

温度差をもつ回転同軸円筒間に於ける
流体運動の最初の枝分かれについて

名大・教養・数学 竹下 彬

第1. 序. 我々は此の小論で、外側は熱せられ内側は冷却された回転する2つの同軸円筒間に於ける圧縮性流体の熱対流の問題を取り扱う。扱う問題の設定は次の通り。半径が $R_1 < R_2$ の直立した2つの同軸円筒が同一の角速度 ω で回転しており、かつ、内外の円筒はそれぞれ一定の温度 T_1, T_2 ($T_2 > T_1$) に保たれており、圧縮性粘性流体がその間の領域で運動しているという状況を考える。此の設定の下にパラメーター R_i, ω, T_i ($i=1, 2$) のすべての値に対して、以下で自明な運動と呼ぶ事にする所謂、剛体的運動が存在する。即ち、流体は回転する円筒と共にあちかも剛体であるかの様に運動する。しかし、此の運動を2円筒と共に回転する座標系から見れば、回転の結果遠心力及びコリオリ力が生じている。一方で2円筒の温度差より流体の質量密度に非均質性が生じており、従って浮力が生じる。

従って Bénard 問題に於ける様な熱対流が生じる事が期待される (即ち 運動方程式の定常解 (自明な運動に対応する解) の非一意性)。此の事を証明するのが此の小論の目的である。此の問題は大気中の所謂ジェット気流に対する一模型である。これについては K. Gotoh [5] を参照されたい。

此処で此の小論に於ける仮定, 立場について 2, 3 の事を明確にしておきたい。

- (1) 流れを 2 次元流に限る事。
- (2) 熱流体力学の基礎方程式に Boussinesq 近似を施して得られる所謂 Oberbeck-Boussinesq 方程式を基礎方程式として採用し、その後では如何なる近似, 項の無視も行わない。 (マントル対流のパターン形成に関する Busse の最近の論文参照。そこでは 3 次以上の非線型項が無視されている。)
- (3) 定常解の範囲での枝分かれに議論を制限する事 (後に本論で証明する定常解の枝分かれの以前に既に Hopf 型の枝分かれが起きている可能性は調べる事が出来なかった)。
- (4) 非線型偏微分方程式の解の非一意性の証明の数学的技法の説明に叙述の重点を置く事。

此の問題は、京都大学数理解析研究所の後藤金英先生に教えて戴いたものである。問題を教えて戴き、かつ有益な助言を下された後藤先生に感謝します。

節2. Lyapounov - Schmidt 方程式, Morse の補題

E, F を実 Hilbert 空間とし $N: \mathbb{R}_\lambda^1 \oplus E \rightarrow F$ を滑らかな写像で $N(\lambda, 0) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ とする。 $L(\lambda): E \rightarrow F$ を N の $x \in E$ に関する N の $(\lambda, 0)$ に於ける Fréchet 微分とする。即ち $N(\lambda, x) - N(\lambda, 0) = L(\lambda)x + o(\|x\|)$ 。 $\lambda \neq \lambda_c$ で $L(\lambda)$ は同型かつ、 $\lambda = \lambda_c$ で $\dim \text{Ker } L(\lambda_c) = \text{codim } \text{Im } L(\lambda_c) = 1$ とする。 $E_1 = \text{Ker } L(\lambda_c)$, $E_2 = E_1^\perp$, (直交補空間), $F_2 = \text{Im } L(\lambda_c)$, $F_1 = F_2^\perp$, P_i, Q_i を E, F から E_i, F_i ($i=1, 2$) への直交射影とする。 方程式

$$N(\lambda, x) = 0 \quad (1)$$

を考える。これは

$$Q_i N(\lambda, x) = 0, \quad i=1, 2, \quad (2)$$

と同等である。 E_1 の基底を x_0 とすると任意の $x \in E$ は $x = \xi x_0 + Y$ 但し $Y \in E_2, \xi \in \mathbb{R}$ と一意的に表わされる。 写像 $Q_2 N(\lambda, \xi x_0 + Y): \mathbb{R}_\lambda^1 \oplus \mathbb{R}_\xi^1 \oplus E_2 \rightarrow F_2$ を考えると此の写像の Y に関する $(\lambda_c, 0, 0)$ に於ける

Fréchet 微分 $E_2 \rightarrow F_2$ は同型である。従って陰関数の定理により $(\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^2$ の E_2 -値関数 $Y(\lambda, \xi)$ が $(\lambda_c, 0)$ の近傍で一意的に存在し, $Q_2 N^0(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)) = 0$, かつ $Y(\lambda_c, 0) = 0$. 此の $Y(\lambda, \xi)$ を残る方程式により, 即ち $Q_1 N^0 = 0$ となる様に決める. $Q_1 N^0 = 0 \iff N^0 \in F_2$ かつ $F_2 = (\text{Ker } \mathcal{L}(\lambda_c)^*)^\perp$, (但し $\mathcal{L}(\lambda_c)^*: F \rightarrow E$ は $\mathcal{L}(\lambda_c)$ の共役作用素) に注意すれば, $\hat{X}_0 \in \text{Ker } \mathcal{L}(\lambda_c)^*$ の基底とする時, 結局

