

# 非摂動くりこみ群方程式における散逸効果<sup>1</sup>

Non-Perturbative Renormalization Group Equations with Dissipation

金沢大学大学院 自然科学研究科 数理情報科学専攻 堀越 篤史<sup>2</sup>

## 1 はじめに

### 1.1 量子散逸系

膨大なミクロな自由度と結合した少数のマクロな自由度の振舞い、とりわけその量子力学的な振舞いは非常に興味深い問題である。と言ってみても漠然とし過ぎているので、ここではそのような系に特徴的な「散逸」という性質に焦点を絞った話をしてみたい。

### 1.2 環境の現象論的モデル

散逸効果を量子力学的に記述するのはなかなか大変で、例えば経路積分量子化をしようと思っても、そもそも作用をどう書き下したらよいか分からない。そこで Caldeira-Leggett は、環境として無限個の調和振動子を用意して、その自由度を先に積分してしまうことにより、散逸の効果を（現象論的に）量子力学に持ち込む処方を与えた [1]。

$$S_E = \int d\tau \left\{ \frac{1}{2} M \dot{q}^2 + V_0(q) + \sum_{\alpha} \left[ \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 x_{\alpha}^2 \right] + q \sum_{\alpha} C_{\alpha} x_{\alpha} \right\}$$

という系でパラメタ  $m_{\alpha}$ ,  $\omega_{\alpha}$ ,  $C_{\alpha}$  を適当に選べば、環境  $\{x_{\alpha}\}$  の自由度を消去した後の  $q$  の運動方程式に散逸項が付け加わることが分かるので、この  $S_E$  を用いて経路積分を行えば散逸効果を量子力学的に記述したことになるだろう、というわけである。彼らは

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}q \prod_{\alpha} \int \mathcal{D}x_{\alpha} e^{-S_E} \\ &= \int \mathcal{D}q e^{-\int d\tau [\frac{1}{2} M \dot{q}^2 + V(q)]} \prod_{\alpha} \left\langle e^{-\int d\tau q C_{\alpha} x_{\alpha}} \right\rangle_{x_{\alpha}} \\ &= \int \mathcal{D}q e^{-\int d\tau [\frac{1}{2} M \dot{q}^2 + V(q)] - \Delta S[q]} \end{aligned}$$

のように環境の自由度を積分して得られる散逸項  $\Delta S$  の効果を、量子トンネリングのある系において具体的に調べ、オーム的散逸 ( $\sim \dot{q}$ ) の場合には散逸効果がトンネリングを抑制するという

<sup>1</sup> この内容は金沢大学の 青木健一氏との共同研究に基づいています。

<sup>2</sup> E-mail: horikosi@hep.s.kanazawa-u.ac.jp

結論を得た。こうした議論は、その後くりこみ群や正準形式等を用いた解析 [2] でより精密化され、また実験とかなりよく合うことも確認されている [3]。

今回我々は、非摂動くりこみ群の方法で散逸項  $\Delta S$  の効果を調べてみた。これまでに様々な解析がなされているのになぜ今更、という感があるが、実は従来の解析はインスタントン等の半古典近似や摂動論に基づいたものが多く、その適用範囲に大きな制限があったのである。一方非摂動くりこみ群の方法では、それらによらない解析が可能であり [4]、また散逸項が理論の量子補正に与える影響を直観的に理解することが可能である。以下に、非摂動くりこみ群の方法を簡単に紹介し、それを Caldeira-Leggett モデルの解析に適用した結果を報告する。

## 2 非摂動くりこみ群

### 2.1 スケール分解

Wilson 有効作用  $S_\Lambda[\phi]$  で記述される  $D$  次元スカラー場の理論を考える。これは紫外カットオフ  $\Lambda$  を持つ有効場理論である。

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi]}$$

ここで積分変数  $\phi(p)$  を次のようにスケール分解して、

$$\phi(p) = \begin{cases} \phi_{<}(p) & 0 \leq |p| < \Lambda - \Delta\Lambda & : \text{lower modes} \\ \phi_s(p) & \Lambda - \Delta\Lambda \leq |p| \leq \Lambda & : \text{shell modes} \end{cases}$$

分配関数  $Z$  を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi_{<} \mathcal{D}\phi_s e^{-S_\Lambda[\phi_{<} + \phi_s]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S_\Lambda[\phi_{<}]} \int \mathcal{D}\phi_s e^{-S_\Lambda[\phi_s]} e^{-S_\Lambda^{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_s]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S_\Lambda[\phi_{<}]} \left\langle e^{-S_\Lambda^{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_s]} \right\rangle_{\phi_s} \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S_\Lambda[\phi_{<}]} e^{-\Delta S_\Lambda[\phi_{<}]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S_{\Lambda-\Delta\Lambda}[\phi_{<}]} \end{aligned}$$

上式で shell mode  $\phi_s$  の経路積分  $\langle \cdots \rangle_{\phi_s}$  を実行するところがくりこみ変換に他ならないわけだが、そのやり方はいろいろ考えられ、代表的なものとして、弱結合極限を考える「摂動展開」がある。しかしそれは当然 弱結合領域でしか妥当でないという制限がついてしまう。それに対し、 $\Delta\Lambda \rightarrow 0$  という極限を考えることで経路積分を評価するという方法もある。このような方法は一般に「非摂動くりこみ群」と呼ばれる。

