の外で $G(\cdot, y^*)$ は有界連続函数である.

§4 カ一様エネルギー $\gamma(\beta_n)$

以下 M の部分領域列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件を満たすものを一つ固定する:

$$\overline{M}_n \subset \alpha \cup M_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots), \quad M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

且 $\alpha \subset \partial M_n$ で,

$$\beta_n = \partial M_n - \alpha$$

($n=1, 2, \dots$) は有限個の C^3 級の単純閉超曲面からなる. ついでに $\beta_0 = \alpha$ とおくことにする.

M_n 上 $Au=0$ の解 w_n で β_0, β_n における境界値が夫々 0 及び 1 であるものを β_n の 内部 A 測度 と呼ぶ. $M - \overline{M}_n$ 上 $Au=0$ の解 $\tilde{w}_n$ で β_n に於る境界値 1, β に於る "境界値" 0 となるものを β_n の 外部 A 測度 と呼ぶ.

Riemann 計量 $(a_{ij}(x))$ についての ∂M_n の曲面素を dS , M_n に関する ∂M_n での外法線微分を $\frac{\partial}{\partial \nu}$ とかくことにして

$$(11) \quad \gamma(\beta_n) = \left(\int_{\beta_n} \left(\frac{\partial w_n}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial \nu} \right) dS \right)^{-1}$$

を β_n の カ一様エネルギー と呼ぶことにする. 更に β_n 上の測度

$$(12) \quad d\mu_n = \gamma(\beta_n) \left(\frac{\partial w_n}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial \nu} \right) dS$$

を β_n の カー種エネルギー測度 と呼ぶ.

定理 1: β_n のカー種エネルギー測度は単位正測度で

$$(13) \quad \tau(\beta_n) = \iint G(x, y) d\mu_n(x) d\mu_n(y)$$

とより更に (5) (6) の仮定があると

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\beta_n) = \infty.$$

証明. $\tilde{w}_{n,p} \in M_{n+p} - \bar{M}_n$ 上 $Au=0$ の解で β_n と β_{n+p} における境界値を夫々 1 と 0 であるものとする. $w_{n,p} \nearrow w_n (p \rightarrow \infty)$ である. M_{n+p} 上の Green 函数を $G_{n+p}(x, y)$ とすると上と同様 $G_{n+p}(x, y) \nearrow G(x, y) (p \rightarrow \infty)$ となる. $(b^i(y))$ の外法線成分を $b(y)$ とかき, $x \in M_n$ 中心の小半径 δ の球面を δ_x その内部を (δ_x) とかいて Green の公式を使うと

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_n - \beta_0 - \delta_x} \left[G_{n+p}(x, y) \frac{\partial w_n(y)}{\partial \nu_y} + b(y) w_n(y) G_{n+p}(x, y) - w_n(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{n+p}(x, y) \right] dS_y \\ &= \int_{M - (\delta_x)} \left[G_{n+p}(x, y) A_y w_n(y) - w_n(y) A_y^* G_{n+p}(x, y) \right] dV_y = 0. \end{aligned}$$

こゝに A^* は A の形式的共役作用素, dV は Riemann 計量 $(g_{ij}(x))$ に関する体積要素とする. $\delta \rightarrow 0$ として

$$(15) \quad w_n(x) = \int_{\beta_n} \left[G_{n+p}(x, y) \frac{\partial w_n(y)}{\partial \nu_y} - \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{n+p}(x, y) + b(y) G_{n+p}(x, y) \right] dS_y$$

を得る. 同じく $x \in M_n$ とし Green の公式で

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_{n+p} - \beta_n} \left[G_{n+p}(x, y) \frac{\partial \check{w}_{n+p}(y)}{\partial \nu_y} + b(y) \check{w}_{n+p}(y) G_{n+p}(x, y) - \check{w}_{n+p}(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{n+p}(x, y) \right] dS_y \\ &= \int_{M_{n+p} - \bar{M}_n} \left[G_{n+p}(x, y) A_y \check{w}_{n+p}(y) - \check{w}_{n+p}(y) A_y^* G_{n+p}(x, y) \right] dV_y = 0. \end{aligned}$$

こゝで β_n における $\frac{\partial}{\partial \nu_y}$ はやはり M_n について外向きとし,

$$(16) \quad \int_{\beta_n} \left[G_{n+p}(x, y) \frac{\partial \check{w}_{n+p}(y)}{\partial \nu_y} + b(y) \check{w}_{n+p}(y) G_{n+p}(x, y) - \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{n+p}(x, y) \right] dS_y = 0$$