$Q_1 N^0(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)) = 0 \iff (N^0(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)), \hat{X}_0)_F = 0$ となる. $h(\lambda, \xi) = (N^0(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)), \hat{X}_0)_F$ とおく.
 $h(\lambda, \xi) = 0$ の解 (λ, ξ) が $N^0 = 0$ の解 $\xi X_0 + Y(\lambda, \xi)$ を与える. 注 $h(\lambda, 0) = 0$ は常に満たされており: h が自明な解 0 , $N^0(\lambda, 0) = 0$ を与える. 方程式

$$(N^0(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)), \hat{X}_0)_F = 0 \quad (3)$$

が此の場合の Lyapounov-Schmidt 方程式である.

Morse の補題 $h = h(\lambda, \xi)$ を $(\lambda, \xi) = (\lambda_c, 0)$ の近傍で定義された滑らかな関数とする. $h(\lambda_c, 0) = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda_c, 0) = \frac{\partial h}{\partial \xi}(\lambda_c, 0) = 0$ かつ, Hessian matrix

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2}(\lambda_c, 0) & \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda \partial \xi}(\lambda_c, 0) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda \partial \xi}(\lambda_c, 0) & \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(\lambda_c, 0) \end{bmatrix}$$

の指数が $(1, 1)$ ならば $(\lambda_c, 0)$ の近傍の座標変換 $(\lambda, \xi) \rightarrow \chi, \zeta$ が存在して $\chi(\lambda_c, 0) = 0$, $\eta = \chi^2 - \zeta^2$ が成立する。

注. 本論で後に扱う我々の場合には H は

$$H = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & x \end{bmatrix}, \quad a < 0 \quad (4)$$

の形となり、従って指数は $(1, 1)$ となり、 $\eta(\lambda, \xi) = 0$ は (λ, ξ) 平面で直線 $\xi = 0$ (自明な解に対応) 及び $(\lambda_c, 0)$ に於いて $\xi = 0$ と横断的に交わる曲線の2つからなる。後者が非自明な解を与える (熱対流解)

節3. 問題の設定と Boussinesq 近似

2次元ユークリッド空間 E_2 に於いて我々は2つの座標系、即ちデカルト座標系 $x = (x_1, x_2)$ 及び 極座標系 $x = (r, \theta)$ を用いる。 $e_1, e_2; e_r, e_\theta$ で E_2 上のベクトル場で、各点で長さが1でかつ $x_1, x_2; r, \theta$ 方向のものを表わす。 E_2 上のベクトル場 u は $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 = u_r e_r + u_\theta e_\theta$ と分解されるが、此の時 $u = (u_1, u_2) = (u_r, u_\theta)$ などとも書くことにする。

$\Omega = \{x = (r, \theta); R_1 < r < R_2\}$ とおく。採用する基礎方程式は、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 & (5) \\ \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\mu}{\rho} \Delta u - \nabla_u u + (\lambda + \frac{\mu}{3}) \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} u - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p & (6) \\ \frac{\partial}{\partial t} T = \kappa \Delta T - \nabla_u T & (7) \\ u|_{r=R_i} = R_i \omega e_\theta, T|_{r=R_i} = T_i, i=1, 2. & (8) \end{cases}$$

である。但し、 u : 速度ベクトル, ρ : 質量密度, p : 圧力, T : 温度分布, μ : 粘性係数, λ : 第2粘性係数, κ : 熱伝導係数, ω : 円筒の回転角速度, $T_1(T_2)$: 内(外)側の温度である。これに Boussinesq 近似を施すと,

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\mu}{\rho_1} \Delta u - \nabla_u u - \{1 + \alpha(T - T_1)\} r e_r - \frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p \\ \frac{\partial}{\partial t} T = \kappa \Delta T - \nabla_u T \\ u|_{r=R_i} = R_i \omega e_\theta, T|_{r=R_i} = T_i, i=1, 2. \end{cases}$$

が得られる。但し ρ_1 は温度 T_1 に於ける質量密度で, α は体積膨張率である。無次元化を行い, かつ円筒と共に回転する座標系から見れば方程式は $((1 - \alpha T_1) r e_r$ は圧力項に組み入れて)

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta u - \nabla_u u + 2(u_\theta e_r - u_r e_\theta) + r e_r - \lambda r T e_r - \operatorname{grad} p, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \frac{1}{\mathcal{P}} \Delta T - \nabla_u T - \frac{\alpha}{r} u_r \quad (10)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (11)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, T|_{\partial\Omega} = 0 \quad (12)$$

但し $\Omega = \{x = (r, \theta); 1 < r < R_0\}$, γ は本来の γ から剛体運動に対応する $\tilde{\gamma} = \alpha \log r + \beta$ で減じられたものである。又 $R = R_1^2 \omega / \nu$, $\nu = \mu / \rho_1$, $\lambda = \kappa (\tau_2 - \tau_1)$, $P = R_1^2 \omega / \kappa$, $R_0 = R_2 / R_1$, $\alpha = 1 / \log R_0$, $\beta = \tau_1 / (\tau_2 - \tau_1)$ とする。遠心力 $r e_r$ は圧力項に組み入れられ、又 コリオリ力 $2(u_\theta e_r - u_r e_\theta)$ の線積分 $\pi = \int_\gamma (u_\theta dr - r u_r d\theta)$ を考えれば同様であることが判る。よって以下では此等の項は省略して良い。