## 2.2 非摂動くりこみ群方程式の導出

非摂動くりこみ群では、くりこみ変換を微分方程式で表現する。

$$\frac{\partial S_\Lambda}{\partial \Lambda} = \lim_{\Delta\Lambda \rightarrow 0} \frac{S_\Lambda - S_{\Lambda-\Delta\Lambda}}{\Delta\Lambda} = \lim_{\Delta\Lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Lambda} \log \left\langle e^{-S_{\Lambda}^{\text{int}}[\phi_<, \phi_s]} \right\rangle_{\phi_s}$$

この微分を評価するには経路積分の評価は  $O(\Delta\Lambda)$  までで十分であるから、 $S_\Lambda[\phi]$  を  $\phi_s$  のべきで展開した形

$$\begin{aligned} S_\Lambda[\phi] &= S_\Lambda[\phi_<] + \int_{\text{shell}} \frac{\delta S_\Lambda}{\delta \phi(p)} \Big|_{\phi_s=0} \phi_s(p) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \int_{\text{shell}} \phi_s(p) \cdot \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta \phi(p) \delta \phi(q)} \Big|_{\phi_s=0} \phi_s(q) + O(\Delta\Lambda^2) \end{aligned}$$

を見れば **shell mode** 経路積分  $\langle \dots \rangle_{\phi_s}$  はガウス積分に還元され、厳密に実行できることが分かる。(ここで運動量積分の積分測度を省略した。) これを実行することで、非摂動くりこみ群方程式

$$\Lambda \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \Lambda} = \frac{\Lambda}{2} \int_{\text{shell}} \left\{ -\log \left( \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \right) + \frac{\delta S_\Lambda}{\delta \phi_p} \left( \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \right)^{-1} \frac{\delta S_\Lambda}{\delta \phi_{-p}} \right\}$$

が得られる。これは **Wegner-Houghton** 方程式と呼ばれ、**Wilson** 有効作用  $S_\Lambda$  のカットオフ  $\Lambda$  依存性を厳密に表現したものになっている。

## 2.3 近似法

非摂動くりこみ群方程式は導出自体は厳密だが、当然そのままでは解けないため何らかの近似を行わなければならない。しかしそれは摂動展開のような何らかの小さなパラメータに依存するタイプのものではない、非摂動くりこみ群の方法に特有の近似である。

### (1) 局所ポテンシャル近似

微分相互作用への量子補正を無視するのが、局所ポテンシャル近似 (LPA) である。それは  $\phi_<(p) = \varphi (2\pi)^D \delta^D(p)$  (ゼロモード) とおくことで実現できて、方程式は

$$\Lambda \frac{\partial V_\Lambda}{\partial \Lambda} = -\frac{A_D}{2} \Lambda^D \log \left( 1 + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 V_\Lambda}{\partial \varphi^2} \right), \quad A_D = \frac{\int d\Omega_D}{(2\pi)^D}$$

という、ポテンシャル  $V_\Lambda(\varphi)$  の従う偏微分方程式 (LPA W-H 方程式) となる。

### (2) 局所演算子展開

上の LPA W-H 方程式において、さらに  $V_\Lambda(\varphi)$  を  $\varphi$  のべきで展開する。

$$V_\Lambda(\varphi) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n(\Lambda)}{n!} \varphi^n$$

$N$  はトランケーションの次数である。これにより LPA W-H 方程式は 結合定数  $\{a_n\}$  の従う  $N$  本の常微分方程式に還元され、

$$\begin{aligned}\Lambda \frac{da_0}{d\Lambda} &= -\frac{A_D}{2} \Lambda^D \log \left( \frac{\Lambda^2 + a_2}{\Lambda^2} \right) \\ \Lambda \frac{da_1}{d\Lambda} &= -\frac{A_D}{2} \Lambda^D \left[ \frac{a_3}{\Lambda^2 + a_2} \right] \\ \Lambda \frac{da_2}{d\Lambda} &= -\frac{A_D}{2} \Lambda^D \left[ \frac{a_4}{\Lambda^2 + a_2} - \frac{a_3^2}{(\Lambda^2 + a_2)^2} \right] \\ \Lambda \frac{da_3}{d\Lambda} &= -\frac{A_D}{2} \Lambda^D \left[ \frac{a_5}{\Lambda^2 + a_2} - \frac{3a_4a_3}{(\Lambda^2 + a_2)^2} + \frac{2a_3^3}{(\Lambda^2 + a_2)^3} \right] \\ \Lambda \frac{da_4}{d\Lambda} &= -\frac{A_D}{2} \Lambda^D \left[ \frac{a_6}{\Lambda^2 + a_2} - \frac{4a_5a_3}{(\Lambda^2 + a_2)^2} - \frac{3a_4^2}{(\Lambda^2 + a_2)^2} + \frac{12a_4a_3^2}{(\Lambda^2 + a_2)^3} - \frac{6a_3^4}{(\Lambda^2 + a_2)^4} \right] \\ &\vdots\end{aligned}$$

