

# Control of fusion and cohomology of finite groups

埼玉大学教育学部 飛田明彦 (Akihiko Hida)  
Faculty of education, Saitama University

## 1 Introduction

$G$  を有限群,  $k$  を標数  $p > 0$  の代数的閉体とする. [S2] において, P. Symonds は次の結果を示している.

**Theorem 1.1** ([S2, Theorem 4.1]).  $H^*(-, k)$  は ( $k$ -ベクトル空間の) inflation functor として全ての cohomological simple functor を組成因子に持つ.

[S2] ではこれを用いて次の Mislin の定理の別証明を与えている.

**Theorem 1.2** ([M, Theorem], [S2, Theorem 1.1]).  $H$  は  $G$  の部分群で, 指数  $|G:H|$  は  $p$  と素であるものとする. このとき次は同値である.

(1) 制限写像

$$\text{res}_{G,H} : H^*(G, k) \longrightarrow H^*(H, k)$$

は同型写像.

(2)  $H$  の  $p$ -部分群  $Q$  と  $x \in G$  について,  ${}^xQ \subseteq H$  ならば  $x \in HC_G(Q)$  である.

もとの Mislin の結果は Lie 群に関するものであり, 有限群の場合に群論的, あるいは代数的な証明が望まれている. [S2] での Theorem 1.1 の証明も, 代数的位相幾何学の深い結果を用いている. これについては, 亀子氏の解説を参照して下さい.

一方, ひとつの群  $G$  について考えると Theorem 1.1 より次が得られる.

**Corollary 1.3** ([S2, Corollary 4.2]).  $P$  を  $G$  の  $p$ -部分群,  $V$  を既約  $k(N_G(P))$ -加群とし,  $S_{P,V}$  を対応する既約 Mackey functor とする. このとき次は同値である.

(1) ある  $n \geq 0$  に対して,  $S_{P,V}$  は Mackey functor の組成因子として,  $H^n(-, k)$  に含まれる.

(2)  $V$  は  $k(N_G(P)/PC_G(P))$ -加群.

実は Theorem 1.2 を示すためにはこの Corollary で十分である. 3 章では [S2] の議論に従い, Mackey functor と部分群の fusion がどの様に関係あるのか, Corollary 1.3 からどの様に Mislin の定理が導かれるか説明したい.

[S2] にもあるように, Corollary 1.3 はある種の置換加群を用いて言い換えることができる.  $P$  を  $G$  の  $p$ -部分群,  $V$  を既約  $kN_G(P)$ -加群とする.  $kG$ -加群  $M_{P,V}^G$

を,  $V$  の  $k(N_G(P)/P)$ -加群としての projective cover を  $kN_G(P)$ -加群とみたものの Green 対応として定義する. これは vertex が  $P$  である直既約加群である. 4 章では Corollary 1.3 は次と同値であることを説明する.

**Theorem 1.4** ([S2, Theorem 5.3]).  $p$ -部分群  $P$  と既約  $k(N_G(P))$ -加群  $V$  について, 次は同値である.

- (1)  $H^*(G, M_{P,V}^G) \neq 0$ .
- (2)  $V$  は  $k(N_G(P)/PC_G(P))$ -加群.

奥山氏の講演にもあった様に, これに関しては群論的, あるいは有限群のモジュラー表現論を用いた証明が得られている ([O], [H]). よって有限群の場合の Mislin の定理について代数的な証明が与えられたことになる. また, [R] にも関連した話題が述べられている.

## 2 Mackey functor

ここでは Mackey functor, 特に既約な Mackey functor について簡単にまとめる. ここではひとつの群  $G$  に対する Mackey functor のみ扱うこととする. Global Mackey functor, inflation functor 等については [W] を参照して下さい.  $M$  が cohomological Mackey functor とは, 各  $H \leq G$  に対し,  $k$ -ベクトル空間  $M(H)$  が与えられ, また  $K \leq H \leq G$ ,  $g \in G$  に対し線形写像,

$$t_K^H : M(K) \longrightarrow M(H)$$

$$r_K^H : M(H) \longrightarrow M(K)$$

$$c_g : M(H) \longrightarrow M({}^gH)$$

が決められていて次の公理を満たすものである.