をうる. (15)-(16) を作り $p \rightarrow \infty$ として

$$(17) \quad w_n(x) = \int_{\beta_n} G(x, y) \left(\frac{\partial w_n(y)}{\partial \nu_y} - \frac{\partial \check{w}_n(y)}{\partial \nu_y} \right) dS_y$$

が出る. こゝでは $x \in M_n$ としたが (7) により右辺が $\bar{M}_n$ 上連続なことから (17) は $x \in \bar{M}_n$ で正しい. β_n 上 $\frac{\partial w_n}{\partial \nu_y} \geq 0$, $\frac{\partial \check{w}_n}{\partial \nu_y} \geq 0$ だから $d\mu_n \geq 0$ 且 $\int d\mu_n = 1$ である. (17) から

$$(18) \quad \gamma(\beta_n) w_n(x) = \int_{\beta_n} G(x, y) d\mu_n(y) \quad (x \in \bar{M}_n).$$

ついでながら, $x \in M_{n+p} - \bar{M}_n$ として上と同様の議論を行うことにより

$$(18)' \quad \gamma(\beta_n) \check{w}_n(x) = \int_{\beta_n} G(x, y) d\mu_n(y) \quad (x \in M - M_n)$$

も示される。これは当面不要だけれど後に §8 で利用する。
 さて $x \in \beta_n$ に対する (18) の両辺を $d\mu_n$ で積分して (13) をうる。
 次に (5), (6) を仮定して $x_0 \in M_1$ を固定するとき

$$a_0 = \inf_{y \in M - M_1} G(x_0, y) > 0.$$

だから再び (18) により

$$r(\beta_n) w_n(x_0) = \int_{\beta_n} G(x_0, y) d\mu_n(y) \geq a_0$$

より

$$r(\beta_n) \geq a_0 / w_n(x_0).$$

所で $w_n \downarrow w$ ($n \rightarrow \infty$) となる M 上 $Au=0$ の解 w があり, (6) があると M 上 $G(x, y) \geq w(x)$ となって $w \equiv 0$ を結論できる。
 よって $w(x_0) \downarrow 0$ から (14) をうる。

§5. 超越直径 $\delta(\hat{\beta}_n)$

$\{M_n\}$ と同様の $\{\hat{M}_n\}_{n=1}^\infty$ で $\overline{M}_n \subset \alpha \cup \hat{M}_n \subset \widehat{M}_n \subset \alpha \cup M_{n+1}$ となり且 β_n の外部 A 測度 $\tilde{w}_n$ が

$$(19) \quad \tilde{w}_n|_{\partial \hat{M}_n} \geq 1/2$$

を満足する様にとる。 β_n と同様

$$\hat{\beta}_n = \partial \hat{M}_n - \alpha$$

と書く。

$$(20) \quad \delta_k(\hat{\beta}_n) = \left(\frac{k}{2}\right)^{-1} \inf_{x_1, \dots, x_k \in \hat{\beta}_n} \sum_{i < j}^1, \dots, k G(x_i, x_j),$$

$$(21) \quad \delta_k(\beta) = \left(\frac{k}{2}\right)^{-1} \inf_{x_1^*, \dots, x_k^* \in \beta} \sum_{i < j}^{1, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*)$$

とおくと

$$(22) \quad \delta(\hat{\beta}_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k(\hat{\beta}_n), \quad \delta(\beta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k(\beta)$$

が存在することは見易い。これらを夫々 $\hat{\beta}_n$ 及び β の超越直径と呼ぶ。

$\hat{\beta}_n$ の外部 A 測度を $\widetilde{w}_n$ とかくとき、仮定 (6) から (5) と共に

$$(23) \quad \sup_{x, y \in M - M_1} \frac{G(x, y)}{G(y, x)} \leq q, \quad \inf_{x \in M - M_1} \widetilde{w}_1(x) \geq 1/q$$

となる正数 $q \geq 1$ の存在がわかる。この q は以後主定理の証明の終了迄くり返し現われる。

$$\text{定理 2: } \delta(\beta) \geq q^{-4} \delta(\hat{\beta}_n) \quad (n=1, 2, \dots).$$