節4. 関数解析による定式化

我々は次の定常方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \Delta u - \nabla u - \lambda r \tau e_r - \text{grad } p = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \Delta T - \nabla T - \frac{\alpha}{r} u_r = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \text{div } u = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega} = 0, T|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

の自明な解 $(u, T, p) = (0, 0, 0)$ の枝分かれの可能性を調べる。節2のプログラムが適用出来る様にする為以下のように関数解析的定式化を行う。以下で用いる関数空間はすべて実数値関数、実ベクトル場より成るものとする。 $C_0^\infty \equiv C_0^\infty(\Omega)$, $H^m \equiv H^m(\Omega)$ (m 階の L_2 -Sobolev 空間), $L_2 \equiv L_2(\Omega)$ は通常通り。又, $\dot{H}^m \equiv \dot{H}^m(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \text{closure of } C_0^\infty \text{ in } H^m$.

又 $H^m \equiv H^m(\Omega)$ (resp. $\dot{H}^m \equiv \dot{H}^m(\Omega)$), $C_0^\infty \equiv C_0^\infty(\Omega) = \{u = \sum_i u_i e_i; u_i \in H^m \text{ (resp. } \dot{H}^m, C_0^\infty)\}$ とおく。又 $C_{0,\sigma}^\infty \equiv C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{u \in C_0^\infty; \operatorname{div} u = 0\}$ とする。 H^m に自然な内積 $(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_i \int_\Omega D^\alpha u_i(x) D^\alpha v_i(x) dx$ が与えられている。 したがって $\|\cdot\|_m$ とおく。 又 $(,) = (,)_0$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$ とする。 $L_{2,\sigma} \equiv L_{2,\sigma}(\Omega) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{closure of } C_{0,\sigma}^\infty \text{ in } L_2$ とし $L_{2,\pi}$ で $L_{2,\sigma}$ の L_2 に於ける直交補空間を表わす (但し $L_2 = H^0$)。 P_σ, P_π で L_2 から $L_{2,\sigma}, L_{2,\pi}$ への直交射影を表わす。 次の補題は良く知られている。(例えば Ladyzhenskaya [12])。

Lemma 1. $u \in L_2$ に対して

$$\begin{cases} (1) u \in L_{2,\sigma} \iff \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \text{ かつ } u \text{ の } \partial\Omega \text{ に於ける} \\ \quad \text{法線成分 } (\in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) = 0 \\ (2) u \in L_{2,\pi} \iff p \in H^1(\Omega) \text{ が存在して } u = \operatorname{grad} p. \end{cases}$$

次に Stokes 作用素 $A: \mathcal{D}(A)(CL_{2,\sigma}) \rightarrow L_2$, 及び作用素 $B: \mathcal{D}(B)(CL_2) \rightarrow L_2$ と $\mathcal{D}(A) = H^2 \cap \dot{H}^1 \cap L_{2,\sigma}^2$, $\mathcal{D}(B) = H^2 \cap \dot{H}^1$, $Au = -P_\sigma \Delta u$, $BT = -\Delta T$ で定義する。 此の時明らかに $Au = 0 \iff \nabla \Delta u = \operatorname{grad} p$ となる。 $p \in H^1(\Omega)$ が存在しかつ $\operatorname{div} u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ となる」が成立する (Lemma 1)。 此等の設定の下に我々の方程式系 (13)–(16) は

$L_{2,\alpha} \oplus L_2$ に於ける非線型方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} Au + P_0 \nabla_u u + \lambda P_0 (r \nabla_r) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{P}} B \nabla T + \nabla_u T + \frac{\alpha}{r} u_r = 0 \end{cases} \quad (18)$$

に帰着される。

Lemma 2. A, B strictly positive な自己共役作用素である。

以下我々は $\mathcal{Q}(A), \mathcal{Q}(B)$ をグラフ位相による内積 $\langle u, v \rangle = (Au, Av), \langle S, T \rangle = (BS, BT)$ の与えられた Hilbert 空間と見なす事とする。次に $E = \mathcal{Q}(A) \oplus \mathcal{Q}(B)$, $F = L_{2,\alpha} \oplus L_2$ とし非線型作用素 $\mathcal{N}: \mathbb{R}_\lambda^1 \oplus E \rightarrow F$ を

$$\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ u \\ T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{R}} Au + P_0 (\nabla_u u) + \lambda P_0 (r \nabla_r) \\ \frac{1}{\mathcal{P}} B \nabla T + \nabla_u T + \frac{\alpha}{r} u_r \end{bmatrix} \text{ で定義する。}$$

以下簡単の為に λ のみ variable parameter, $\mathcal{R}, \mathcal{P}, \alpha$ は fixed parameters とする。 又 $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\lambda, u, T)$ とし

