

Yang-Mills 方程式の解の空間について

京大数理研 村瀬元彦

§0. Introduction

E を 3 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^3$ 上の simple algebraic vector bundle of rank n とする. 以下では E の Chern number が, $c_1(E)=0$, $c_2(E)>0$ となるようなものを扱う. さらに, $\mathbb{P}^3$ の general line l に対し, E の l への制限 $E|_l$ が algebraically trivial になっていると仮定する. (例えば rank が 2 の場合には $c_1(E)=0$ のもとでこの仮定は常に満たされる. Grauert-Mulich の定理, Barth [4].)

$E|_l$ が代数的に自明でないような $\mathbb{P}^3$ の projective line l を jumping line of E と呼ぶ.

Problem

上の様な E に対しては, その isomorphism class は E の jumping lines によって決まるか?

例えば rank=2 の時, $c_2(E)=1, 2$ であれば肯定的

である。(Hartshorne [6]).

さて、一方で、1977年あたりから、物理学で扱われていた“instanton”が実は上に述べた代数的 vector bundle の実例を与えることが知られるようになった。ここで instanton とは次の様なものである；実4次元球面 S^4 を底空間に持ち $SU(n)$ を構造群とする C^∞ -principal fibre bundle P をひとつ固定したとき、 P 上の C^∞ -connection form ω であって、それから作った curvature form の L^2 -norm が最小になるようなもの。(Instanton と vector bundle の対応については [3], [7] を参照。また「数学」第30巻第2号 pp. 160 に簡潔な解説がある。)

ここでは次の結果を紹介する；

Theorem 1. (pp. 12)

$SU(2)$ -instanton に対応する rank 2 の vector bundle に対しては、その同型類は jumping lines によって定まる。(cf. Hartshorne [5], pp. 15.)

実は“irreducible”という条件のもとで、上の定理は $SU(3)$ -instanton に対応する rank 3 の vector bundle に

についても成立する. 一般の irreducible $SU(n)$ -instanton ($n \geq 4$) についても正しいであろうと思われるがまだ判らな. 以下では主に $SU(2)$ の場合を扱い, $n \geq 3$ については §3 で簡単に触れるにとどめる. 詳しくは [9] 参照.

Instanton は S^4 上に定義された (anti-) self-dual Yang-Mills 方程式と呼ばれる 1 階の非線型微分方程式の解としても特徴づけられる. Atiyah-Hitchin-Singer は index theorem を用いてその解空間の次元を求めたが ([1]), 具体的にどんな幾何学的 parameter によって解が決まるのか, はその結果からは出ない.

ところで, E の jumping lines は, $\mathbb{P}^3$ の lines を分類する Grassmann manifold $Gr(1,3)$ 上の divisor を為している. この $Gr(1,3)$ は S^4 の natural な複素化になっており, しかも jumping lines の為す divisor と connection ω の "poles" の為す divisor とが一致しているのである. その divisor の degree は, $Pic(Gr(1,3)) \cong \mathbb{Z} \cong H^4(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$ の元として $c_2(E)$ に等しい. Instanton から algebraic vector bundle $\wedge$ の対応が 1 対 1 であるこ

とから、次の定理が成り立つ。

Theorem. 2.

(Anti-) self-dual Yang-Mills 方程式の解は、その複素領域に於ける "poles" の場所によって決まる。

§1. では instanton について簡単に述べる。

§2. で theorem 1 の証明を行ない、§3. で rank が高い場合 (即ち $SU(n)$ $n \geq 3$ の場合) について少し触れる。"Pole" についての話は [8] に譲る。

§1. Instantons.

〔文献は Atiyah-Ward [3], Hartshorne [5], [7] の他, general reference として Atiyah et.al. [2] を挙げる。〕

実 4 次元球面 $S = S^4$ を底空間とする位相的 $SU(n)$ -principal bundle を P とする。 P に associate した rank n の vector bundle を $E = P \times_{SU(n)} \mathbb{C}^n$ で表わす。 P の位相的同型類は第 2 Chern 類 $c_2(P) \in H^4(S, \mathbb{Z})$ によって定まるが、 S に unique C^ω -structure を入れた時、 P の実解析的同型類も $c_2(P)$ によって

決まるので，以下では P は C^ω -bundle と仮定して
よ。

S の向きを固定して同型 $H^4(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を決め
たとき， $c_2 = c_2(P) > 0$ となる様な P のみを扱
う。 ω を P の C^ω -connection form, Ω を対応する curvature
form とする。 $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ である。 Ω は Lie 環
 $\mathfrak{su}(n)$ に値を持つ 2-form on S と見做せば Hodge star
operator による $*\Omega$ が定義出来る。

Proposition 1.

