

多重遅延系のモード選択則と管楽器モデル

九州工業大学 情報工学研究院 高橋 公也

Kin'ya Takahashi

Faculty of Computer Science and System Engineering, Kyushu Institute of Technology

九州大学 情報基盤研究開発センター; 秋柚株式会社 小林 泰三

Taizo Kobayashi

Research Institute for Information Technology, Kyushu University; AxiomA Ltd.

1 はじめに

遅延方程式の研究は、数学だけでなく、非線形物理学、光学、音響学、生物学、制御工学、経済学などの多くの分野の重要な課題である [1–12]。これらの研究の多くは、1つの遅延時間を持つ1重遅延系を扱っていて、2つ以上の遅延を持つ多重遅延系の研究は全体から見ると多くはない。しかし、2重遅延系には、1重遅延系にはない力学系としての新たな側面がある [13–29]。

2重遅延系における複雑なモード選択則に初めて焦点を当てたのは、池田らの研究である [13]。彼らは、光学的な2重共振器のモデルを用いて、発振モードを2つの遅延時間の比 t_1/t_2 ($t_1 < t_2$) の関数として見た場合、極めて複雑に変化することを示し、連分数展開を用いてモード選択則と整数論との関係を議論した。このような2重遅延系のモード選択則の複雑性は他のシステムでも確認されている [15, 25]。Zhang & Dai は、類似の光学系で池田らのモード解析の結果を実験的に再現した [14]。Grotta-Ragazzo & Malta は、池田らのモード解析の数学的な側面を発展させた [16]。ただし、これらの理論的な解析は、2つの遅延強度が等しい場合に限られている。

光学系の他にも多重遅延系と見做せる対象は多々あるが、ここでは、音孔のついた木管楽器について簡単に触れておく [12]。木管楽器は、音源となるマウスピース部分と管体（線形共鳴器）によって構成される。図1は、クラリネットのように円筒の閉管（片側が閉じた管）を持つ楽器の模式図である。左側の閉端部分がマウスピースでここに音波を作り出す非線形振動系があると考えてよい。右側が開口端で、途中で音孔がある。音孔も開口端と同じ境界条件を満たすと考えてよい。マウスピースから出た音が音孔と開口端で反射し戻ってくる時間を t_1 , t_2 とすると、音孔が1つある場合は、大雑把に考えると2重遅延系になる [25]。したがって、複数の音孔を持つ木管楽器は多重遅延系になり、運指の変化による音の高さの変化は、遅延関数の変化による発振モードの変化と考えてよい [10–12]。さらに、多重遅延系でモデル化できる木管楽器は多重アトラクター系で、演奏音以外にもさまざまな音（大体不快な音）を発振する。これは、実験でも確かめることができ、遅延方程式モデルを用いて再現することもできる [30–32]。

2重遅延系の発振モードの複雑さの直感的な説明をするために、図1の楽器モデルを用いる [25]。管体内に、発振可能なモードの波の変位（音響的粒子の変位）が描いてある。開口端では境界条件により波の腹がくる。音孔も開口端なので、波の腹がくるべきである。上図のように、左端から音孔と開口端までの距離の比が1:3の場合は、開口端と音孔の位置に波の腹がくる3次モードの発振が起きる。一方、真ん中の図や下図のように、距離の比が1:2や1:4の場合は、開口端に腹がくる発振モードは奇数次なので、音孔の位置に腹がない。実際は、音孔の大きさが有限なので、図に示すような高次モードの発振が起きると予想される。音孔や

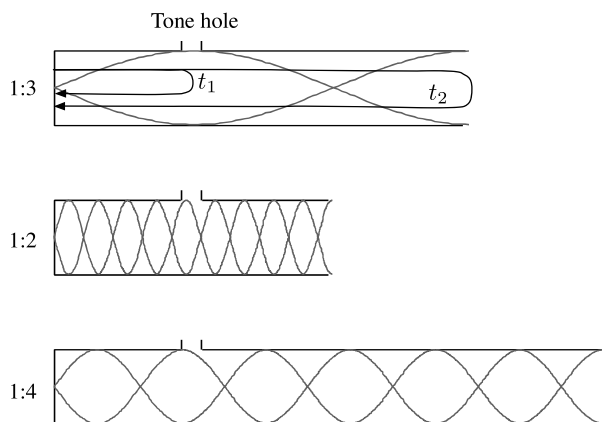


図1 音孔のある閉管楽器の発振状態

開口端までの距離の2倍を反射波の遅延時間と考えれば、遅延比が1:3の場合では、3次モードの発振が起きるが、遅延比が1:2や1:4の場合には、高次モードの発振が起きやすくなる。池田らが光学系の2重遅延モデルで発見したのは、これと同等のモード発振の複雑さである[13]。ちなみに、音孔の径を小さくしていくと、開口としての性質が弱くなるために、遅延比が1:2や1:4の場合でも低次のモードが発振するようになる。特に、音孔の径をうまく調節すると、 $1/4 \leq t_1/t_2 \leq 1/2$ の領域で3次モードの発振が起きる。実は、この条件設定を、クラリネットのレジスターホールは利用している。レジスターホールは、マウスピースに最も近い小さな音孔であるが、1オクターブ以上の広い演奏音域で、これを開くと1オクターブと5度高い音(3次モード)を発振する[12]。実際に、この機構を2重遅延モデルを用いて再現することは可能である[25]。