となる。こう展開することにより、個々の演算子  $\{\varphi^n\}$  の結合定数  $\{a_n\}$  に対する量子補正がどのような相互作用を通して入るかが直観的に分かりやすくなる。そして  $N \rightarrow \infty$  として結果が収束していれば、LPA W-H 方程式の解が得られていると判断する。

### 3 非摂動くりこみ群による量子力学系の解析

今回解析したい Caldeira-Leggett モデルは量子力学系である。量子力学系は一次元実スカラー場の理論と見なすことができるから ( $\phi(x) \rightarrow x(t)$ )、非摂動くりこみ群の方法を量子力学系に適用するには、先ほど導出した実スカラー理論についての Wegner-Houghton 方程式で次元を  $D = 1$  とすればよい [5]。

#### 3.1 評価する物理量

非摂動くりこみ群方程式を解いた結果得られるのは有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} V_\Lambda(x)$  である。これから系の物理量の情報を引き出すことができる。例えば系の基底状態のエネルギー  $E_0$  は、 $V_{\text{eff}}$  の最小値が系の最低エネルギーを与えることから、

$$E_0 = \langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle = V_{\text{eff}}|_{x=\langle x \rangle}$$

となる。またエネルギーギャップ  $\Delta E = E_1 - E_0$  は、二点関数を次のように二通りに表現して

$$\begin{aligned}\langle \Omega | T \hat{x}(t) \hat{x}(0) | \Omega \rangle &\stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-(E_1 - E_0)t} \\ \langle \Omega | T \hat{x}(t) \hat{x}(0) | \Omega \rangle &\stackrel{\text{LPA}}{=} \int \frac{dE}{2\pi} e^{iEt} \frac{1}{E^2 + m_{\text{eff}}^2} \propto e^{-m_{\text{eff}}t}\end{aligned}$$

$t \rightarrow \infty$  での減衰因子を比較することで

$$\Delta E \equiv E_1 - E_0 = m_{\text{eff}} = \sqrt{\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial x^2} \right|_{x=\langle x \rangle}}$$

となる。ここで有効質量  $m_{\text{eff}}$  は  $V_{\text{eff}}$  の最小点における曲率の平方根である。

### 3.2 具体例

非摂動くりこみ群方程式を用いた量子力学系の解析が実際どんな感じになるのかを、いくつかの具体例で見てみよう。初期カットオフを  $\Lambda_0$  として、カットオフ  $\Lambda$  まで解くとする。最終的には  $\Lambda_0 \rightarrow \infty, \Lambda \rightarrow 0$  極限を考えて  $V_{\text{eff}}$  を得る。

#### 例1. 調和振動子

初期ポテンシャルが  $V_0(x) = \frac{1}{2}m^2x^2$  で与えられる調和振動子を考える。この場合 LPA W-H 方程式は解析的に解くことができ、

$$a_0(\Lambda) = a_0(\Lambda_0) + \frac{\sqrt{a_2(\Lambda_0)}}{2\pi} \left[ \hat{p} \log \frac{1 + \hat{p}^2}{\hat{p}^2} + 2 \tan^{-1} \hat{p} \right]_{\hat{p} = \frac{\Lambda}{\sqrt{a_2(\Lambda_0)}}}^{\hat{p} = \frac{\Lambda_0}{\sqrt{a_2(\Lambda_0)}}},$$

$$a_2(\Lambda) = a_2(\Lambda_0).$$

となる。初期条件は  $(a_0(\Lambda_0), a_2(\Lambda_0)) = (0, m^2)$  であるから、 $\Lambda_0 \rightarrow \infty, \Lambda \rightarrow 0$  極限を取れば、 $(a_0(\Lambda), a_2(\Lambda)) = (\frac{m}{2}, m^2)$  という結果を得る。すなわち、 $a_2(\Lambda)$  は量子補正を受けず変化しないが、 $a_0(\Lambda)$  は量子補正を受けてランニングし、ゼロ点振動  $\frac{m}{2}$  をかせる。

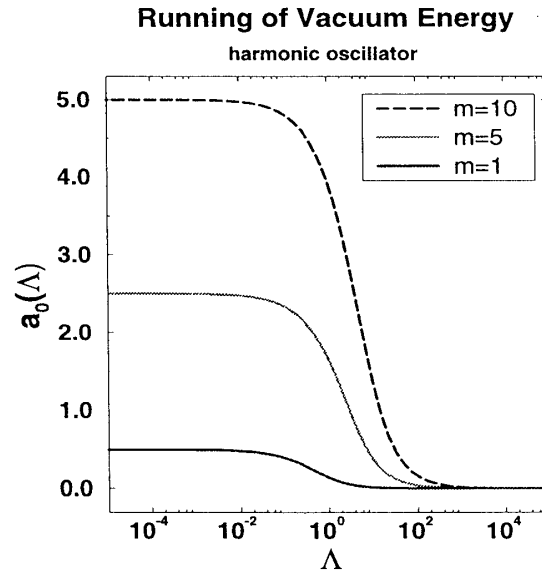


図1:  $a_0$  のランニング：調和振動子

図1を見れば分かるように、今の場合の量子補正が「効く」エネルギー領域は、紫外側も赤外側も有限になっていて、理論の質量スケール ( $m$ ) に依存している。紫外側が有限になっているのは、量子力学系の特性であり、 $\Lambda_0 \rightarrow \infty$  極限を取っても発散しない有限な理論であることを意味している。(場の理論なら  $\Lambda = \Lambda_0$  からいきなり量子補正が効くので、 $\Lambda_0 \rightarrow \infty$  極限を取るといわゆる紫外発散を引き起こす。) 赤外側が有限になっているのは、重い粒子は赤外ではプロパゲートしないという性質を反映したものである。これは **decoupling** と呼ばれる大変重要な性質であ