証明. $x_1^*, \dots, x_k^* \in \beta$ を任意にとり $\hat{w}_n \geq \hat{w}_1 | M - M_n$ により

$$(24) \quad \inf_{x \in M - M_n} \hat{w}_n(x) \geq 1/q$$

となる。さて $x_1, \dots, x_k \in \hat{\beta}_n$ を

$$(25) \quad q^{-4} \sum_{i < j}^{1, \dots, l} G(x_i, x_j) + q^{-1} \sum_{j=1}^{l+1} \sum_{i=l+2}^k G(x_j, x_i^*) + \sum_{i < j}^{l+2, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*) \leq \sum_{i < j}^{1, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*)$$

が各 $l=1, 2, \dots, k$ で成立する様にえらぶ。但し意味をなさな

い項は0と考える、それには数学的帰納法で、初め

$$h_1(x) = \sum_{i=2}^k G(x, x_i^*)$$

とおき $x_1 \in \hat{\beta}_n$ で $h_1(x_1) = \min_{x \in \hat{\beta}_n} h_1(x)$ とするものをとると (6)

から $h_1(x) \geq h_1(x_1) \tilde{w}_n(x)$ ($x \in M - M_n$) となり従って $h_1(x_1^*)$

$\geq \bar{q}^{-1} h_1(x_1)$. しかから $l=1$ に対する (25) をうる. $x_1, \dots, x_{l-1}$

$\in \hat{\beta}_n$ ($l-1 \leq k-1$) 迄 (25) をおにす如く取れたとして

$$h_l(x) = \sum_{j=l+1}^k G(x, x_j^*) + \bar{q}^{-2} \sum_{j=1}^{l-1} G(x, x_j)$$

とおき $x_l \in \hat{\beta}_n$ を $h_l(x_l) = \min_{x \in \hat{\beta}_n} h_l(x)$ なる如くにとると再び

(6) より $h_l(x) \geq h_l(x_l) \tilde{w}_n(x)$ ($x \in M - M_n$) となり, 従って前同

様 $h_l(x_l^*) \geq \bar{q}^{-1} h_l(x_l)$ 即ち

$$\bar{q}^{-1} \sum_{j=l+1}^k G(x_l, x_j^*) + \bar{q}^{-4} \sum_{j=1}^{l-1} G(x_l, x_j) \leq \sum_{j=l+1}^k G(x_l^*, x_j^*) + \bar{q}^{-2} \sum_{j=1}^{l-1} G(x_l^*, x_j^*).$$

よって (23) により

$$(26) \quad \bar{q}^{-1} \sum_{j=l+1}^k G(x_l, x_j^*) + \bar{q}^{-4} \sum_{j=1}^{l-1} G(x_l, x_j) \leq \sum_{j=l+1}^k G(x_l^*, x_j^*) + \bar{q}^{-1} \sum_{j=1}^{l-1} G(x_j^*, x_l^*)$$

となる. $x_1, \dots, x_{l-1}$ に対する (25)

$$\bar{q}^{-4} \sum_{i < j}^{1, \dots, l-2} G(x_i, x_j) + \bar{q}^{-1} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{i=l}^k G(x_j, x_i^*) + \sum_{i < j}^{l, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*) \leq \sum_{i < j}^{1, \dots, l} G(x_i^*, x_j^*)$$

の左辺の2項 = $\bar{q}^{-1} \sum_{j=1}^{l-1} G(x_i, x_l^*) + \bar{q}^{-1} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{i=l+1}^k G(x_j, x_i^*)$ 及び

左辺の3項 = $\sum_{i < j}^{l+1, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*) + \sum_{j=l+1}^k G(x_l^*, x_j^*)$ の様にか

き (26) を使うと

$$g^{-4} \sum_{i < j}^{1, \dots, l-1} G(x_i, x_j) + g^{-4} \sum_{j=1}^l \sum_{i=l+1}^k G(x_j, x_i^*) + \sum_{i < j}^{l+1, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*) \leq \sum_{i < j}^{1, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*)$$

即ち (25) が $x_1, \dots, x_l$ 迄成立することがわかる. ところで特に (25) の $l=k$ の時を考えて

$$g^{-4} \sum_{i < j}^{1, \dots, k} G(x_i, x_j) \leq \sum_{i < j}^{1, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*)$$

この左辺 $\geq g^{-4} \binom{k}{2} \delta_k(\hat{\beta}_n)$, 即ち

$$g^{-4} \binom{k}{2} \delta_k(\hat{\beta}_n) \leq \sum_{i < j}^{1, \dots, k} G(x_i^*, x_j^*)$$

右辺で $x_1^*, \dots, x_k^* \in \beta$ の任意性からそれらに関する下限をとり $g^{-4} \delta_k(\hat{\beta}_n) \leq \delta_k(\beta)$, として $k \rightarrow \infty$ とすればよい.

