

2次元球面のGottlieb群

大阪大学・理 井上 明 (Akira Inoue)

§0 ファイバーが F であるファイブレーションとファイバー写像 f に対して, 包含写像 $i: F \rightarrow E$ がホモトピー左逆写像を持つとき, $G_n^f(E, F)$ は $G_n^f(F, F) \oplus \pi_n(B)$ に等しい事が [5] で示されている. ここでは, 切断 $s: B \rightarrow E$ を持つファイブレーション $F \rightarrow E \rightarrow B$ に対し, $G_n^{sop}(E, E)$ は $G_{n+1}^R(p) \oplus G_n(B)$ に同型である事を示し, これにより, 2次元球面のGottlieb群を計算する.

§1 すべての空間は連結有限CW複体とし, すべての空間対はCW対とする. x_0 を X とその部分空間の基点とし, X^A で A から X への写像空間を表す. また, ω で X^X または X^A から X への基点 x_0 での評価写像を表す. そうして $G_n(X)$ を $G_n(X) = \{[h] \in \pi_n(X) \mid [H|_{x_0 \times I^n}] = [h], H|_{X \times \partial I^n} = id_X \text{ なる } H: X \times I^n \rightarrow X \text{ が存在する.}\}$ と定義する. これは $\omega_{\#}: \pi_n(X^X, id_X) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ の像に等しい. また, 写像 $f: (A, a_0) \rightarrow (X, x_0)$ に対して $G_n^f(X, A)$ を $G_n^f(X, A) = \{[h] \in \pi_n(X) \mid [H|_{x_0 \times I^n}] = [h], H|_{A \times \partial I^n} = f \text{ なる } H: X \times I^n \rightarrow X \text{ が存在する.}\}$ と定義する. これは $\omega_{\#}: \pi_n(X^A, f) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ の像に等しい. 特に, 包含写像 $i: A \rightarrow X$ に対して, $G_n^i(X, A)$ を $G_n(X, A)$ と書く. また一般に $G_n(X) \subset G_n^f(X, A)$ が成り立つ. 次に, $G_n^{Rel}(X, A)$ を $\pi_n(X, A)$ の部分群として, $G_n^{Rel}(X, A) = \{[h] \in \pi_n(X, A) \mid [H|_{x_0 \times I^n}] = [h], H|_{X \times J^{n-1}} = id_X \text{ なる } H: (X \times I^n, A \times \partial I^n) \rightarrow (X, A) \text{ が存在する.}\}$ と定義し, 対の自己写像 $f: (X, A) \rightarrow (X, A)$ に対して $G_n^{Rel}(f)$ を $G_n^{Rel}(f) = \{[h] \in \pi_n(X, A) \mid [H|_{x_0 \times I^n}] = [h], H|_{X \times J^{n-1}} = f \text{ なる } H: (X \times I^n, A \times \partial I^n) \rightarrow (X, A) \text{ が存在する.}\}$ と定義する. これらもまた, $G_n^{Rel}(X, A) = \omega_{\#}(\pi_n(X^A, A^A, i)), G_n^{Rel}(f) = \omega_{\#}(\pi_n(X^A, A^A, f))$ となる.

写像 f のホモトピー群 $\pi_n(f) = \{[(\alpha_1, \alpha_2)] \mid (\alpha_1, \alpha_2): \pi_n \rightarrow f\}$ が定義される.[3] ここで, CS^{n-1} は約錐であり, $i_n: S^{n-1} \rightarrow CS^{n-1}$ は標準的な包含写像である. また, $F_1: A \times S^{n-1} \rightarrow A$, $F_2: A \times CS^{n-1} \rightarrow X$ が $F_1|_{a_0 \times S^{n-1}} = \alpha_1, F_1|_{A \times s_0} = id$, $F_2|_{a_0 \times CS^{n-1}} = \alpha_2, F_2|_{A \times s_0} = f$ を満たし, さらに, 次の可換図式,

$$\begin{array}{ccc} A \times S^{n-1} & \xrightarrow{F_1} & A \\ \downarrow id \times i_n & & \downarrow f \\ X \times CS^{n-1} & \xrightarrow{F_2} & X \end{array}$$

を満たす, (F_1, F_2) を (α_1, α_2) の提携写像と言う. ここで a_0 は A の, s_0 は S^{n-1} と

CS^{n-1} の基点を表す. そうして $\pi_n(f)$ の部分群 $G_n^R(f)$ を $G_n^R(f) = \{[(\alpha_1, \alpha_2)] \in \pi_n(f) \mid (\alpha_1, \alpha_2) \text{ の提携写像 } (F_1, F_2) \text{ が存在する.}\}$ と定義する.

§2 包含写像 $i: A \rightarrow X$ がホモトピー右逆写像を持つとき次のことが言える.

定理 1. (X, A) を CW 対とする. 包含写像 $i: A \rightarrow X$ がホモトピー右逆写像 r を持つ, すなわち, $i \circ r$ が恒等写像 id_X にホモトピックであるとき, $G_n^{roi}(A, A)$ は $G_{n+1}^{Rel}(X, A) \oplus G_n(X, A)$ に同型である.