る。非摂動くりこみ群は **decoupling** という性質を自然に取り込んだ形式になっている。

さて、今の調和振動子の場合のように解析的にくりこみ群方程式が解ける例は少なく、大抵の場合は数値計算を援用しなければならない。そんな時、この「紫外側も赤外側も有限」という性質がかなり助けになる。なぜなら数値計算では有限のエネルギー領域しか積分できないわけだが、それが量子補正が「効く」領域をきちんと含んでさえいれば、ほぼ問題なく物理量を評価できるからである。

## 例 2. 二重井戸型ポテンシャル

次に初期ポテンシャルが  $V_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \lambda_0 x^4$  で与えられる系を考える。この系には  $Z_2$  対称性 ( $x \leftrightarrow -x$ ) があるのだが、量子力学系ではその対称性が自発的に破れることはない。なぜなら、量子トンネリングにより縮退した二つの井戸の底の状態間で遷移が起こり、基底状態が一つに定まるからである。その結果、エネルギーギャップ  $\Delta E$  が生じる。これは非摂動くりこみ群の言葉では、初期ポテンシャルが二重井戸型でも、有効ポテンシャルは  $m_{\text{eff}}^2 > 0$  を満たす一重井戸型になるということである。(図 2)

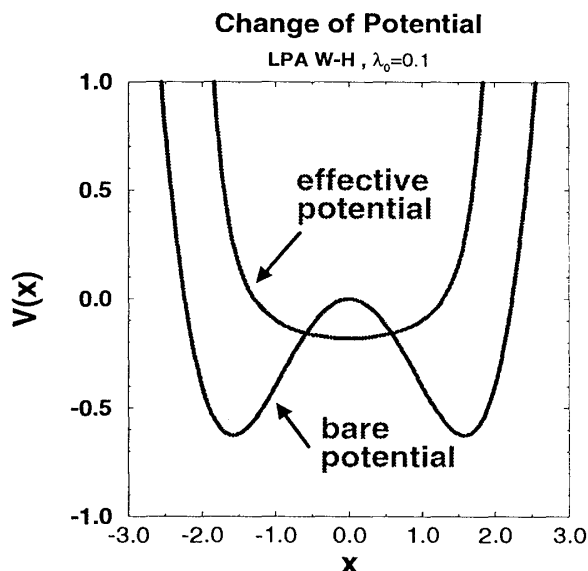


図 2: ポテンシャルの変化

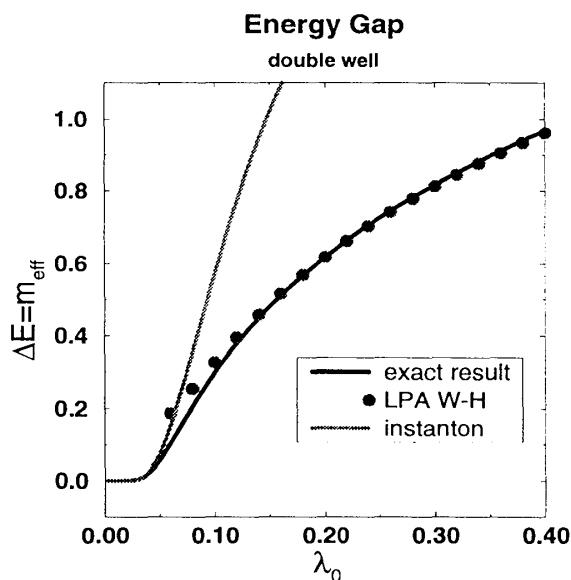


図 3: エネルギーギャップの評価

またこの系は、ナイーブな摂動論が破綻する系としても有名であり、摂動論の代わりに、希ガス近似インスタントン計算がよく用いられる。これはインスタントンという古典解に基づく半古典的な計算で、エネルギーギャップは  $\Delta E = 2\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi\lambda_0}} e^{-\frac{1}{3\sqrt{2}\lambda_0}}$  のように計算される。図 3 に、非摂動くりこみ群の結果と、インスタントン計算の結果を図示した。「exact result」とあるのは、Schrödinger 方程式を数値的に解いて得た結果である。これを見ると、非摂動くりこみ群の結果は、強結合領域 ( $\lambda_0 \rightarrow$  大の領域) では非常に良いが、弱結合領域 ( $\lambda_0 \rightarrow 0$  の領域) に近づくにつれて悪くなっていくことが分かる。そしてインスタントン計算の結果は、ちょうどそれと逆の振舞いを見せている。すなわち両者は、ある種の相補的な関係にあると言える。