§ 6 中二種エネルギー $\hat{\gamma}(\hat{\beta}_n)$

単位正測度 μ の支え S_μ が $\hat{\beta}_n$ に入る様なものについての下
限を考えて

$$(27) \quad \hat{\gamma}(\hat{\beta}_n) = \inf_{\mu} \iint G(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$$

を $\hat{\beta}_n$ の中二種エネルギーと呼ぶことにする.

定理3: $\delta(\hat{\beta}_n) \geq \frac{1+g}{2g} \hat{\gamma}(\hat{\beta}_n) \quad (n=1, 2, \dots)$.

証明 $x_1^{(k)}, \dots, x_k^{(k)} \in \hat{\beta}_n$ を

$$(28) \quad \left(\frac{k}{2}\right) \delta_k(\hat{\beta}_n) + 1 \geq \sum_{i < j}^{1, \dots, k} G(x_i^{(k)}, x_j^{(k)})$$

と取る様にとる. 単位測度 ν_k , $S_{\nu_k} \subset \hat{\beta}_n$, を $\nu_k(x_j^{(k)}) = 1/k$ ($j=1, 2, \dots, k$) と取るものとする. $\{\nu_k\}$ を $\{\nu_k\}$ の漠然部
分列としその極限を ν とすると $S_\nu \subset \hat{\beta}_n$ 且 $\nu(\hat{\beta}_n) = 1$ である.
正数 t に対し $G^t = \min(G, t)$ とおくと (28) から

$$\begin{aligned} \left(\frac{k'}{2}\right) \delta_{k'}(\hat{\beta}_n) + 1 &\geq \sum_{i < j}^{1, \dots, k'} G^t(x_i^{(k')}, x_j^{(k')}) \\ &\geq \sum_{i < j}^{1, \dots, k'} \frac{1}{k'} G^t(x_i^{(k')}, x_j^{(k')}) \end{aligned}$$

となり従って

$$\begin{aligned} \left(\frac{k'}{2}\right) \delta_{k'}(\hat{\beta}_n) + 1 &\geq \frac{1+t}{2t} \sum_{i < j}^{1, \dots, k'} G^t(x_i^{(k')}, x_j^{(k')}) \\ &= \frac{1+t}{2t} \left(\sum_{i,j=1}^{k'} G^t(x_i^{(k')}, x_j^{(k')}) - k't \right) \\ &= \frac{1+t}{2t} \left(\iint G^t(x, y) d\nu_k(x) d\nu_k(y) - k't \right). \end{aligned}$$

両辺を $\left(\frac{k'}{2}\right)$ でわり $k' \rightarrow \infty$ とし次に $t \rightarrow \infty$ として

$$\delta(\hat{\beta}_n) \geq \frac{1+t}{2t} \iint G(x, y) d\nu(x) d\nu(y) \geq \frac{1+t}{2t} \hat{T}(\hat{\beta}_n).$$

§7 最大値原理

M 内の Borel 正測度 μ でその支え S_μ が完備なものに対して

$$(29) \quad G_\mu(x) = \int G(x, y) d\mu(y)$$

を μ による Green ポテンシャルと言う。これは M 上下半連続で $M - S_\mu$ 上 $Au = 0$ の解であって, α で境界値 0, β で "境界値" 0 をとる。

定理 4: $G_\mu|_{S_\mu}$ が有限連続であれば G_μ は M 上有限連続である。

証明. $x_0 \in S_\mu$ を任意にとり x_0 中心の小球 B_0 をとる. B を B_0 内の同心小球とし $\mu' = \mu|_B$, $\mu'' = \mu|_{M \setminus B}$ とおくと

$$(30) \quad G_\mu = G_{\mu'} + G_{\mu''}$$

の分解中 $G_{\mu''}$ は x_0 で連続である。故に両辺の S_μ への制限を考えるとことにより $G_{\mu'}|_{S_\mu}$ は連続である。よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し B を充分小にとると

$$(31) \quad \mu'(B) < \varepsilon, \quad G_{\mu'}(x_0) < \varepsilon, \quad G_{\mu'}|_{S_\mu \cap B} < \varepsilon$$

に出来る。(7) により正常数 $p \geq 1$ が存在して

$$(32) \quad \begin{cases} p^{-1} |x-y|^{2-m} \leq G(x, y) \leq p |x-y|^{2-m} & (m \geq 3) \\ p^{-1} \log |x-y|^{-1} \leq G(x, y) \leq p \log |x-y|^{-1} & (m = 2) \end{cases}$$