次の (1), (2) は同値；

(1) ω は $\|\Omega\|_{\text{def}}^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_S \text{trace}(\Omega \wedge *\Omega)$ の最小値を与
える。

(2) ω は $*(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = -(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega])$ を満たす。

(証明は簡単な計算で出来る。 [7] 参照)

上の (1) or (2) を満たす connection ω を $SU(n)$ -instanton
と呼ぶ。 また (2) の方程式を anti-self-dual Yang-Mills
方程式という。 (これに対し $*\Omega = \Omega$ を self-
dual Yang-Mills 方程式と呼ぶ。 Self-dual と anti-self-

dual の違いは S の orientation によるもののことで本質的ではない。以下では専ら anti-self-dual 方程式を扱う。))

ω を P の instanton とすれば,

$$\|d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\|^2 = C_2(P)$$

が成立する。つまり curvature の L^2 -norm の最小値は $C_2(P)$ で与えられている。この時 $C_2 = C_2(P) \in \mathbb{Z}$ を "instanton number" と称し, $\omega \in C_2$ -instanton solution と呼ぶことがある。

Definition 1.

P の C^ω -bundle automorphism $f: P \rightarrow P$, $\mathbb{R}P$ 上 C^ω -diffeomorphism で各 fibre を保ち, $\forall g \in SU(n), \forall p \in P$ に対し $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ を満たす f , を gauge 変換 と呼ぶ。 P の 2 つの connection ω, ω' に対して,

$\omega' = f^* \omega$ なる gauge 変換 f が存在するとき ω と ω' とは gauge 同値 である, と称する。

$SU(n)$ の自己の上への作用を conjugation で定めるとき, $f \in \Gamma(P \times_{SU(n)} SU(n))$ と思うことが出来る

る. 従って local trivializations E をめく P を変換函数系 $\{g_{\mu\nu}\}$ で表わせば, f は,

$f = \{f_{\mu}\}$, 各 f_{μ} は $f_{\mu} = g_{\mu\nu} f_{\nu} g_{\mu\nu}^{-1}$ を満たす $SU(n)$ -valued function, のように表示出来る. このとき, f は $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ なる線型変換を定義することになる.

Gauge 同値なものを除いてどのくらい instanton があるか, を問題にする.

§2. Algebraic Vector Bundles over $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$

H は Hamilton 4 元数体とする. $H \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \cong \mathbb{C}^2$ と見て $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \cong H^2/\mathbb{C}^*$ とすれば, $j: H^2 \ni (h_1, h_2) \sim (jh_1, jh_2) \in H^2$ によ, 2 involution $j: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ が定義される.

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \cong H^2/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\pi} H^2/H^* \cong S^4 = S$ なる natural projection を π で表わす. Involution j は π の各 fibre を保つ.

Theorem. (Atiyah-Ward [3])

Instanton ω は gauge 同値なものを除いて 1 対 1

に $\mathbb{P}_\mathbb{C}^3$ 上の $\overset{\text{rank } n}{\text{vector bundle}} E(\omega)$ に対応する. また,
 $c_1(E(\omega)) = 0$, $c_2(E(\omega)) = c_2(\mathbb{P}) > 0$ であり, $\mathbb{P}_\mathbb{C}^3$ の
 general line l への制限 $E(\omega)|_l$ は代数的自明である.

証明は, induced bundle π^*P の fibre $\in SL(n, \mathbb{C})$ に拡大したものに $\pi^*\omega$ によって almost complex structure を入れ, ω が instanton であることとその almost c.s. が integrable であることと同値であることを用いて行なわれる. ([2], [7] 参照)

$\mathbb{P}^3$ に同次座標 $(z_0; z_1; z_2; z_3)$ を入れ, 対応する Plücker 座標を p_{ij} で表わす. これと次の関係にあるような $\mathbb{P}_\mathbb{C}^5$ の同次座標をとる;