## 例 2 の補足: フロー図で見た場合

例 2 では、弱結合領域 ( $\lambda_0 \rightarrow 0$  の領域) で非摂動くりこみ群の結果は正しい値からじわじわずれていった。この時一体何が起きているのだろうか? それをフロー図を描いてみることで調べてみよう。フロー図とは、無次元化された結合定数の動き (これをフローと呼ぶ) を示したもの

であり、理論の相構造を調べるのに欠かせないものである。

フロー図を描いてみてまず分かることは、非摂動くりこみ群方程式において局所演算子展開を用いると、理論の相構造が病的な振舞いを見せるということである。先に述べたように、この系では自発的対称性の破れは起こらない。しかし局所演算子展開を用いると、flow 図に偽の固定点が存在し、本来あるはずのない「対称性の破れた相」が出現してしまう（図4, 図5, 図6）。そして、弱結合領域（ $\lambda_0 \rightarrow 0$  の領域）から出発するフローほど「破れた相」に捕まりやすく、「正しい値」を出せなくなってしまう。（それどころか、 $\hat{a}_2 = -1$  をよぎるとフローは破綻してしまう。）

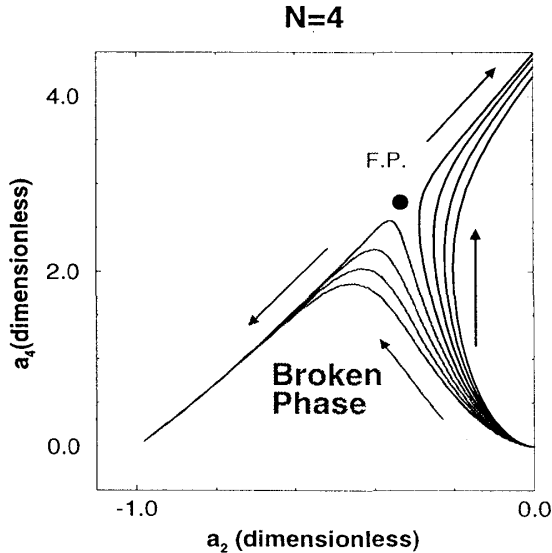


図 4:  $x^4$  までの展開

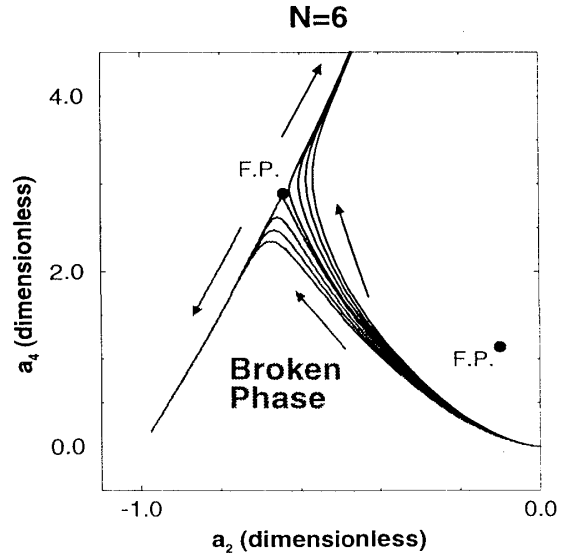


図 5:  $x^6$  までの展開

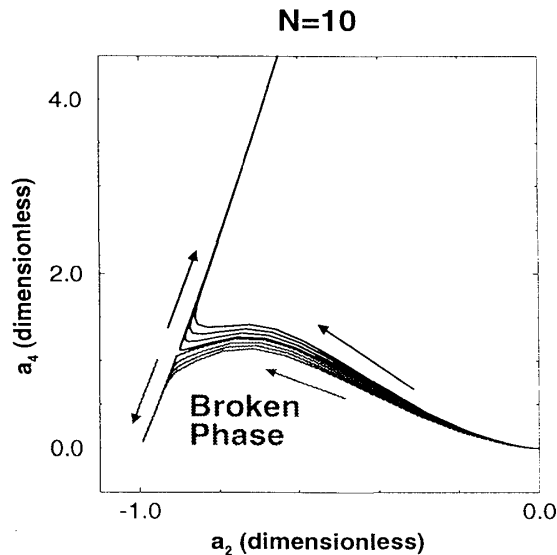


図 6:  $x^{10}$  までの展開

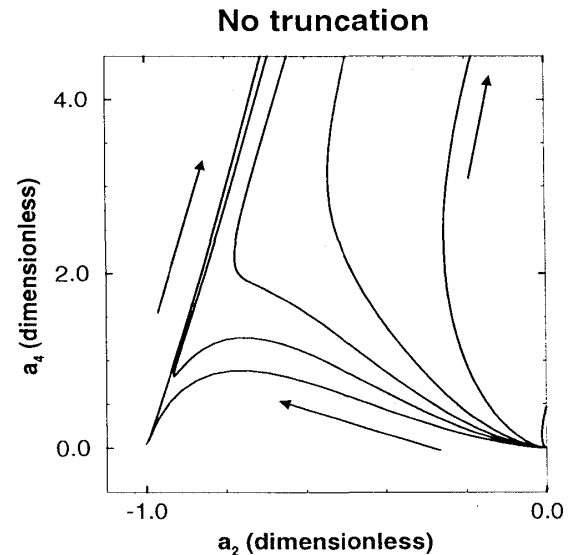


図 7: 展開なし

$N \rightarrow$  大につれて「破れた相」の領域はどんどん縮小し、展開しない計算なら「破れた相」は消えて無くなるように見える（図7）。しかしそれでも弱結合領域（ $\lambda_0 \rightarrow 0$  の領域）から出発するフローほど  $\hat{a}_2 = -1$  付近での変化が極めて急で、例えば数値計算でこのフローを追う際には極めて高い精度での計算が要求されるため、信頼できる結果を得るのが困難になる。図3の非摂動くりこみ群の結果は、局所演算子展開をしないで LPA W-H 方程式を偏微分方程式のまま数値的に解いたものであるが、 $\lambda_0 \rightarrow 0$  となるほど計算時間が増大し、結果の信頼性も低くなってしまってい

る。もちろん、今解いている方程式は局所ポテンシャル近似されたものであるから、その近似をうまく改善すれば上に見たような困難が和らげられると期待される。局所ポテンシャル近似は「微分展開」の最低次であり、さらに近似を上げるためには微分の二次の項まで含めた展開がよく行なわれる。しかし、そのようなナイーブな近似の向上では  $\lambda_0 \rightarrow 0$  での振舞いは改善されないことが分かっている [6]。

## 4 量子散逸系への応用

さて、いよいよ Caldeira-Leggett モデルにおける変数  $q(\tau)$  の経路積分

$$Z = \int \mathcal{D}q \, e^{-\int d\tau [\frac{1}{2} M \dot{q}^2 + V(q)] - \Delta S[q]}$$

を非摂動くりこみ群の方法で計算してみよう。ただし今はオーム的散逸 ( $\sim \dot{q}$ ) の場合のみを取り扱う。より一般的な散逸効果の非摂動くりこみ群の方法による取り扱いについては [7] で詳しく述べる予定である。

### 4.1 散逸効果を含めた非摂動くりこみ群方程式の導出

調和振動子環境を積分することにより生成された作用  $\Delta S$  は、局所的な項と非局所的な項に分けることができ ( $\Delta S = \Delta S_L + \Delta S_{NL}$ )、それぞれ