- (1)  $t_H^H, r_H^H, c_h$  ( $h \in H$ ) は  $M(H)$  の恒等写像.
- (2)  $J \leq K \leq H \leq G$ ,  $g, h \in G$  に対して,

$$t_K^H t_J^K = t_J^H, \quad r_J^K r_K^H = r_J^H, \quad c_g c_h = c_{gh}$$

$$r_{gK}^{{}^gH} c_g = c_g r_K^H, \quad t_{gK}^{{}^gH} c_g = c_g t_K^H.$$

- (3)  $J, K \leq H \leq G$  に対して次の Mackey 公式が成立する.

$$r_J^H t_K^H = \sum_{x \in J \backslash H/K} t_{J \cap {}^x K}^J r_{J \cap {}^x K}^{{}^x K} c_x.$$

- (4)  $K \leq H$  に対して,

$$t_K^H r_K^H = |H : K|.$$

Mackey functor に対し, subfunctor, quotient, 既約性, 組成因子などが自然に定義される. 既約な cohomological Mackey functor は分類されており,  $p$ -部分群  $P$  と既約  $kN_G(P)$ -加群  $V$  の組  $(P, V)$  (共役と同型を除く) で parametrize される ([TW1], [TW2]).  $(P, V)$  に対応する既約な Mackey functor を  $S_{P,V}$  で表す.  $k(N_G(P)/P)$ -加群として  $S_{P,V}(P) \cong V$  となっている.

### 3 Fusion and Mackey Functor

$G$  の  $p$ -部分群  $Q$  を固定する.  $H \leq G$  に対し,

$$T_G(Q, H) = \{x \in G \mid {}^x Q \subseteq H\}$$

とおく. この集合には  $H$  と  $C_G(Q)$  がそれぞれ左と右から作用している.

$$H \backslash T_G(Q, H) / C_G(Q) = \{HxC_G(Q) \mid x \in T_G(Q, H)\}$$

とおく.  $G$  に対する Mackey functor  $M_Q$  を次の様に定義する.

$H \leq G$  に対し,

$$M_Q(H) = k(H \backslash T_G(Q, H) / C_G(Q))$$

とする. また  $K \leq H \leq G, g \in G$  に対し,

$$t_K^H : M_Q(K) \longrightarrow M_Q(H)$$

$$KxC_G(Q) \longmapsto HxC_G(Q)$$

$$r_K^H : M_Q(H) \longrightarrow M_Q(K)$$

$$HxC_G(Q) \longmapsto \sum_{h \in [K \backslash H], hx \in T_G(Q, K)} K(hx)C_G(Q)$$

$$c_g : M_Q(H) \longrightarrow M_Q({}^g H)$$

$$HxC_G(Q) \longmapsto {}^g H(gx)C_G(Q)$$

とおく. この  $M_Q$  について次が成立する.

**Theorem 3.1.** (1)  $M_Q$  は cohomological Mackey functor である.

(2)  $g \in C_G(H)$  ならば  $c_g$  は  $M_Q(H)$  の恒等写像である.

(3) 任意の既約  $k(N_G(Q)/QC_G(Q))$ -加群  $V$  に対して,  $M_Q$  は  $S_{Q,V}$  を組成因子として含んでいる.

(1) は定義を順次確認していけば良い. (2) を確認しておこう.  $x \in T_G(Q, H)$ ,  $g \in C_G(H)$  とすると,  $z \in Q$  について,

$$x^{-1}gx z = x^{-1}g({}^x z) = z$$

なので  $x^{-1}gx \in C_G(Q)$  つまり  $gx \in xC_G(Q)$  である. よって  ${}^g H(gx)C_G(Q) = HxC_G(Q)$  である. また (3) については,  $Q_1 < Q$  ならば  $M_Q(Q_1) = 0$  であり, また  $M_Q(Q) = k(N_G(Q)/QC_G(Q))$  であることから分かる.

一方  $M_Q$  の定義から  $Q \leq H \leq G$  のとき,  $\dim M_Q(H) = 1$  となるための必要十分条件は  $T_G(Q, H) = HC_G(Q)$  であることがわかる.