このように、2重遅延系は、遅延比や遅延強度に依存して、さまざまなモードが発振可能である。この小論では、短い遅延の強度を正值だけでなく負値にした場合も含めて取り扱い、モード選択則やそれを作り出す固定点の分岐構造の性質等について、著者らの最近の研究を交えて解説する[25–29]。実際に、短い遅延が負値を取る場合には、池田らが発見したモード選択則とは異なるモード選択則が発振モードを支配する[27–29]。管楽器への応用は大変興味がある話題であるが、紙面の長さの都合上割愛する。これについては、文献[25, 31, 32]を参照していただきたい。なお、筆者らは非線形物理学の研究者であるので、この小論で与える定義や定理は、数学的に見れば厳密でない可能性が十分にある。そのような場合は、ご指摘いただければと思う。

2 モデル系

この小論で我々が扱う系は以下のような2重遅延系である[13, 25]。

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dx}{dt} = -x + \mu\alpha_1 f[x(t-t_1)] + \mu\alpha_2 f[x(t-t_2)] \quad (1)$$

ここで、 μ は分岐を支配する制御パラメーターで、 γ は大きな正值を取る定数である。 t_1 と t_2 は遅延時間で、以下では、 $t_2 = 1$ と固定し、 $0 < t_1 < t_2$ の場合を考える。 α_1 と α_2 は遅延強度で、 $\alpha_2 = 1$ と固定し、

$-\alpha_2 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ とする。 $\alpha_1 < 0$ のときは、正負の遅延を持つ系になり、 $\alpha_1 = 0$ とすると 1 重遅延系になる。関数 $f(x)$ は以下のようなガウス型の関数とする [25]。

$$f(x) = \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta x^2}\right] \quad (2)$$

関数 $f(x)$ の非線形性により、 μ を増加させると安定固定点が分岐し、振動解が発生する。余談であるが、池田らが扱った光学系のモデルでは、関数 $f(x)$ は余弦関数型であり、 $\alpha_1 = \alpha_2$ の場合のみ扱っている [13]。

定数 γ は、系の減衰を支配するパラメーターであるが、極限 $\gamma \rightarrow \infty$ を取ると、式 (1) は以下のような 2 重遅延差分方程式になる。

$$x(t) = \mu\alpha_1 f[x(t-t_1)] + \mu\alpha_2 f[x(t-t_2)] \quad (3)$$

ただし、この極限は特異摂動極限であり、解の収束性等の問題は十分注意して取り扱う必要がある。2 重遅延差分方程式 (3) は、点から点への写像となるので、物理現象として見ると、系から発したパルス波が分散せず反射して戻ってきて系に作用したとみなせる。そこで、この系を**非分散系**と呼ぶ [26]。一方、 $0 < \gamma < \infty$ の場合の系 (1) の形式解を書くと、戻ってくるパルス波は指数関数のテールをもち、分散媒質の反射と見做せる [25]。そこで、この系を**分散系**と呼ぶ [26]。

系 (1) は、 $\alpha_1 = 0$ とおくと 1 重遅延系になる。このとき、対応する非分散系は 1 重遅延差分方程式となるが、その解を時間 t_2 の間隔で観測すると、以下の 1 次元写像と等価になる。

$$x_i = \mu f(x_{i-1}), \quad (4)$$

この写像の固定点 x_c は、 $x_c = \mu f(x_c)$ を満たす点で、固定点が 1 つしかない場合は、 μ の関数となる。パラメーターを $x_0 = 0.2$ と $\Delta x = 0.5$ とおくと、写像 (4) は固定点 x_c を 1 つ持ち、 μ の増加させると周期倍分岐を $\mu \sim 0.622$ で一回起こすが、周期倍分岐のカスケードは起きない [25]。さらに、 x_c は μ の単調増加関数である [25]。以下、このパラメーター設定の場合を取り扱う。

分散 1 重遅延系 ($\gamma < \infty$) の場合でも、分岐のトリガーになるのはこの埋め込めれた写像の周期倍分岐である。さらに、2 重遅延系 ($\alpha_1 > 0$) においても埋め込めれた写像の周期倍分岐が分岐のトリガーになるが、遅延比 t_1/t_2 や強度比 α_1/α_2 に依存して、さまざまな振動モードが現れる。そこで、安定な固定点の分岐によって現れる振動モードを支配する規則 (**モード選択則**) に注目して解析を進める。