又 $X = (u, T)$ として $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\lambda, u, T) = \mathcal{N}(\lambda, X)$ などとも書く事にする。 $\mathcal{N}_\lambda, \mathcal{N}_{\lambda\lambda}, \dots$ (resp. $\mathcal{N}', \mathcal{N}'', \dots$) で $\mathcal{N}$ の λ (resp. X) に関する微分を表わす。直ちに

$$\mathcal{N}(\lambda, 0) = \mathcal{N}_\lambda(\lambda, 0) = \mathcal{N}_{\lambda\lambda}(\lambda, 0) = \dots = 0, \quad \forall \lambda \quad (19)$$

である事が判る。

節5. 固有値問題

節2で述べたプログラムに従って 非線型作用素 N の Fréchet 微分の固有値問題を調べる。

$\mathcal{L}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} N'(\lambda, 0) : E \rightarrow F$ とすると

$$\mathcal{L}(\lambda) \begin{bmatrix} u \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{R}} A u + \lambda P_0(r \tau e_r) \\ \frac{1}{\mathcal{P}} B \tau + \frac{\alpha}{r} u_r \end{bmatrix} \quad (20)$$

となり、その共役作用素 $\mathcal{L}(\lambda)^* : F \rightarrow E$ は

$$\mathcal{L}(\lambda)^* \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} \left\{ \frac{1}{\mathcal{R}} A \hat{u} + \alpha P_0 \left(\frac{1}{r} \hat{\tau} e_r \right) \right\} \\ \hat{B}^{-1} \left(\frac{1}{\mathcal{P}} B \hat{\tau} + \lambda r \hat{u}_r \right) \end{bmatrix}$$

となる事が判る。 $\mathcal{L}(\lambda)^* \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = 0$ は

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} A \hat{u} + \alpha P_0 \left(\frac{1}{r} \hat{\tau} e_r \right) = 0 \\ \frac{1}{\mathcal{P}} B \hat{\tau} + \lambda r \hat{u}_r = 0 \end{cases} \quad (21)$$

と同等である。 Lemma 1, により $\mathcal{L}(\lambda) \begin{bmatrix} u \\ \tau \end{bmatrix} = 0$ は $p \in H^1(\Omega)$ が存在して

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta u - \lambda r \tau e_r + \text{grad } p = 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{P}} \Delta \tau - \frac{\alpha}{r} u_r = 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \text{div } u = 0, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega} = 0, \tau|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

と同等であり, $\lambda \mathcal{L}(\lambda)^* \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}}{r} \right) = 0$ は $\hat{p} \in H^1$ が存在して

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta \hat{\mathbf{u}} - \frac{\alpha}{r} \hat{\mathbf{T}} \mathbf{e}_r + \text{grad} \hat{p} = 0 & (22^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{P}} \Delta \hat{\mathbf{T}} - \lambda r \hat{\mathbf{u}}_r = 0 & (23^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div} \hat{\mathbf{u}} = 0 & (24^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} = 0, \hat{\mathbf{T}}|_{\partial\Omega} = 0 & (25^*) \end{cases}$$

と同等である (21) を用いて。

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad u_r(r, \theta) = f(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}, \quad u_\theta(r, \theta) = g(r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{T}(r, \theta) = \mathbb{H}(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}, \quad p(r, \theta) = \pi(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \in L^2$$

$$(22) - (25^*) \text{ に代入すると, } \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_r \mathbf{e}_r + \hat{\mathbf{u}}_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad u_r(r, \theta) =$$

$$\hat{f}(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}, \quad \hat{u}_\theta(r, \theta) = \hat{g}(r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}}(r, \theta) =$$

$$\hat{\mathbb{H}}(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}, \quad \hat{p}(r, \theta) = \hat{\pi}(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \in L^2 \quad (22^*) - (25^*)$$

に代入すると,

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{1}{r} (r f')' - \frac{n^2+1}{r^2} f - \frac{2n}{r^2} g \right\} - \lambda r \mathbb{H} + \pi' = 0 & (26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{1}{r} (r g')' - \frac{n^2+1}{r^2} g - \frac{2n}{r^2} f \right\} + \frac{n}{r} \pi = 0 & (27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{r} (r \mathbb{H}')' - \frac{n^2}{r^2} \mathbb{H} \right\} - \frac{\alpha}{r} f = 0 & (28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} (r f)' + \frac{n}{r} g = 0 & (29) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = g = \mathbb{H} = 0, \quad r=1, R. & (30) \end{cases}$$

及び

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{1}{r} (r \hat{f}')' - \frac{n^2+1}{r^2} \hat{f} - \frac{2n}{r^2} \hat{g} \right\} - \frac{\alpha}{r} \hat{\Theta} + \hat{\pi}' = 0 & (26^*) \\ \frac{1}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{1}{r} (r \hat{g}')' - \frac{n^2+1}{r^2} \hat{g} - \frac{2n}{r^2} \hat{f} \right\} - \lambda r \hat{f} = 0 & (27^*) \\ \frac{1}{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{r} (r \hat{\Theta}')' - \frac{n^2}{r^2} \hat{\Theta} \right\} - \lambda r \hat{f} = 0 & (28^*) \\ \frac{1}{r} (r \hat{f}')' + \frac{n}{r} \hat{g} = 0 & (29^*) \\ \hat{f} = \hat{g} = \hat{\Theta} = 0, \quad r=1, R_0. & (30^*) \end{cases}$$