ここまで準備をした上で, ([S2] に従い) Corollary 1.3 から Theorem 1.2 が導かれることを示そう.  $G \geq H$ ,  $|G:H|$  は  $p$  と素とする.

$$\text{res} : H^*(G, k) \longrightarrow H^*(H, k)$$

が同型であるということは, Corollary 1.3 より, 全ての  $p$ -部分群  $P$  と任意の既約  $k(N_G(P)/PC_G(P))$ -加群  $V$  について

$$r_H^G : S_{P,V}(G) \longrightarrow S_{P,V}(H)$$

が同型ということと同値である. 一方 Theorem 3.1 よりこれは全ての  $p$ -部分群  $Q$  に対し,

$$r_H^G : M_Q(G) \longrightarrow M_Q(H)$$

が同型, すなわち  $\dim M_Q(H) = 1$  となることと同値であり, これは  $H$  の任意の  $p$ -部分群  $Q$  について  $T_G(Q, H) = HC_G(Q)$  となること, つまり Theorem 1.2 (2) と同値である.

## 4 Cohomology of trivial source modules

$P$  を  $G$  の  $p$ -部分群,  $V$  を既約  $kN_G(P)/P$ -加群とする.  $P_V$  を  $V$  の  $k(N_G(P)/P)$ -加群としての projective cover とする.  $P_V$  を  $kN_G(P)$ -加群と考え, その Green 対応である  $kG$ -加群を  $[O]$  に従い  $M_{P,V}^G$  と表すことにする. [S2] に従い Corollary 1.3 を置換加群の言葉に言い換えよう.

**Proposition 4.1** ([TW2, (16.10) Proposition]). *fixed point functor* すなわち 0 次の cohomology  $H^0(-, M_{P,V}^G)$  は cohomological Mackey functor としての  $S_{P,V}$  の projective cover である.

これより,  $S_{P,V}$  が  $H^n(-, k)$  の組成因子ということは,

$$\text{Ext}_{kG}^n(M_{P,V}^G, k) \cong \text{Hom}(H^0(-, M_{P,V}^G), H^n(-, k)) \neq 0$$

と同じことである. 双対加群  $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$  を考えるとこれは,

$$H^n(G, M_{P,V^*}^G) \neq 0$$

と同値であることになり, 結局 Corollary 1.3 は Theorem 1.4 と同値となった訳である.

Theorem 1.4 は trivial source を持つ加群の cohomology と,  $p$ -部分群の中心化群に関する主張であり [BCR] との関係を考えるのは自然であろう. 実際, [BCR] の予想を一般に解決した [B2] での結果を用いて, 表現論的な証明を与えることができる. 以下 Theorem 1.4 の証明の概略を述べることにする. 詳しくは [H] を参照して下さい.

(1)  $\Rightarrow$  (2).  $H^n(G, M_{P,V}^G) \neq 0$  ならば  $S_{P,V^*}$  は  $H^n(-, k)$  の組成因子となり,  $k(N_G(P)/P)$ -加群として  $V^*$  は  $H^n(P, k)$  に現れる.  $C_G(P)$  は  $H^*(P, k)$  に自明に作用するので,  $V^*$  は (そして  $V$  も)  $k(N_G(P)/PC_G(P))$ -加群である.

(2)  $\Rightarrow$  (1).  $E$  を  $P$  の中心に含まれる位数  $p$  の部分群とする.

(i)  $G = C_G(E)$  のとき. これは spectral sequence を用いて示される ([S1] と同様

のアイデアによる).

(ii)  $G = N_G(E)$  のとき. これは  $N_G(E)/C_G(E)$  が巡回  $p'$ -群であることから [BCR, section 6] と同様の議論を用いて証明される.

(iii) 最後に一般の場合.  $M = M_{P,V}^G$ ,  $H = N_G(E)$  とする. 既約  $k(N_H(P)/PC_H(P))$ -加群  $V'$  で  $M' = M_{P,V'}^H$  が  $M \downarrow_H$  の直和因子となるものが存在する. 以下, 加群の variety に関する用語については [B1] を参照して下さい.

$\sqrt{\text{Ker res}_{G,E}}$  の生成元  $\zeta_1, \dots, \zeta_r$  に対して, 対応する Carlson 加群  $L_{\zeta_i}$  の tensor 積を  $L$  とすると,

$$V_G(L) = \text{res}_{G,E}^*((V_E(k)))$$

となっている. [B2, Theorem 3.1] より  $kH$ -加群  $X$  で

$$X \uparrow^G \cong L \oplus (\text{projective})$$

となるものが存在する.  $X$  も (多少の修正が必要だがほぼ)  $I = \sqrt{\text{Ker res}_{H,E}}$  の適当な元  $\eta_0, \eta_1, \dots$  に対応する Carlson 加群の tensor 積となっているとしてよい. 完全列

$$0 \longrightarrow L_{\zeta_i} \longrightarrow \Omega^{n_i}(k) \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