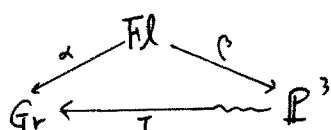
$$\begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{23} \\ p_{02} \\ p_{13} \\ p_{03} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -i & \\ & & 1 & i & \\ & & & 1 & -i \\ & & & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{P}_\mathbb{C}^5$ の中で方程式 $z_0^2 = z_1^2 + \dots + z_5^2$ によって定義される 2 次超曲面を Gr と書く. Gr は, $\mathbb{P}^3$ の line を分類する Grassmann manifold $Gr(1, 3)$ に等しい;

$Gr = Gr(1, 3)$. このとき, $\mathbb{P}^3$ の involution j によって natural に $\mathbb{P}^5$ に involution が induce される. そ

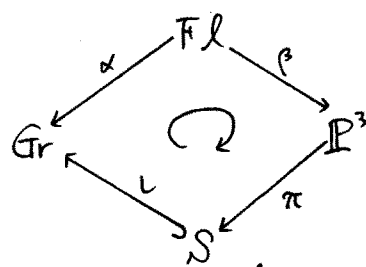
れは同次座標 $(z_0: \dots: z_5)$ に関する complex conjugation に他ならない。その involution による Gr の不動点集は、従って $S = S^4$ である。

$Fl = Fl(0, 1, 3) \subset Gr \times \mathbb{P}^3$ を flag variety, $\alpha: Fl \rightarrow Gr$, $\beta: Fl \rightarrow \mathbb{P}^3$ を自然に定義される projection, $\tau: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow Gr$ を algebraic correspondence とする。



$S \subset Gr$ の real point とし
 こうめ込む写像を ι
 で表わせれば、次の図

式は可換に存する；



G_2 -instanton ω と、 ω に対応する $\mathbb{P}^3$ 上の vector bundle $E(\omega)$ をとる。 $c_1(E(\omega)) = 0$ に注意すれば、 $\mathbb{P}^3$ の任意の line l に対し、

$$E(\omega)|_l \not\cong \text{trivial} \iff h^1(E(\omega) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)|_l) \neq 0$$

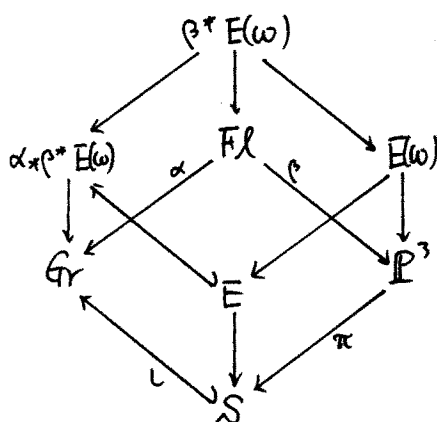
であることが判る。そこで、次のように定義しよう；

Definition. 2.

$\text{supp} (R^1 \alpha_* (\beta^* (E(\omega) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)))) = J(\omega) \subset \text{Gr}(1,3)$
 を $E(\omega)$ の jumping lines の 為す set と呼ぶ.

$J(\omega) \ni x \iff E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)} \neq \text{trivial}$, かなり立つ.

さて, α は local には $\text{Gr} \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\text{proj.}} \text{Gr}$ なる projection
 と同型だから, $\alpha_* (\beta^* E(\omega))|_{\text{Gr}-J(\omega)}$ は $\text{Gr}-J(\omega)$ 上の
 locally free sheaf になることが判る. また, τ



の vector bundle としこの引きもとしは

$$i^* (\alpha_* (\beta^* E(\omega))|_{\text{Gr}-J(\omega)}) = E \quad (\text{real analytic bundle etc.})$$

を満たすので,

$\widetilde{E}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_* (\beta^* E(\omega))|_{\text{Gr}-J(\omega)}$ を実解析的 vector bundle E
 の "解析接続" と呼ぶことにする.

以下では $SU(2)$ -instanton, 即ち rank 2 の vector bundle のみを扱う. $\text{Pic}(\text{Gr}(1,3)) \cong \mathbb{Z}$ に注意する.

Proposition 2. (Barth [4].)

$n=2$ のとき $J(\omega)$ は $\text{Gr}(1,3)$ の divisor であり, その degree と coherent analytic sheaf $R^1 \alpha_* \beta^*(E(\omega) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1))$ の第 1 Chern class ($\in H^2(\text{Gr}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$) で定義すれば

$$\deg J(\omega) = c_2(E(\omega)) \quad \text{が成立する.}$$

(cf. §3.)