(26)-(30) から π, g を, (26*)-(30*) から $\pi, \hat{g}$ を消去す

ると

$$\begin{cases} M f = -\mathcal{R} \lambda n^2 r^3 \hat{\Theta} & (31) \\ (r \hat{\Theta}')' - \frac{n^2}{r} \hat{\Theta} = \mathcal{P} \alpha f & (32) \\ f = f' = \hat{\Theta} = 0, \quad r=1, R_0. & (33) \end{cases}$$

及び

$$\begin{cases} M \hat{f} = -\mathcal{R} \alpha n^2 r \hat{\Theta} & (31^*) \\ (r \hat{\Theta}')' - \frac{n^2}{r} \hat{\Theta} = \mathcal{P} \lambda r^2 \hat{f} & (32^*) \\ \hat{f} = \hat{f}' = \hat{\Theta} = 0 & (33^*) \end{cases}$$

を得る。但し $M = \left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - (n^2-1) \right\} \left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - (n^2+1) \right\}$

とする。

次の2つの補題は良く知られている。

Lemma 3. $D_i = a_i(r) \frac{d^2}{dr^2} + b_i(r) \frac{d}{dr} + c_i(r)$, $i=1, 2$
 を区間 (r_1, r_2) に於ける滑らかな係数をもつ常微分作用素とし、次の2つの境界値問題を考える。

$$(BVP-1) \quad \begin{cases} D_1 u = f \\ u(r_i) = 0, \quad i=1, 2. \end{cases}$$

$$(BVP-2) \quad \begin{cases} D_1 D_2 u = f \\ u(r_i) = u'(r_i) = 0, \quad i=1, 2. \end{cases}$$

a_i, b_i, c_i が実数で $a_i(r) > 0$, $c_i(r) \leq 0$ ならば
 (BVP-1), (BVP-2) は Green 関数 (夫々 $K_1(r, s)$, $K_2(r, s)$ とする) を持ちかつ

$K_1(r, s) < 0$, $K_2(r, s) > 0$, $(r, s) \in (r_1, r_2) \times (r_1, r_2)$
 が成立する。

(Kirchgässner (10), Rabinowitz (16) 参照)

Lemma 4. $K(r, s)$ を区間 (r_1, r_2) に於ける連続核とし、 $K(r, s) > 0$, $(r, s) \in (r_1, r_2) \times (r_1, r_2)$ を満たすものとする。此の時積分作用素 $(Ku)(r) = \int_{r_1}^{r_2} K(r, s) u(s) ds$ は正の特性値 ($\stackrel{\text{def}}{=} 1/\text{固有値}$) を持つ。更に正の特性値の中で最小のものは単独でかつ、対応する特性関数は (r_1, r_2) で正值をとるものがとれる。

(Schmeidler (22), Krein-Rutman (11), Karlin (6), (7) 参照)。

さて此処で我々の境界値問題 (31) - (33) 及び (31*) - (33*) に戻る。次の境界値問題を考える。

$$(BVP-1) \begin{cases} Mf \equiv \left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - (n^2 - 1) \right\} \left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - (n^2 + 1) \right\} f = \varphi \\ f(1) = f'(1) = f(R_0) = f'(R_0) = 0 \end{cases}$$

$$(BVP-2) \left\{ (r\Theta')' - \frac{n^2}{r}\Theta = \psi, \quad \Theta(1) = \Theta(R_0) = 0 \right.$$

$$(BVP-\hat{1}) \left\{ M\hat{f} = \hat{\varphi}, \quad \hat{f}(1) = \hat{f}'(1) = \hat{f}(R_0) = \hat{f}'(R_0) = 0 \right.$$

$$(BVP-\hat{2}) \left\{ (r\hat{\Theta}')' - \frac{n^2}{r}\hat{\Theta} = \hat{\psi}, \quad \hat{\Theta}(1) = \hat{\Theta}(R_0) = 0 \right.$$