が $x, y \in B_0$ に対して成立する. $x \in B$ とし, y を x から $S_\mu \cap B$ への最短距離を定める $S_\mu \cap B$ の点とするとすべての $z \in S_\mu \cap B$ に対し $|y-z| \leq |x-y| + |x-z| \leq 2|x-z|$ 故

$$(33) \quad \int |x-z|^{2-m} d\mu'(z) \leq 2^{m-2} \int |y-z|^{2-m} d\mu'(z) \quad (m \geq 3)$$

だからこれと (32) と (31) から

$$(34) \quad G_{\mu'}(x) \leq 2^{m-2} p^2 \varepsilon.$$

又 $m=2$ の時は

$$(33)' \quad \int \log \frac{1}{|x-z|} d\mu'(z) \leq \int \log \frac{1}{|y-z|} d\mu'(z) + \mu'(B) \log 2$$

だから再び (32) と (31) から

$$(34)' \quad G_{\mu'}(x) \leq (p^2 + p \log 2) \varepsilon.$$

他方 $x \in B$ とすると

$$|G_\mu(x) - G_\mu(x_0)| \leq |G_{\mu''}(x) - G_{\mu''}(x_0)| + |G_{\mu'}(x)| + |G_{\mu'}(x_0)|$$

だから (34) 及び (34') から

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} |G_\mu(x) - G_\mu(x_0)| = O(\varepsilon).$$

定理 5. $G_\mu|_{S_\mu} \leq k$ ならば $M \perp G_\mu \leq k$ となる.

証明. 任意の正数 ε と任意の点 $x \in M - S_\mu$ をとる. S_μ 内

の完備集合 K をとり $\mu' = \mu|_K$, $\mu'' = \mu|_{S_\mu - K}$ とおく. 更に K に対し Lusin の定理から, $G_\mu|_K$ は連続且 $\mu''(S_\mu) = \mu(S_\mu - K)$ も充分小にとって $G_{\mu''}(x) < \varepsilon$ となる様に K をとっておく.

$$G_{\mu'}|_K = G_\mu|_K - G_{\mu''}|_K$$

の左辺は下半連続, 右辺は「連続」—「下半連続」だから上半連続, 従って $G_{\mu'}|_K$ は $K = S_{\mu'}$ 上連続で定理 4 から $G_{\mu'}$ は M 上連続である. 従って $G_{\mu'}|_{M-S_{\mu'}}$ は最大値を $\partial(M-S_{\mu'}) \cap S_{\mu'}$ で取ることにより, $G_{\mu'}|_{S_{\mu'}} \leq G_\mu|_{S_{\mu'}} \leq k$ を合せ考えて M 上 $G_{\mu'} \leq k$ とする. 故に $G_\mu(x) = G_{\mu'}(x) + G_{\mu''}(x) \leq k + \varepsilon$. ε の任意性から $G_\mu(x) \leq k$ をうる.

§ 8. Schwarz 型不等式

Borel 正測度 θ, η の内積を

$$(\theta, \eta) = \iint G(x, y) d\theta(y) d\eta(x)$$

と定める. 勿論通常の意味での内積の条件を満足しない.

定理 6: θ, η を夫々 $\beta_n, \hat{\beta}_n$ 上の正測度とすると

$$(35) \quad (\theta, \theta)(\eta, \eta) \geq \beta^{-4}(\theta, \eta)^2.$$

証明. $\beta_n, \hat{\beta}_n$ 上の正測度 θ, η で $(\theta, \theta) < \infty, (\eta, \eta) < \infty$ と

なるものばかり考え、かゝる測度の組 θ, η に関する変分

$$N(\theta, \eta) = \frac{(\theta, \theta) \cdot (\eta, \eta)}{(\theta, \eta)^2}$$

を考える。 $N(\theta, \eta)$ が θ, η に関して斉次故変分問題

$$\inf_{\theta, \eta} N(\theta, \eta)$$

に於て θ, η 共に単位測度に限定出来ることにより、濃完閉性により、上述の如き単位測度の組 $\bar{\theta}, \bar{\eta}$ で

$$(36) \quad N(\bar{\theta}, \bar{\eta}) = \inf_{\theta, \eta} N(\theta, \eta)$$

となるものが存在する。そこで

$$(37) \quad (\bar{\theta}, \bar{\theta}) = a, \quad (\bar{\eta}, \bar{\eta}) = b, \quad (\bar{\theta}, \bar{\eta}) = t$$