次に写像 $f: A \rightarrow X$ がホモトピー右逆写像 h を持つときを考える. f の写像柱を Z_f とすると, A から Z_f の包含写像はホモトピー右逆写像を持つ. したがって, $G_n^f(X, A)$ と $G_n(Z_f, A)$, $G_n^R(f)$ と $G_n^{Rel}(Z_f, A)$ とがそれぞれ同型になる [6] と言うことに注意しこれに定理 1 を適用すると次が得られる.

定理 2. 写像 $f: A \rightarrow X$ がホモトピー右逆写像 h を持つ, すなわち, $h \circ f$ が恒等写像 id_X にホモトピックであるとき, $G_n^{hof}(A, A)$ は $G_{n+1}^R(f) \oplus G_n^f(X, A)$ に同型である.

そうして, 切断を持つファイブレーションに対し, これを適用して, $G_n^p(B, E) = G_n(B)$ となる事より, 次を得る.

定理 3. $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ を切断 $s: B \rightarrow E$ を持つファイブレーションとすると, $G_n^{op}(E, E)$ は $G_{n+1}^R(p) \oplus G_n(B)$ に同型である.

§3 最後に, 2次元球面の Gottlieb 群の計算をしておく. その前に以下の計算で用いる補題 [4] を 1 つの述べておく.

補題 4. 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $F|_{Y \vee X} = id_Y \vee f$ となる写像 $F: Y \times X \rightarrow Y$ が存在するならば, $f_*(\pi_n(X)) = G_n(X)$ となる.

Hopf ファイブレーション $S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ とこれに同伴するファイバーが S^3 である S^1 バンドル

$$S^3 \rightarrow S^3 \times_{S^1} S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

を考える. $G_1(S^3) = 0$ よりこのバンドルは切断を持つ [2]. 故に, 定理 3 より

$$G_n^{op}(S^3 \times_{S^1} S^3, S^3 \times_{S^1} S^3) \cong G_{n+1}^R(p) \oplus G_n(S^2) \quad (1)$$

今 S^1 は $S^3 \times_{S^1} S^3$ に $e^{i\theta}(z, w) = (ze^{-i\theta}, e^{i\theta}w)$ (ここで $e^{i\theta} \in S^1, (z, w) \in S^3 \times S^3$ とし, z, w は大きさが 1 の 4 元数とみて, 右辺の $ze^{-i\theta}, e^{i\theta}w$ は 4 元数の積とみなす) と自由に作用するから $S^1 \rightarrow S^3 \times S^3 \xrightarrow{q} S^3 \times_{S^1} S^3$ は主バンドルとなり, ファイバーホモトピー完全系列から $i \geq 3$ に対して,

$$\pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3) \cong \pi_i(S^3 \times S^3)$$

また, $F : (S^3 \times_{S^1} S^3) \times (S^3 \times S^3) \rightarrow (S^3 \times_{S^1} S^3)$ を $F([z, w], (t, u)) = [tz, wu]$ とすると, $F|_{(S^3 \times_{S^1} S^3) \vee (S^3 \times S^3)} = id \vee q$. 故に補題 4 より, $q_* : \pi_n(S^3 \times S^3) \rightarrow G_n(S^3 \times_{S^1} S^3)$ は全射. また主 S^1 バンドル q のファイバーホモトピー完全系列を考えると, $i \geq 3$ に対して $q_* : \pi_i(S^3 \times S^3) \rightarrow \pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3)$ は同型となるから, $i \geq 3$ に対して

$$G_i(S^3 \times_{S^1} S^3) = \pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3)$$

一般に $G_n(S^3 \times_{S^1} S^3) \subset G_n^{sop}(S^3 \times_{S^1} S^3, S^3 \times_{S^1} S^3) \subset \pi_n(S^3 \times_{S^1} S^3)$ となるから, $i \geq 3$ に対して $G_i^{sop}(S^3 \times_{S^1} S^3, S^3 \times_{S^1} S^3) = \pi_i(S^3 \times_{S^1} S^3) = \pi_i(S^3 \times S^3)$ が言える. すると, (1) と $G_{n+1}^R(p) \subset \pi_n(S^3)$, $G_n(S^3) \subset \pi_n(S^3)$ から,

$$G_i(S^2) \cong \pi_i(S^3)$$

を得る.

参考文献

- [1] D.H.Gottlieb, *A certain subgroup of the fundamental group*, Amer.J.Math.87 (1965), 840-856
- [2] —, *Evaluation subgroups of homotopy groups*, Amer.J.Math.91(1969), 729-756
- [3] P.Hilton, *Homotopy theory and duality*, Thomas Nelson and Sons LTD, 1965
- [4] G.E.Lang, Jr., *Evaluation subgroups of factor spaces*, Pacific J.Math.42(1972), 701-709
- [5] M.H.Woo, *$G(f)$ -sequence and fibrations*, Comm.Korean Math.Soc.12(1997), 709-715
- [6] J.Pan, X.Shen and M.H.Woo, *The G -sequence of a map and its exactness*, J.Korean Math.Soc.35(1998), 281-294