(BVP-1, 2, $\hat{1}$, $\hat{2}$) は Lemma 3 による Green 関数 K_1 , K_2 , $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$ を持ち, かつ $1 < \forall r, \forall s < R_0$ に対して

$$K_1(r, s) > 0, K_2(r, s) < 0, \hat{K}_1(r, s) > 0, \hat{K}_2(r, s) < 0$$

が成り立つ。此等の核を用いると (31) - (33) 及び (31*) - (33*) は夫々次の積分方程式 (34) 及び (34*) に変換される。

$$\begin{cases} f(r) = \mu \int_1^{R_0} K(r, s; n) f(s) ds, & (34) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{f}(r) = \mu \int_1^{R_0} \hat{K}(r, s; n) \hat{f}(s) ds. & (34*) \end{cases}$$

$$\text{但し } \mu = PR\alpha\lambda = R_1^4 \alpha \omega^2 (T_2 - T_1) / \kappa \nu \log(R_2/R_1) \quad \text{及び}$$

$$K(r, s; n) = -n^2 \int_1^{R_0} K_1(r, t; n) t^3 K_2(t, s; n) dt,$$

$\hat{k}(r, \lambda) = -n^2 \int_1^{R_0} \hat{k}_1(r, t; n) k_2(t; \lambda; n) \lambda^2 dt$
 とする。直ちに判る様に $k(r, \lambda) > 0$, $\hat{k}(r, \lambda) > 0$,
 $1 < r, \forall \lambda < R_0$ が成立する。従って Lemma 4 により
 (34), (34*) は正の特性数を持つ。正の特性数の内最小
 のものを $\mu_n, \hat{\mu}_n$ とする。此の時次の補題が成り立つ。

Lemma 5. $\mu_n = \hat{\mu}_n$.

証明. 略。

次の定義を設ける。

Definition 1. $\mu_c = \min_n \mu_n$

Lemma 6. $\mu_c > 0$.

Lemma 7. $\mu_n = \mu_c$ となる n は 高々有限個。

証明は いずれも省略する。Lemma 6 により 次の
 定義は well-defined である。

Definition 2. $n_c = \max\{n; \mu_n = \mu_c\}$ とおき
 臨界波数 (critical wave number) と呼ぶ。

節 6. 対称性と関数空間の縮小

$\lambda_c = \mu_c / PR\alpha$ とおくと $\mathcal{L}(\lambda): E \rightarrow F$ は $0 < \lambda < \lambda_c$
 及び $\lambda_c < \lambda < \lambda_c + \delta$ ($\exists \delta > 0$) で同型でかつ

$$\dim \text{Ker } \mathcal{L}(\lambda) = 2 \times \text{number of } \{n; \mu_n = \mu_c\} \quad (35)$$

で $\ast 1$ と同じ節 2 で述べたプログラムが用いられない。それで以下に述べる様に E, F の部分空間をうまくとり、 $\dim \text{Ker } \mathcal{L}(\lambda) = 1$ となる問題に、我々の問題を帰着させる。それをうまく行うには以下に述べる様に問題の持つ対称性を利用すると良い。

$\gamma \in O(2)$ (2次元直交群), $u \in L_2, \tau \in L_2$ に対して

$$(V_\gamma u)(x) = \gamma u(\gamma^{-1}x), (W_\gamma \tau)(x) = \tau(\gamma^{-1}x)$$

とおく。明らかに V, W は $O(2)$ の L_2, L_2 上の直交表現群を定義するが更に次の事が判る。

Lemma 8. (1) 任意の $\gamma \in O(2), u \in L_{2,\sigma}$ に対して $V_\gamma u \in L_{2,\sigma}$, 即ち V は $L_{2,\sigma}$ 上の $O(2)$ の直交表現を定義する。

(2) $X = (u, \tau) \in L_{2,\sigma} \oplus L_2, \gamma \in O(2)$ に対して $(\Gamma_\gamma X)(x) = (V_\gamma u, W_\gamma \tau)$ とおく。此の時

$$\begin{array}{ccc} E \equiv \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B) & \xrightarrow{\mathcal{N}} & F = L_{2,\sigma} \oplus L_2 \\ \downarrow \Gamma_\gamma & & \downarrow \Gamma_\gamma \\ E & \xrightarrow{\mathcal{N}} & F \end{array}$$

は任意の $\gamma \in O(2)$ に対して可換である。(証明, 略)。

証. 我々の非線型作用素 $\mathcal{N}$ が $O(2)$ -不変性を持つ

とは、此の diagram の可換性を意味するとする。

Definition 3. 自然数 n に対して, G_n で $O(2)$ の部分群で角度 $2\pi/n$ の回転及び X_1 -軸に関する鏡映より生成される部分群を表すものとする。

Definition 4. 自然数 n に対して

$$E_n (\text{resp. } F_n) = \{ X = (u, \Gamma) \in E (\text{resp. } F); \Gamma_\gamma X = X, \forall \gamma \in G_n \}$$

と置く。このとき

Lemma 9. $X = (u, \Gamma) \in E (\text{resp. } F)$ が

$X \in E_n (\text{resp. } F_n)$ となる為の必要かつ十分条件は

$X = (u, \Gamma) = (f e_r + g e_\theta, \Gamma)$ とおく時 f, g, Γ が

$$f(r, \theta) = \sum_0^\infty f_k(r) \cos kn\theta, g(r, \theta) = \sum_1^\infty g_k(r) \sin kn\theta, \Gamma(r, \theta) = \sum_0^\infty \Gamma_k(r) \cos kn\theta$$

の形に Fourier 展開される事である。

Lemma 10. (1) $\mathcal{N}$ は E_n を F_n に写す。

(2) (1) と $\Gamma_\gamma 0 = 0, \forall \gamma \in G_n$ より $\mathcal{L}(\lambda)$ は E_n を F_n に $\mathcal{L}(\lambda)^*$ は F_n を E_n に写す。