とかき

$$(38) \quad \varphi(x) = \hat{f}^{-1} \pm G_{\bar{\theta}}(x) - \hat{f} a G_{\bar{\eta}}(x), \quad \hat{\varphi}(x) = \hat{f}^{-1} \pm G_{\bar{\eta}}(x) - \hat{f} b G_{\bar{\theta}}(x)$$

を考える。

$\beta_{n,l} = \{x \in \beta_n \mid \varphi(x) \geq 1/l\}$, $\bar{\theta}_l = \bar{\theta} \mid \beta_{n,l}$ ($l=1, 2, \dots$) と
あくと、 $0 < \varepsilon < 1$ なる ε に対し $\bar{\theta} - \varepsilon \bar{\theta}_l$ は β_n 上の正測度
だから、(36) により

$$N(\bar{\theta}, \bar{\eta}) \leq N(\bar{\theta} - \varepsilon \bar{\theta}_l, \bar{\eta}).$$

これを變形して

$$0 \leq 2t \left[-\varepsilon t \frac{(\bar{\theta}, \bar{\theta}_\ell) + (\bar{\theta}_\ell, \bar{\theta})}{2} + \varepsilon a(\bar{\theta}_\ell, \bar{\eta}) \right] + [t^2 \varepsilon^2 (\bar{\theta}_\ell, \bar{\theta}_\ell) - a \varepsilon^2 (\bar{\theta}_\ell, \bar{\eta})^2]$$

となるが更に

$$0 \leq 2t [-\varepsilon t \bar{f}^{-1}(\bar{\theta}, \bar{\theta}_\ell) + \varepsilon a \bar{f}(\bar{\eta}, \bar{\theta}_\ell)] + t^2 \varepsilon^2 (\bar{\theta}_\ell, \bar{\theta}_\ell)$$

が出る。書きかえて

$$0 \leq -2\varepsilon t \int \varphi(x) d\bar{\theta}_\ell(x) + t^2 \varepsilon^2 (\bar{\theta}_\ell, \bar{\theta}_\ell).$$

故に $\beta_{n,\ell}$ の定義をみて

$$0 \leq -2\varepsilon t \frac{1}{\ell} \bar{\theta}_\ell(\beta_{n,\ell}) + t^2 \varepsilon^2 (\bar{\theta}_\ell, \bar{\theta}_\ell).$$

これから $\bar{\theta}_\ell(\beta_{n,\ell}) = \bar{\theta}(\beta_{n,\ell}) = 0$ ($\ell = 1, 2, \dots$), 即ち $S_{\bar{\theta}}$ 上 $\bar{\theta}$ -a.e. に $\varphi(x) \leq 0$ である。所が $G_{\bar{\eta}}$ は $S_{\bar{\theta}}$ 上連続, $G_{\bar{\theta}}$ は $S_{\bar{\theta}}$ 上下半連続だから, 実は $S_{\bar{\theta}}$ 上至る所 $\varphi(x) \leq 0$, 即ち

$$(39) \quad \bar{f}^{-1} t G_{\bar{\theta}}(x) \leq \bar{f} a G_{\bar{\eta}}(x) \quad (x \in S_{\bar{\theta}}).$$

次に $\hat{\beta}_{n,\ell} = \{x \in \hat{\beta}_n \mid \hat{\varphi}(x) \geq 1/\ell\}$, $\bar{\eta}_\ell = \bar{\eta} \mid \hat{\beta}_{n,\ell}$ ($\ell = 1, 2, \dots$) とおくと, $0 < \varepsilon < 1$ に対し

$$N(\bar{\theta}, \bar{\eta}) \leq N(\bar{\theta}, \bar{\eta} - \varepsilon \bar{\eta}_\ell).$$

これから (39) を導いたと同じ様な推論をくり返して, $\hat{\varphi}(x) \leq 0$ ($x \in S_{\bar{\eta}}$), 即ち

$$(40) \quad f^{-1}t G_{\bar{\eta}}(x) \leq f G_{\bar{\theta}}(x) \quad (x \in S_{\bar{\eta}})$$

が結論できる.