$$\begin{aligned} \Delta S_L[q] &= -2\tilde{G}(E=0) \int d\tau \, q^2(\tau) \\ \Delta S_{NL}[q] &= \int d\tau_1 \int d\tau_2 [q(\tau_1) - q(\tau_2)]^2 G(\tau_1 - \tau_2) \end{aligned}$$

という形をしている。ここで

$$G(\tau) = \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{4m_{\alpha}} \int \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{E^2 + \omega_{\alpha}^2} e^{iE\tau}$$

であり、 $\tilde{G}(E)$  はそれを fourier 変換したものである。 $\Delta S$  のうち  $\Delta S_L$  は質量への補正を表し、散逸効果には寄与しない「面白くない」項である。そこで  $\Delta S_L$  は適当にカウンター項を当てて処理して、表に出てこないようにする。一方  $\Delta S_{NL}$  は、(オーム的散逸の場合に) 正味の散逸効果を表す項であり、以下ではこの項のみを相手にする。

さて、 $G(\tau)$  をもう少し変形して、

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{4m_{\alpha}} \frac{1}{2|\omega_{\alpha}|} e^{-|\omega_{\alpha}||\tau|} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{J(\omega)}{2} e^{-\omega|\tau|} \end{aligned}$$

と書こう。ここで  $J(\omega)$  は調和振動子環境の振動数分布を表す「スペクトル密度関数」であり、

$$J(\omega) \equiv \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{4m_{\alpha}|\omega_{\alpha}|} (2\pi) \delta(\omega - |\omega_{\alpha}|)$$

と定義される。調和振動子環境の引き起こす散逸効果の性質は  $J(\omega)$  の関数形で規定される。例えば  $J(\omega) = \alpha\omega$  ならオーム的散逸、という具合である。(ただし調和振動子環境が無数存在しなければこのような形にはならない。)

$\Delta S_{\text{NL}}$  は運動量表示では

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{NL}}[q] &= \int \frac{dE}{2\pi} \left[ \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \left( \frac{1}{\omega_{\alpha}^2} - \frac{1}{E^2 + \omega_{\alpha}^2} \right) \right] \tilde{q}(E) \tilde{q}(-E) \\ &= \int \frac{dE}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) 2 \left( \frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{E^2 + \omega^2} \right) \right] \tilde{q}(E) \tilde{q}(-E)\end{aligned}$$

と書ける。オーム的散逸の場合は  $J(\omega) = \alpha\omega$  とおくことにより

$$\Delta S_{\text{NL}}[q] = \int \frac{dE}{2\pi} \frac{1}{2} \alpha |E| \tilde{q}(E) \tilde{q}(-E)$$