Rank 2 の vector bundle $E(\omega)$ はさらに次の性質をもつ;

- 1) $H^0(\mathbb{P}^3, E(\omega)) = 0$, i.e. $E(\omega)$ は simple. (従ってこの場合は stable.)
- 2) $\mathbb{P}^3$ の involution j に lying over する bundle map $\hat{j}$ で,
 $\hat{j}: E(\omega) \rightarrow E(\omega)$, $\forall \{z\} \in \mathbb{P}^3$ に対し $\hat{j}_{\{z\}}: E(\omega)_{\{z\}} \rightarrow \overline{E(\omega)_{\{z\}}}$
 $\hat{j}^2 = -\text{id}_{E(\omega)}$, を満たす anti-linear map $\hat{j}$ が存在する.

2) は $SU(2) \cong \text{sp}(1)$ であることに由来する. つまり $E(\omega)$ は symplectic structure を許す訳である.

実は, 0) $c_1(E)=0, c_2(E)>0$, 1), 2) を満たす rank 2 vector bundle は instanton に対応する こと が 知られて いる ; $\exists \omega$ s.t. $E(\omega) \cong E$. ([3], [5].)

このとき, Gr 上の involution $\bar{}$ で表わせば,
 $J(\omega) = \overline{J(\omega)}$ が成り立ち, $\hat{E}_\omega$ は Gr の complex conjugation $\bar{}$ に lying over する anti-linear involution を持つ.

Theorem. 1.

1°). $\omega, \omega' \in 2$ の $SU(2)$ -instantons とする. このとき,
 $E(\omega) \cong E(\omega') \iff J(\omega) = J(\omega')$ (set theoretical に等しい.)

即ち, instanton に対応する vector bundle の isomorphism class は その jumping lines の 為す divisor によって 定まる.

2°). k -instanton solution ω に対して $c_2(E(\omega))=k$ が成り立ち, jumping lines の 為す set $J(\omega)$ は $J(\omega) = \overline{J(\omega)}$, $J(\omega) \cap S = \emptyset$ を満たす degree k の divisor である.

従って すべての k -instantons は, complete linear

$d\tilde{\omega}|_{\tau(z_1) \cap U} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]|_{\tau(z_1) \cap U} = 0$ を満たしてゐるから、この方程式を解くことにより $\tilde{\omega}|_{\tau(z_1) \cap U}$ が $\tau(z_1) \cap U$ 上の正則形式であることを知り、

$\tau(z_1) \cong \tau(z_2) \cong \mathbb{P}^2$ は x で transversal に交わるので x の近傍で $\tau(z_1)$ の座標 x_1, x_2 , $\tau(z_2)$ の座標 x_3, x_4 をとって $\tilde{\omega} = \sum_{m=1}^4 \tilde{\omega}_m(x_1, \dots, x_4) dx_m$ のように表わされる。 $x = (0, 0, 0, 0)$ としたとき、

$$\tilde{\omega}|_{\tau(z_1) \cap U} = \tilde{\omega}_1(x_1, x_2, 0, 0) dx_1 + \tilde{\omega}_2(x_1, x_2, 0, 0) dx_2$$

$$\tilde{\omega}|_{\tau(z_2) \cap U} = \tilde{\omega}_3(0, 0, x_3, x_4) dx_3 + \tilde{\omega}_4(0, 0, x_3, x_4) dx_4$$

のように表示されるから、 $\tilde{\omega}$ は x で正則である。□

3.

$$\alpha|_{Fl - \alpha^{-1}(J(\omega))} = \bar{\alpha}, \quad \beta|_{Fl - \alpha^{-1}(J(\omega))} = \bar{\beta}, \quad \bar{\alpha} \circ \bar{\beta}^{-1} = \bar{\tau}, \quad \text{と書く。}$$

$$\begin{array}{ccc} & Fl - \alpha^{-1}(J(\omega)) & \\ \bar{\alpha} \swarrow & & \searrow \bar{\beta} \\ Gr \setminus J(\omega) & \xleftarrow{\bar{\tau}} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

Lemma 2.