(39), 定理5, (40), 定理5の順に使って

$$\begin{aligned} f^{-2} \frac{t}{a} \sup_{x \in S_{\bar{\theta}}} G_{\bar{\theta}}(x) &\leq \sup_{x \in S_{\bar{\theta}}} G_{\bar{\eta}}(x) \leq \sup_{x \in S_{\bar{\eta}}} G_{\bar{\eta}}(x) \\ &\leq f^2 \frac{b}{t} \sup_{x \in S_{\bar{\eta}}} G_{\bar{\theta}}(x) \leq f^2 \frac{b}{t} \sup_{x \in S_{\bar{\theta}}} G_{\bar{\theta}}(x) \end{aligned}$$

となり, 最初と最後の項をくらべて $f^{-2} \frac{t}{a} \leq f^2 \frac{b}{t}$ より

$$f^{-4} \leq \frac{ab}{t^2} = N(\bar{\theta}, \bar{\eta}) \leq N(\theta, \eta)$$

となり $(\theta, \theta), (\eta, \eta) < \infty$ となる時 (35) がみちびかれる. この仮定の正しいとき (35) は自明となる.

定理7: $\hat{\gamma}(\hat{\beta}_n) \geq \frac{1}{4f^4} \gamma(\beta_n) \quad (n=1, 2, \dots).$

証明. μ_n を β_n のカー種エネルギー測度, ν を $\hat{\beta}_n$ 上の任意の単位正測度とすると (35) より

$$(41) \quad (\mu_n, \nu)^2 \leq f^4 (\mu_n, \mu_n) \cdot (\nu, \nu).$$

又 (18)', 即ち $\gamma(\beta_n) \tilde{w}_n(x) = G_{\mu_n}(x) \quad (x \in M - M_n)$ により (19)

を使うと $x \in \hat{\beta}_n$ に対し

$$\frac{\gamma(\beta_n)}{2} \leq G_{\mu_n}(x)$$

をうる. 両辺を $\hat{\beta}_n$ 上 ν で積分すると, そして自乗して

$$\frac{\gamma(\beta_n)^2}{4} \leq (\mu_n, \nu)^2$$

となる. これを (41) に代入し (13), 即ち $\gamma(\beta_n) = (\mu_n, \mu_n)$ を使うと

$$\frac{1}{4g^4} \gamma(\beta_n) \leq (\nu, \nu)$$

となる. ここで ν についての下限をとって定理をうる.

§ 9. Tchebycheff 定数 $\tau(\beta)$

最後に β に対する量で (改変された) Tchebycheff 定数と呼ぶものを

$$(42) \quad \tau(\beta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(\beta),$$

$$(43) \quad \tau_k(\beta) = \frac{1}{k} \sup_{x_1^*, \dots, x_k^* \in \beta} \left\{ \inf_{x^* \in \beta} \sum_{j=1}^k G(x^*, x_j^*) \right\}$$

で定義する. (42) の極限の存在はほとんど自明である. これと超越直交との間の関係をもべる.

定理 8: $\tau(\beta) \geq \delta(\beta)$.

証明. 自然数 $l > 1$ に対して $\varepsilon = 1/(l-1)$ とおく. β の点 $x_l^*, x_{l-1}^*, \dots, x_2^*, x_1^*$ を

$$(44) \quad \sum_{j=l-i+1}^l G(x_{l-i}^*, x_j^*) \leq \inf_{x^* \in \beta} \sum_{j=l-i+1}^l G(x^*, x_j^*) + \varepsilon,$$

$i=1, \dots, l-1$, とする様に帰納的にえらぶ. まず $x_l^* \in \beta$ は任意にとる. $x_l^*, \dots, x_{l-i+1}^* \in \beta$ が (44) をみたす様にえらべたとして $x_{l-i}^* \in \beta$ をえらぶため $h(x^*) = \sum_{j=l-i+1}^l G(x^*, x_j^*) \geq 0$ を考える. $x_{l-i}^* \in \beta$ を

$$h(x_{l-i}^*) \leq \inf_{x^* \in \beta} h(x^*) + \varepsilon$$

なる如くとれば, これ即ち (44) である.

(44) と $\tau_i(\beta)$ の定義より

$$\sum_{j=l-i+1}^l G(x_{l-i}^*, x_j^*) \leq i \tau_i(\beta^*) + \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, l-1)$$

となり, これらを i について加えて

$$\binom{l}{2} \delta_l(\beta) \leq \sum_{i=1}^{l-1} i \tau_i(\beta^*) + 1.$$

両辺を $\binom{l}{2}$ でわり $l \rightarrow \infty$ として定理をうる.