となる。この項の存在下での非摂動くりこみ群を考えようとすると、 $\Delta S_{\text{NL}}$  項 (結合定数  $\alpha$ ) が受ける量子補正をいかに評価するかが問題となる。しかし微分相互作用への量子補正を一切無視する「局所ポテンシャル近似」を用いる限り話は簡単で、 $\Delta S_{\text{NL}}$  項付きの LPA W-H 方程式は、

$$V_{\Lambda - \Delta \Lambda}(q) = V_{\Lambda}(q) + \frac{1}{2} \int_{\text{shell}} \log \left( E^2 + \alpha |E| + \frac{\partial^2 V_{\Lambda}}{\partial q^2} \right)$$

から

$$\Lambda \frac{\partial V_{\Lambda}}{\partial \Lambda} = -\frac{1}{2\pi} \Lambda \log \left( 1 + \frac{\alpha}{\Lambda} + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 V_{\Lambda}}{\partial q^2} \right)$$

と求められる。これは通常の LPA W-H 方程式に  $\alpha/\Lambda$  項が付いただけの形をしている。この項は  $\Lambda \rightarrow 0$  領域で粒子の伝播 (量子補正) を抑制する働きをするから、 $\alpha/\Lambda$  項は有効赤外カットオフと見なすことができる。オーム的散逸に限らず散逸効果は一般に有効赤外カットオフや有効紫外カットオフとして機能する [7]。3 章の例 1 で述べたように、量子力学系では量子補正が「効く」エネルギー領域は有限で、理論の質量スケールに依存している。散逸効果がちょうどそのエネルギー領域においてカットオフとして機能するなら、その散逸効果は「強い」ということになる。このように非摂動くりこみ群の方法を用いることにより、散逸効果をカットオフとして直観的に理解することができ、散逸効果の強弱を理論の質量スケールと絡めて議論することができる。こうした描像は半古典近似や摂動論をやっている限りは得られないものである。

## 4.2 量子-古典転移

$\alpha/\Lambda$  項は赤外領域で量子補正を抑制する。その意味は  $O(\alpha)$  以下のエネルギー領域において散逸効果がカットオフとして機能し、量子補正を抑制するということである。量子力学系では量子補正が「効く」エネルギー領域は有限なのだから、その「効く」領域は  $\alpha \rightarrow \text{大}$  としていけばそのうちにカットオフされる領域にすっぽり入ってしまうだろう。すなわち散逸をどんどん強くしていけばやがて系の (特徴的な) 量子現象は完全に消え、古典的な系への転移が起こることが予想される。これは一般に「量子-古典転移」と呼ばれる非常に興味深い現象である。

### 4.3 巨視的量子コヒーレンス

Caldeira-Leggett モデルは変数  $q$  と変数  $\{x_\alpha\}$  から構成されている。変数  $q$  を「マクロな自由度」、変数  $\{x_\alpha\}$  を「ミクロな自由度」と（勝手に）思えば、このモデルを用いることによりマクロな自由度にどれだけ量子性が残っているかを議論できる。それを具体例 ( $V_0(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \lambda_0 q^4$ ) で見てみよう。3章の例2で見たように、この系に特徴的な量子現象はトンネリングである。特にこの系では縮退した二つの井戸の底の状態間の遷移が起こるが、その遷移が膨大なミクロな自由度  $\{x_\alpha\}$  と結合したマクロな自由度  $q$  についても依然起こることを巨視的量子コヒーレンスと呼ぶ。その遷移確率は  $\Delta E = m_{\text{eff}}$  である。オーム的散逸  $J(\omega) = \alpha\omega$  の場合は、 $\alpha$  が大きくなるにつれて巨視的量子コヒーレンスが抑制されていき、ある  $\alpha = \alpha_c$  で  $\Delta E = m_{\text{eff}} = 0$  となってトンネリングによる状態間の遷移が起こらなくなることが期待される。これが量子-古典転移であり、 $\Delta E = m_{\text{eff}}$  がそのオーダーパラメータとなっている。ここで量子-古典転移という言葉は、系の量子性が完全に消えるのではなく、系に特徴的な量子現象（今の場合はトンネリングによる状態間の遷移）が起こらなくなるという意味で用いられていることに注意しよう。