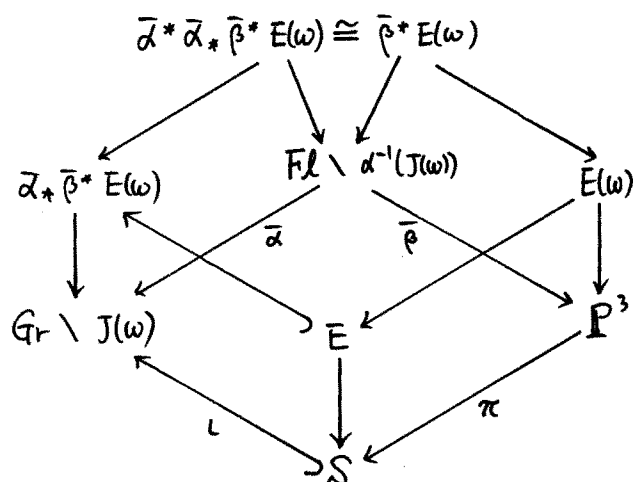
$$\bar{\alpha}^* \bar{\alpha}_* \bar{\beta}^* E(\omega) \cong \bar{\beta}^* E(\omega).$$

Proof. $\alpha: Fl \rightarrow Gr$ は local には $\text{proj}_2: Gr \times \mathbb{P}^1 \rightarrow Gr$

なる 1st factor $\wedge$ の projection と同型だから, これは, 次の自明な Lemma からの帰結である.

Lemma. 2'.

U は任意の open complex manifold, K は任意の compact complex manifold, $\varphi: U \times K \longrightarrow U$ は 1st factor $\wedge$ の projection, とする. $U \times K$ 上の locally free sheaf $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}|_{\varphi^{-1}(u)} = \text{free on } \varphi^{-1}(u)$ for $\forall u \in U$ を満たせば, $\varphi^* \varphi_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$.



$Fl - \alpha^{-1}(J(\omega))$ には connection $\bar{\alpha}^* \tilde{\omega}$ が定義されている. $\forall z \in P^3$ に対し $\bar{\beta}^{-1}(z)$ 上で $\bar{\alpha}^* \tilde{\omega}|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}$ は flat であるから, $\bar{\beta}^* E(\omega)|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}$ の flat section 全体

$$\Gamma_{\text{flat}}(\bar{\rho}^* E(\omega)|_{\bar{\rho}^{-1}(z)}) \\ = \{ \lambda \in H^0(\bar{\rho}^* E(\omega)|_{\bar{\rho}^{-1}(z)}) \mid d\lambda + (\bar{\alpha}^* \bar{\omega}|_{\bar{\rho}^{-1}(z)}) \lambda = 0 \}$$

が, z は holomorphic に よ, λ を定まる $\mathbb{C}$ 上の 2 次元 vector space とし λ を定義できる. z を z の fiber $\Gamma_{\text{flat}}(\bar{\rho}^* E(\omega)|_{\bar{\rho}^{-1}(z)})$ とする $\mathbb{P}^3$ 上の vector bundle $E_{\text{flat}}(\omega)$ と書くことにする.

Lemma. 3.

$$E_{\text{flat}}(\omega) \cong E(\omega).$$

Proof. $\bar{\rho}^* E(\omega)|_{\bar{\rho}^{-1}(z)}$ は trivial bundle $\rho^* E(\omega)|_{\rho^{-1}(z)}$ の $\bar{\rho}^{-1}(z)$ $\wedge$ の制限であるから, flat connection $\bar{\alpha}^* \bar{\omega}|_{\bar{\rho}^{-1}(z)}$ も trivial connection の制限として得られる. 即ち, $\bar{\rho}^* E(\omega)$ に定義された connection は自然に $\rho^* E(\omega)$ に拡張され, そのとき ρ の各 fibre $\rho^{-1}(z)$ ($z \in \mathbb{P}^3$) に ρ^* は拡張された connection は 0 になる. 従って,

$$E_{\text{flat}}(\omega) \cong \rho_* (\rho^* E(\omega)) \cong E(\omega). \square$$

4.

ω, ω' を 2 つの $SU(2)$ -instanton とする. $J = J(\omega)$

$= J(\omega')$ は $Gr(1,3)$ の divisor である. このとき $E(\omega)$ と $E(\omega')$ とは real analytic bundle として同型であるか, 実はこのことが次から成り立つ.

Lemma. 4.

$$\bar{\alpha}_* \bar{\rho}^* E(\omega) \cong \bar{\alpha}_* \bar{\rho}^* E(\omega').$$

Proof. τ は Stein manifold $Gr \setminus J$ 上定義された bundle 中の topological に (あるいは real analytic に) 同型であることを示せばよい.