定理9: β が A 放物的であると

$$(45) \quad \tau(\beta) = \infty.$$

証明. 定理8, 定理2, 定理3, 定理7 をこの順に使うと
 凡ての $n=1, 2, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} \tau(\beta) &\geq \delta(\beta) \geq \frac{1}{g^4} \delta(\hat{\beta}_n) \geq \frac{1+g}{2gg^4} \hat{\gamma}(\hat{\beta}_n) \\ &\geq \frac{1+g}{2gg^4} \cdot \frac{1}{4g^4} \gamma(\beta_n). \end{aligned}$$

ここで $n \rightarrow \infty$ として定理1の(14)を使うと(45)がわかる.

§10. 主定理の証明

定理9によると $\tau(\beta) = \infty$ 故自然数の増加列 $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ で

$$\tau_{n_l}(\beta) > 2^l \cdot l \quad (l=1, 2, \dots)$$

となるものがえらべる. すると $x_{l,j}^* \in \beta$ ($j=1, \dots, n_l$) で

$$(46) \quad \frac{1}{n_l} \inf_{x^* \in \beta} \sum_{j=1}^{n_l} G(x^*, x_{l,j}^*) > 2^l \cdot l$$

となるものがとれる. だから

$$(47) \quad u_\ell(x) = \frac{1}{n_\ell} \sum_{j=1}^{n_\ell} G(x, x_{\ell,j}^*)$$

を考えるとこれは M 上 $Au=0$ の解で α で境界値 0 かつ (46) からすべての $x^* \in \beta$ に対し

$$(48) \quad \lim_{x \in M, x \rightarrow x^*} u_\ell(x) > 2^\ell \cdot \ell$$

をうる。次に

$$(49) \quad u(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} u_\ell(x)$$

とあくとやはり M 上 $Au=0$ の解で α に於て境界値 0 をもちしかも任意の ℓ に対して, (48) により

$$\liminf_{x \in M, x \rightarrow x^*} u(x) \geq \liminf_{x \in M, x \rightarrow x^*} \frac{1}{2^\ell} u_\ell(x) \geq \ell$$

だから

$$(50) \quad \lim_{x \in M, x \rightarrow x^*} u(x) = \infty$$

となる。

故に β が $\alpha \cup M$ のどんな完閉化の境界であるとしても, β 上 $u = \infty$ と定めて u の定義域を $\alpha \cup M \cup \beta$ に広げると, u は $\alpha \cup M \cup \beta$ 上連続となる。即ち u は問題 $\pi(M, A; \alpha, \beta; 0)$ の解となる。

次に $f \in C_0'(M \cup \alpha)$ をとるとき

$$(51) \quad v(x) = \int_M G(x, y) f(y) dV_y$$

は M 上 $Av = f$ を満足し且 M 上有界となることがわかる故
 $u+v$ が問題 $\pi(M, A; \alpha, \beta, f)$ の解となる.

参考文献

- [1] G.C. Evans: Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions, Monatsheft für Math. Phys., 43(1936), 419-424.
- [2] M. Inoue: Positively infinite singularities of solutions of linear elliptic partial differential equations, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 8(1957), 43-50.
- [3] S. Itô: Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems, Japanese J. Math., 27(1957), 55-102.
- [4] S. Itô: On existence of Green function and positive superharmonic functions for linear elliptic operators of second order, J. Math. Soc. Japan, 16(1964), 297-306.

- [5] S. Itô: Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 307-334.
- [6] Z. Kuramochi: Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces, I., Osaka Math. J., 8 (1956), 119-137.
- [7] C. Miranda: Equazioni alle Derivate Parziali di Tipo ellittico, Springer, 1955.
- [8] M. Nakai: On Evans potential, Proc. Japan Acad., 38 (1962), 624-629.
- [9] M. Nakai: Evans harmonic function on Riemann surfaces, Proc. Japan Acad., 39 (1963), 74-78.
- [10] M. Nakai: On Evans' solution of the equation $\Delta u = Pu$ on Riemann surfaces, Kôdai Math. Sem. Rep., 15 (1963), 79-93.
- [11] M. Nakai: Green potential of Evans type on Royden's compactification of a Riemann surface, Nagoya Math. J., 24 (1964), 205-239.
- [12] M. Nakai: Infinite boundary value problem, Proc. Japan Acad., 44 (1968), 139-140.
- [13] K. Nashiro: Contributions to the theory of singularities

of analytic functions, Japanese J. Math., 19 (1948),
299-327.

[14] L. Sario and K. Noshiro: Value Distribution Theory, Van
Nostrand, 1966.

[15] H. Selberg: Über die ebenen Punktmengen von der Kapazität
Null, Avh. Norske Videnskaps-Acad. Oslo I Math-Natur,
10 (1937).