より,  $\widehat{\text{Ext}}_{kG}^*(L, M) \neq 0$  ならば  $H^*(G, M) \neq 0$  となることがわかる.

$$\widehat{\text{Ext}}_{kG}^*(L, M) \cong \widehat{\text{Ext}}_{kG}^*(X \uparrow^G, M) \cong \widehat{\text{Ext}}_{kH}^*(X, M)$$

より ((ii) で示した  $H^*(H, M') \neq 0$  から)  $\widehat{\text{Ext}}_{kH}^*(X, M') \neq 0$  を導けば良いことになる.  $A = H^*(H, k)$  とおく. [E, Proof of Theorem 10.3.1] より  $A$  における  $H^*(H, M')$  の annihilator は  $I$  に含まれていることがわかる.

**Lemma 4.2.**  $U, W$  を  $kH$ -加群,  $\eta \in I$  とする. このとき

$$\text{ann}_A \widehat{\text{Ext}}_{kH}^*(U, W) \subseteq I$$

ならば

$$\text{ann}_A \widehat{\text{Ext}}_{kH}^*(U \otimes L_\eta, W) \subseteq I.$$

*Proof.*  $B = \widehat{\text{Ext}}_{kH}^*(U, W)$  とおく.  $\deg \eta = n$  とすると, 完全列

$$\widehat{\text{Ext}}_{kH}^i(U, W) \longrightarrow \widehat{\text{Ext}}_{kH}^{i+n}(U, W) \longrightarrow \widehat{\text{Ext}}_{kH}^i(U \otimes L_\eta, W)$$

より  $\text{ann}_A \widehat{\text{Ext}}_{kH}^*(U \otimes L_\eta) \subseteq \text{rad ann}_A B / \eta B$  となる.  $\text{ann}_A B \subseteq I$  なので, prime ideal  $I$  に関する局所化を考えると  $B_I \neq 0$  であり, 中山の補題より  $B_I \neq IB_I$  つまり  $B_I \neq \eta B_I$  となる. よって  $\text{ann}_A B / \eta B \subseteq I$ .  $\square$

$X$  は  $\otimes L_{\eta_i}$  であったから, Lemma 4.2 を繰り返し用いると,

$$\text{ann}_A \widehat{\text{Ext}}_{kH}^*(X, M') \subseteq I$$

つまり  $\widehat{\text{Ext}}_{kH}^*(X, M') \neq 0$  が得られる. よって Theorem 1.4 が証明されたことになる.

## References

- [B1] D. J. Benson, *Representations and cohomology II: cohomology of groups and modules*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 31, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).
- [B2] D. J. Benson, *Cohomology of modules in the principal block of a finite group*, New York J. Math. 1(1995), 196-205.
- [BCR] D. J. Benson, J. F. Carlson and G. R. Robinson, *On the vanishing of group cohomology*, J. Algebra 131(1990), 40-73.
- [E] L. Evens, *The cohomology of groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, (1991).
- [H] A. Hida, *Control of fusion and cohomology of trivial source modules*, preprint.
- [M] G. Mislin, *On group homomorphisms inducing mod- $p$  cohomology isomorphisms*, Comment. Math. Helvetici 65(1990), 454-461.
- [O] T. Okuyama, *Cohomology isomorphisms and control of fusion*, preprint, (2005).
- [R] G. R. Robinson, *Arithmetical properties of blocks*, in Algebraic groups and their representations, R. W. Carter and J. Saxl eds., Kluwer, Dordrecht, (1998), 213-232.
- [S1] P. Symonds, *The action of automorphisms on the cohomology of a  $p$ -group*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 127(1999), 495-496.
- [S2] P. Symonds, *Mackey functors and control of fusion*, Bull. London Math. Soc. 36(2004), 623-632.
- [TW1] J. Thévenaz and P. J. Webb, *Simple Mackey functors*, Proc. of 2nd International Group Theory Conference, Bressanone(1989), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 23(1990), 299-319.
- [TW2] J. Thévenaz and P. J. Webb, *The structure of Mackey functors*, Trans. Amer. Math. Soc. 347(1995), 1865-1961.
- [W] P. J. Webb, *Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces*, J. Pure Appl. Algebra 88(1993), 265-304.