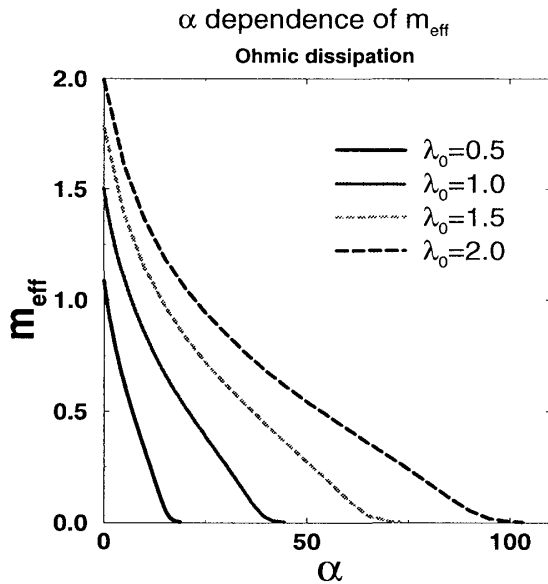


図 8: くりこみ群で求めた有効質量

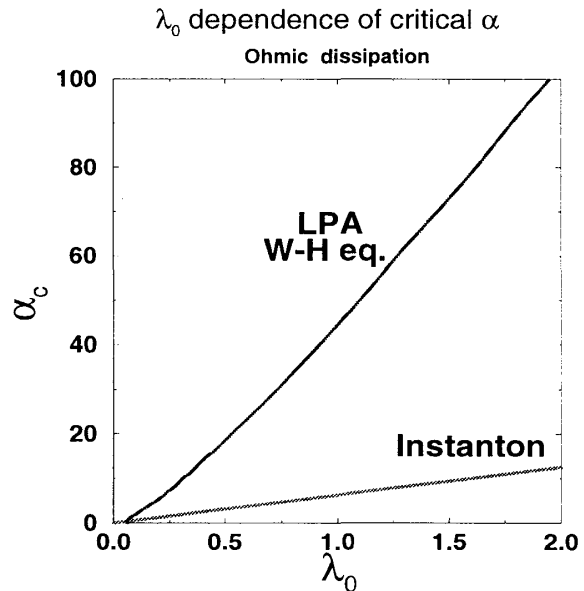


図 9: 2つの手法の比較

散逸項付きの LPA W-H 方程式を解いて求めた  $m_{\text{eff}}$  を図 8 に示す。どのような  $\lambda_0$  に対しても、 $\alpha$  を大きくしていけばやがて  $m_{\text{eff}} \simeq 0$  となることが分かる。3章の例2で強調したように、 $\alpha = 0$  の普通の量子力学系ならば  $Z_2$  対称性 ( $q \leftrightarrow -q$ ) は自発的に破れないので、 $m_{\text{eff}}^2$  がゼロを切ることはない。しかし  $\alpha \neq 0$  として散逸効果を入れると、ある  $\alpha = \alpha_c$  で  $m_{\text{eff}}^2 \simeq 0$  となってしまう。すなわち量子-古典転移とは、自発的対称性の破れに酷似した現象であると言える。3章の例2の補足では、非摂動くりこみ群方程式を解く際の近似の入れ方によって「偽の」対称性の破れた相が現れることを述べたが、今の場合は、量子力学系であるにもかかわらず対称性の破れた相が本当に存在するのである。対称性の自発的破れは無限自由度系でなければ起こらないはずなので、これは一見不思議なことである。そのタネは環境として「無限個の」調和振動子を用意した点にある。本来自由度有限の量子力学系をむりやり自由度無限大の環境と結合させたために、環境を消去した後の量子力学系に対称性の自発的破れ（に酷似した現象）が起こったのである。

図 9 は  $\alpha$  の臨界値  $\alpha_c$  を  $\lambda_0$  の関数として示したものである。非摂動くりこみ群の結果とともに、インスタントン計算の結果  $\alpha_c = 2\pi\lambda_0$  も示しておく。インスタントン計算は  $\lambda_0 \rightarrow 0$ 、 $\alpha \rightarrow 0$  の領域

でのみ妥当であるから、 $\lambda_0$ 、 $\alpha$ の大きな領域では（図3と同様に）非摂動くりこみ群の方法がより正しい値を与えていると思われる。

## 5 まとめと展望

Caldeira-Leggett モデルを非摂動くりこみ群の方法で解析することにより、無限個の調和振動子からなる環境のもたらす散逸効果が系の量子補正に与える影響を調べた。今回はオーム的散逸  $J(\omega) = \alpha\omega$  の場合の非摂動くりこみ群方程式を書き下し、二重井戸型ポテンシャル系においてそれを解くことで量子-古典転移が起こることを確認した。ただしその方程式は局所ポテンシャル近似を用いたものであり、その近似を外した場合の $\alpha$ への補正の入り方は今後まじめに考えなければならない。

また現実的なモデルとしては「無限個の調和振動子との結合」は「何らかの場との結合」として与えるのが自然である。つまり環境として高次元場を考えるわけだが、場をそのように取り扱うにはいろいろと不明な点が多い。きちんとした一般論を構成する必要がある。

また「くりこみ群」と名打った解析をするからには、環境そのものもくりこみ群的な取り扱いをしなければ収まりが悪い。これは手の付け所が分からない非常に難しい問題であるが、挑戦したいのある問題として今後追求していきたい。

## 謝辞

有意義な議論をして頂いたシンポジウム参加者の皆さんに感謝します。

## 参考文献

- [1] A.O.Caldeira and A.J.Leggett PRL **46**, 211 (1981)
- [2] K.Fujikawa, S.Iso, M.Sasaki and H.Suzuki PRL **68**, 1093 (1992)
- [3] T.Yamaguchi, R.Yagi, A.Kanda, Y.Ootuka and S.Kobayashi PRL **85**, 1974 (2000)
- [4] K.-I.Aoki, Int. J. Mod. Phys. B**14**, 1249 (2000)
- [5] K.-I.Aoki, A.Horikoshi, M.Taniguchi and H.Terao, Proceedings of Workshop on the Exact Renormalization Group (World Scientific 1999) 194 :hep-th/9812050
- [6] K.-I.Aoki and A.Horikoshi, unpublished
- [7] K.-I.Aoki and A.Horikoshi, in preparation