証明. 自明。

以後 $n = n_c$ (critical wave number) とし,

$\mathcal{N}: R_\lambda^1 \oplus E_{n_c} \rightarrow F_{n_c}, \mathcal{L}(\lambda): E_{n_c} \rightarrow F_{n_c}, \mathcal{L}(\lambda)^*: F_{n_c} \rightarrow E_{n_c}$ と考

える。此の意味の $\mathcal{L}(\lambda)$ は 此の意味の $\mathcal{N}$ の $(\lambda, 0)$ に於ける X に関する Fréchet 微分 となっている。

次の補題は これまでの議論より 明らかである。

Lemma 11. (1) $\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{L}(\lambda)^*$ は $\text{index} = 0$ の Fredholm 型の線型作用素である。

(2) $0 < \lambda < \lambda_c, \lambda_c < \lambda < \lambda_c + \delta$ ($\exists \delta > 0$) なる λ に対して $\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{L}(\lambda)^*$ は isomorphism である。

(3) $\dim \text{Ker } \mathcal{L}(\lambda_c) = \dim \text{Ker } \mathcal{L}(\lambda_c)^* = 1$ 。

(4) $\text{Ker } \mathcal{L}(\lambda_c)$ 及び $\text{Ker } \mathcal{L}(\lambda_c)^*$ は それぞれ 次の形をした X_{n_c} 及び $\hat{X}_{n_c}$ で張られる。

$$X_{n_c} = (u_{n_c}, \tau_{n_c}) = (f_{n_c}(r) \cos n_c \theta e_r + g_{n_c}(r) \sin n_c \theta e_\theta, \Theta_{n_c}(r) \cos n_c \theta),$$

$$\hat{X}_{n_c} = (\hat{u}_{n_c}, \hat{\tau}_{n_c}) = (\hat{f}_{n_c}(r) \cos n_c \theta e_r + \hat{g}_{n_c}(r) \sin n_c \theta e_\theta, \hat{\Theta}_{n_c}(r) \cos n_c \theta),$$

但し f_{n_c} 及び $\hat{f}_{n_c}$ は、それぞれ $n = n_c$ とした (34), (34*) の解で $(1, R_0)$ で 正值をとるもので、 g_{n_c}, Θ_{n_c} 及び $\hat{g}_{n_c}, \hat{\Theta}_{n_c}$ は 夫々 (26) - (30) 及び (26*) - (30*) の対応する解とする。

節 7. 自明な解の枝分かれ

以上で節 2 のプログラムの為の準備がすべて整った。

節 2 の記号に合わせる為、前節の E_{n_c}, F_{n_c} を単に E, F

とかき, 又 $X_{n_c}, \hat{X}_{n_c} \in X_0, \hat{X}_0$ とかく。これに合わせて他の記号の n_c はすべて 0 に書き直す事にする。

節 2 に合わせて

$$h(\lambda, \xi) = (N(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)), \hat{X}_0)_F \quad \text{とかく。}$$

$$h(\lambda_c, 0) = h_\lambda(\lambda_c, 0) = h_\xi(\lambda_c, 0) = h_{\lambda\lambda}(\lambda_c, 0) = 0$$

である事は容易に確かめられる。又

$$h_{\xi\xi}(\lambda_c, 0) = (N'_\lambda(\lambda_c, 0)X_0, \hat{X}_0)_F = \left(\begin{bmatrix} P_0(rT_0 e_r) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{T}_0 \end{bmatrix} \right)_F$$

$$= \int_{\Omega} r T_0 \hat{u}_{r0} \, dx.$$

この値を a とおくと

$$a = \int_0^{2\pi} \int_1^{R_0} \Theta_0(r) \hat{f}_0(r) \cos^2 n_c \theta \cdot r^2 \, dr = \pi \int_1^{R_0} \Theta_0(r) \hat{f}_0(r) r^2 \, dr$$

であるが, $\hat{f}_0(r) > 0$, $1 < r < R_0$ 及び Θ_0 は

$$(r\Theta_0')' - \frac{n_c^2}{r} \Theta_0 = \mathcal{P} \alpha f_0, \quad \Theta_0(1) = \Theta_0(R_0) = 0,$$

であるので $f_0(r) > 0$, $1 < r < R_0$, 及び Lemma 3 により

$\Theta_0(r) < 0$, $1 < r < R_0$ である。故に $a < 0$ 。故に

$h(\lambda, \xi)$ の $(\lambda_c, 0)$ に於ける Hessian matrix は

$$H = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & * \end{bmatrix}, \quad a < 0$$

の形となり 節2で述べた様に Morse の補題により
自明な解からの定常解の枝分かれが結論される。
以上の議論を総まとめして次の結果が得られる。

定理. 方程式 $N(\lambda, X) = 0, (\lambda > 0)$ に対して
 $\lambda_c > 0$ が存在して

(1) $0 < \lambda < \lambda_c$ に対して解 $(\lambda, 0)$ は枝分かれ点ではない。

(2) $R_\lambda^1 \oplus E$ (この E はちとち, 即ち $= Q(A) \oplus Q(B)$)
に於ける曲線 $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow R_\lambda^1 \oplus E$ ($\exists \delta > 0$) が
存在して