$Gr \setminus J \ni x$ に対し $\tilde{E}_\omega = \bar{\alpha}_* \bar{\rho}^* E(\omega)$ の x に於ける vector bundle としての fibre を $\tilde{E}_{\omega, x}$ で表わせば, $\tilde{E}_{\omega, x} = H^0(\bar{\rho}^* E(\omega)|_{\bar{\alpha}^{-1}(x)}) = H^0(E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)})$. 同様に $\tilde{E}_{\omega', x} = H^0(E(\omega')|_{\tau^{-1}(x)})$. ここで, $\pi^* \omega$ によつて $\psi_{x, \omega}: E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ なる complex analytic isomorphism が定まり, 同様に $\pi^* \omega'$ によつて $\psi_{x, \omega'}: E(\omega')|_{\tau^{-1}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ なる complex analytic isomorphism が定まることが従つて complex vector bundle としての同型

$\psi_{x, \omega'}^{-1} \circ \psi_{x, \omega}: E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)} \xrightarrow{\sim} E(\omega')|_{\tau^{-1}(x)}$ を定義することから出来るが, これは section の同

$$\Psi_x: H^0(E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)}) \xrightarrow{\sim} H^0(E(\omega')|_{\tau^{-1}(x)})$$

を induce する. Ψ_x は x には real analytic による
 ので, $\tilde{E}_\omega$ と $\tilde{E}_{\omega'}$ とは C^ω -bundle として同型. $\square$

Gr-J に解析接続された $\tilde{\omega}' \in \tilde{E}_\omega \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_{\omega'}$ であり
 てもよい, $\tilde{E}_\omega = \tilde{E}$ に 2 つの connection $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ が与
 えられた, ということが出て来る. (このとき
 $\tilde{\omega}'$ は gauge 変換をうける.)

5.

$z \in \mathbb{P}^3$ に対し, $\beta \in \bar{\alpha}^{-1}(\bar{\tau}(z)) \setminus \bar{\rho}^{-1}(z)$ に制限し
 た写像は image $\wedge$ の同型を与えている. そこで
 $\bar{\rho}(\bar{\alpha}^{-1}(\bar{\tau}(z)) \setminus \bar{\rho}^{-1}(z)) = U_z$ と書く. U_z は
 $\mathbb{P}^3$ の open set である.

Lemma. 5.

$\mathbb{P}^3$ の任意の点 z_0 に対し, $z_1, \dots, z_\sigma \in \mathbb{P}^3$ を次
 の 1), 2) を満たすようにとれる;

$$1) \quad \bigcup_{\mu=1}^{\sigma} U_{z_\mu} = \mathbb{P}^3$$

2) z_0 と z_μ を通る line は jumping line でない.

Proof. $\forall \beta \in \mathbb{P}^3$ に対して $\bar{\tau}(\beta)$ は必ず S と 1 交わり交わるが, $\beta(\alpha^{-1}(S)) = \mathbb{P}^3$ なのて, 1) を満たす有限数列 $\beta_1, \dots, \beta_n$ が存在することは明らか. 2) の条件は, $\bar{\tau}(\beta_0) \cap \bar{\tau}(\beta_n) \neq \emptyset$ という条件だが, $\tau(\beta_0) \cap \tau(\beta_n) \neq \emptyset$ であり $\bar{\tau}(\beta)$ は $\tau(\beta)$ の open dense subset ゆえ, 2) は $\beta_1, \dots, \beta_n \in \text{general}$ にすれば満たされる. $\square$

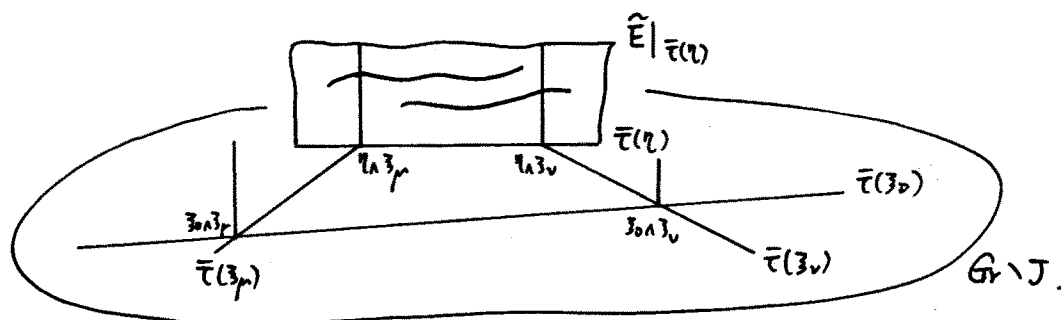
さて, lemma 2, lemma 4 により $\bar{\beta}^* E(\omega) \cong \bar{\beta}^* E(\omega')$ だから, lemma 3 を考慮して $E_{\text{flat}}(\omega) \cong E_{\text{flat}}(\omega')$ を言えはよい.

Definition. 3.

$\mathbb{P}^3$ の相異なる 2 点 β, η に対し, β と η を通る line に対応する $\text{Gr}(1,3)$ の点 $\beta \wedge \eta = \eta \wedge \beta$ で表わす. $\tau^{-1}(\beta \wedge \eta) \ni \beta, \eta$.

$U_{\beta \wedge \eta} \ni \eta$ をとる. $\tilde{E}_{\eta \wedge \beta}$ を“初期値の空間”とみて同型 $\tilde{E}_{\eta \wedge \beta} \cong E_{\text{flat}}(\omega), \eta$ を得る. 同様に $\tilde{E}_{\eta \wedge \beta} \cong E_{\text{flat}}(\omega'), \eta$ が得られるから, これを用いて $\varphi_\mu(\eta) : E_{\text{flat}}(\omega), \eta \xrightarrow{\sim} E_{\text{flat}}(\omega'), \eta$ を定義.

出来る. $\varphi_\mu(\eta)$ は $\eta \in U_{\mathbb{Z}_\mu}$ に holomorphic に depend する.



次に $U_{\mathbb{Z}_\mu} \cap U_{\mathbb{Z}_\nu} \ni \eta$ とする. $E_{\text{flat}}(\omega), \eta \in \hat{E}_{\eta \wedge \mathbb{Z}_\mu}$ と見た場合と $\hat{E}_{\eta \wedge \mathbb{Z}_\nu}$ と見た場合のやり合わせを,

$$\begin{array}{c}
 \hat{E}_{\eta \wedge \mathbb{Z}_\mu} \\
 \downarrow \text{--- flat connection } \tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(z_\mu)} \text{ による平行移動} \\
 \hat{E}_{\mathbb{Z}_0 \wedge \mathbb{Z}_\mu} \\
 \downarrow \text{--- flat connection } \tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(z_0)} \text{ による平行移動} \\
 \hat{E}_{\mathbb{Z}_0 \wedge \mathbb{Z}_\nu} \\
 \downarrow \text{--- flat connection } \tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(z_\nu)} \text{ による平行移動} \\
 \hat{E}_{\eta \wedge \mathbb{Z}_\nu}
 \end{array}$$

で定義する. 合成した map を $g_{\nu\mu}^\omega(\eta): \hat{E}_{\eta \wedge \mathbb{Z}_\mu} \xrightarrow{\sim} \hat{E}_{\eta \wedge \mathbb{Z}_\nu}$ で表わす. $\{g_{\nu\mu}^\omega\}$ は vector bundle $E_{\text{flat}}(\omega)$ の, covering $\bigcup_{\mu=1}^r U_{\mathbb{Z}_\mu}$ に属する変換函数系になっている. 同様にして $\{g_{\nu\mu}^{\omega'}\}$ も定義できる.

±2, $\tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(z_0)} \pm \tilde{\omega}'|_{\bar{\tau}(z_0)}$ もともに flat であ

るから, section の base を適当に選んで

$$\tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(3_0)} = \tilde{\omega}'|_{\bar{\tau}(3_0)} \quad \text{のよう} にしておく.$$

$\tilde{E}_{\eta \wedge 3_\mu}$ の自己同型 τ ,

$$\tilde{E}_{\eta \wedge 3_\mu}$$

$\downarrow$ --- flat connection $\tilde{\omega}'|_{\bar{\tau}(3_\mu)}$ による平行移動

$$\tilde{E}_{3_0 \wedge 3_\mu}$$

$\downarrow$ flat connection $\tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(3_\mu)}$ による平行移動

$$\tilde{E}_{3_\mu \wedge \eta}$$

によ, τ を定める. 合成した map $\tau \in h_\mu^{\omega\omega'}(\eta)$ で表わす. このとき, 定義から

$$(h_\mu^{\omega\omega'})^{-1} \circ g_{\mu\nu}^\omega \circ h_\nu^{\omega\omega'} = g_{\mu\nu}^{\omega'}$$

が成り立つ. 従, $\tau \{g_{\mu\nu}^\omega\} \cong \{g_{\mu\nu}^{\omega'}\}$.