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \gamma \text{ は } (\lambda_c, 0) \text{ で直線 } R_{\lambda_c}^1 \oplus \{0\} \text{ と横断的に} \\ \text{交わる。} \\ \text{(ii)} \quad \gamma(p) = (\lambda(p), X(p)) \text{ とかくとき} \end{array} \right.$$

$$N(\lambda(p), X(p)) = 0.$$

が成立する。

残された問題点

その1. 此の小論で述べた枝分かれは $\lambda > 0$ を増加させてゆく時, 定常解の範囲では最初のものであるが, Hopf 型の枝分かれ, 即ち周期解への枝分かれをも考慮した範囲では最初のものかは明らかではない(その為にあつて枝分かれ解の安定性の考察はしなかった)。

その2. 本稿でその存在を証明した枝分かれ解は簡単な考察で分かる様に対流型の流れである。即ち, 円環が $2m$ 個の扇形領域に分かれ, 各々の内部で独立した対流が起こる。これは我々の採用したモデルの実験結果(Gotoh[5]及びそこに挙げられている文献参照)による“蛇行する”流れと本質的に異なる。では此の蛇行する解をつかまえるにはどうすれば良いか? 筆者の考えの一つは次の様である。

蛇行する流れは、鏡映変換に関して不変ではない。鏡映不変な我々の方程式が鏡映不変でない解を持つかも知れぬという事は *symmetry breaking bifurcation* という見方からは興味ある考へではあるが, もっと直接的に此の不変性を破る *positive factor* を考へる可能性もある。その一つは状況を変えて方程式そのものの鏡映不変性を破って

しまう事である。筆者はその手段として次の2つを考えて見た。

(1) 2つの円筒の回転角速度を僅かに異なるものとする事。

(2) 回転座標系に於ける我々の方程式が鏡映不変となった理由は、(i) 2つの円筒の角速度が等しい事、(ii) エネルギーが圧力項に組み入れられる事、の2点にある。従って一般の3次元流を考へれば方程式は鏡映不変ではない。

筆者は(1)の場合、角速度の差(2)の場合、角速度そのもの、に関する perturbation として問題を扱って見たが現在の所不首尾に終っている。

References

- [1] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford University Press 1961.
- [2] —————, The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a radial temperature gradient, J. Rational Mech. Anal. 3-I, 1954, 181-207.
- [3] Fujita, H. and Kato, T., On non-stationary Navier-Stokes system, Rendiconti Seminario Math. Univ. Padova 32, 243-260 (1962).
- [4] —————, On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rational Mech. Anal. 16, 1964. 269-315.
- [5] Gotoh, K., Theory of Stability of Flows (in Japanese), Sangyo Tosho, Tokyo 1976.
- [6] Karlin, S., Total positivity and applications V.I. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1967.
- [7] —————, The existence of eigenvalues for integral operators Trans. Amer. Math. Soc. 113, 1-17(1964).
- [8] Kirchgässner, K. and Kielhöfer, H., "Stability and bifurcation in fluid dynamics, "Rocky Mountain J. Math. 3(1973), 275-318.
- [9] —————, Instability phenomena in fluid mechanics, numerical solution of partial differential equations, III, Academic Press Inc. New York, 1976, 349-368.
- [10] —————, Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebigen Spaltbreiten. Z.A.M.P. 12, 14-30(1961).
- [11] Krein, M.G. and Rutman, M.A., Linear operators leaving a cone in a Banach space, Translations of the A.M.S., Series 1, 10, 1962, 199-325.
- [12] Ladyzhenskaya, O. A., The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1963.

- [13] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., Fluid Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
- [14] Nirenberg, L., Topics in Nonlinear Functional Analysis, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York Univ., 1973-1974.
- [15] Rabinowitz, P.H. and Crandall, M.G., Bifurcation from simple eigenvalues, J. Funct. Anal. 8, 321-340(1971).
- [16] Rabinowitz, P.H., Existence and nonuniqueness of rectangular solution of the Bénard problem, Arch. Rational Mech. Anal. 29(1968), 32-57.
- [17] Sattinger, D.H., Group representation theory, bifurcation theory and pattern formation, (to appear).
- [18] ———, Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Note in Math. No.309, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1973.
- [19] ———, Transformation groups and bifurcation at multiple eigenvalues, Bull. Amer. Math. Soc. Vol.79 No.4. 1973, 709-711.
- [20] ———, The mathematical problem of hydrodynamic stability, J. Math. Mech. Vol.19 No.9(1970), 797-817.
- [21] ———, Group representation theory and branch point of nonlinear functional equations, (to appear).
- [22] Schmeidler, W., Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Bd. 1., Berlin, 1950.
- [23] Velte. W., Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, Arch. Rational Mech. Anal. 16(1964), 97-125.
- [24] ———, Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylorproblem, Arch. Rational Mech. Anal, 22(1966), 1-14.