$\{g_{\mu\nu}^\omega\} \cong E(\omega)$, $\{g_{\mu\nu}^{\omega'}\} \cong E(\omega')$ を証明するには少し議論を要するかここでは略す. これで,

$$E(\omega) \cong E(\omega') \quad \text{が証明された.} \quad \square$$

§ 3. $SU(3)$ -instantons.

Definition. 4.

$SU(n) \hookrightarrow SU(n+1)$ によ, τ $SU(n)$ -instanton は自然

に $SU(n+1)$ -instanton となるが, $SU(l)$ -instanton (for $l < n$) とはならず $SU(n)$ -instanton と irreducible $SU(n)$ -instanton と呼ぶ.

$SU(n)$ -instanton は $\mathbb{P}^3$ 上の rank n の algebraic vector bundle に対応するが, irreducible instanton は simple algebraic vector bundle に対応する.

Reducible $SU(3)$ -instanton に対応する vector bundle $E(\omega)$ は, $SU(2)$ -instanton に対応する rank 2 の vector bundle F と line bundle との extension として表わされる;

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow E(\omega) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

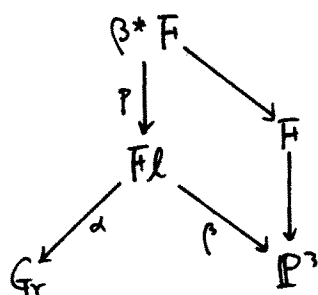
従って $E(\omega)$ の同型類は $J(\omega)$ で決まってしまう.

しかし,

Theorem. 3.

Instanton に対応する simple algebraic vector bundle of rank 3 の同型類は, その jumping lines の 為す set (この場合も divisor になる) によって定まる.

F は $\mathbb{P}^n$ 上の vector bundle で, $\mathbb{P}^3$ の general line l への制限 $F|_l$ が自明になっている様なもの, としよう. Projection $\beta^*F \rightarrow F|_l$ を図のように p で



表わす. β^*F の各 fibre を projectivify した bundle を $\mathbb{P}(\beta^*F)$ で表わし, $F|_l$ への projection を $\bar{p}: \mathbb{P}(\beta^*F) \rightarrow F|_l$ で示す. $\text{rank } F = n$ とする. このとき

$$\alpha \circ \bar{p}: \mathbb{P}(\beta^*F) \longrightarrow Gr$$

は, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の複素解析族をよこしている.

$$x \in Gr \text{ が } F \text{ の jumping line} \iff (\alpha \circ \bar{p})^{-1}(x) \neq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$$

あり. 従って jumping line が divisor であるかどうかを調べるには, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ の変形族を作った時, special なものかどんな風に出てくるかを見ればよい. $n=3$ の場合にそれを実行することによって, theorem. 3. が得られるのである. しかし詳細は [9] に譲る. (1979年1月30日. Do A.K., m.p.)

文献

1. M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, & I.M. Singer : Deformations of Instantons. Proc. Natn. Acad. Sci. U.S.A. 74, 2662. (1977)
2. — : Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. R. Soc. Lond. A. 362, 425-461 (1978)
3. M.F. Atiyah, & R. S. Ward : Instantons and Algebraic Geometry. Commun. Math. Phys. 55, 117-124 (1977)
4. W. Barth : Some Properties of Stable Rank-2 Vector Bundles on $\mathbb{P}^n$. Math. Ann. 226, 125-150 (1977)
5. R. Hartshorne : Stable Vector Bundles and Instantons. Commun. Math. Phys. 59, 1-15 (1978)
6. — : Stable Vector Bundles of Rank 2 on $\mathbb{P}^3$. (preprint)
7. 村瀬元彦 : Classical Euclidean Yang-Mills 場に於ける self-duality の幾何学的意味について. 数理研講究録 324, 64-96 (1978)
8. — : (ワットンと holonomic quantum field theory 研究会報告集掲載予定)
9. — : (線型微分方程式の超局所解析 研究会報告集掲載予定)