3 線形安定性解析

3.1 1 重遅延系

1 重遅延系の固定点 x_c の分岐を調べるために、線形安定性解析を行う [25]。固定点近傍の解を、

$$x = x_c + a \exp(\lambda t + i\omega t) \quad (5)$$

と仮定し、これを、 $\alpha_1 = 0$ とおいた式 (1) に代入し、線形近似を行うと、

$$\frac{1}{\gamma}(\lambda + i\omega) = -1 + \mu f'(x_c) \exp(-(\lambda + i\omega)t_2), \quad (6)$$

となる。分岐点では中立安定になるので、 $\lambda = 0$ とおくと、

$$1 + i\frac{\omega}{\gamma} = \mu f'(x_c) \exp(-i\omega t_2) \quad (7)$$

となり、これを実部と虚部分けて書くと、

$$1 = \mu f'(x_c) \cos \omega t_2 \quad (8)$$

$$\gamma^{-1} \omega = -\mu f'(x_c) \sin \omega t_2 \quad (9)$$

となる。この2つの式から分岐の情報がわかる。一次元写像が周期倍分岐を起こすので、それに対応する遅延系の Hopf 分岐は、 $f'(x_c) < 0$ の領域で起きるとすると、

$$\cos \omega t_2 < 0 \quad (10)$$

を満たさなければならない。一方、式 (8) と式 (9) から $\mu f'(x_c)$ を消去すると、

$$\gamma^{-1} \omega = -\tan \omega t_2 \quad (11)$$

となり、発振する解の角振動数の候補は、式 (11) で与えられ、かつ、式 (10) を満たすものである。

ここで、非分散極限 $\gamma \rightarrow \infty$ をとると、式 (11) は、

$$\tan \omega t_2 = 0 \quad (12)$$

となり、条件 (10) を考慮すると、角振動数と分岐点 μ_c は以下の式で与えられる。

$$\omega = \omega_{2l+1} = \frac{(2l+1)\pi}{t_2}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

$$\eta = \mu_c f'(x_c(\mu_c)) = \frac{1}{\cos \omega_{2l+1} t_2} = -1 \quad (14)$$

ここで、後々の便利のために、 $\eta \equiv \mu_c f'(x_c)$ という量を導入した。 x_c は μ の単調増加関数であり、分岐点近傍で $f'(x_c) < 0$ なので η は負値をとり、さらに関数 $f(x)$ の性質から、 η は μ の単調減少関数となることがわかる [25]。

非分散系の分岐は、実質的に周期倍分岐であり、各時刻における時間発展はその点ごとに決まるので、分岐後に周期 $T = 2t_2/(2l+1)$ の方形波が発振可能であり、奇数次モードが発振することは理解できる。しかし、式 (14) より、それらのモードが発振する分岐点 μ_c は全て同じであり、基本モード ($l = 0$) が最初に発振する訳ではない。ここで、この基本モードの周期と角振動数を、それぞれ $T_f = 2t_2$ と $\omega_f = 2\pi/T_f$ とする。

しかし、分散系の場合には、基本モードの分岐が最初に起きる。分散系の各モードの角振動数 $\hat{\omega}_n$ は、非分散系の角振動数 ω_n から $\delta\omega_n$ だけずれると考え、

$$\hat{\omega}_n = \omega_n + \delta\omega_n \quad (15)$$

と置く。これを、式 (11) に代入し摂動計算を行うと、 $\delta\omega_n$ は、

$$\delta\omega_n \sim -\frac{\omega_n}{\gamma t_2 + 1} \sim -\frac{\omega_n}{\gamma t_2} \quad (16)$$

となり、角振動数が $O(1/\gamma)$ 程度減少し、次数が上がるに連れてずれが大きくなるのがわかる。これを、式 (8) に代入し、 η を求めると、

$$\eta_n = \mu_n f'(x_c(\mu_n)) = \frac{1}{\cos \hat{\omega}_n t_2} \sim \frac{1}{-1 + \frac{1}{2}(\delta\omega_n t_2)^2} \sim -1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_n}{\gamma} \right)^2 \quad (17)$$

となる。 η は μ の単調減少関数なので、基本モード ($\omega = \hat{\omega}_1$) が最初に分岐することがわかる。したがって、基本モードが最も発振し易いという、日常経験と矛盾しない結果となる。そこで、最適発振モードを以下のよ

うに定義する [25]。

[定義 1: 最適発振モード]

固定点 x_c が安定な状態から、制御パラメーター μ を変化させたときに、最初の分岐 (第一分岐) で発振するモードを最適発振モードとする。複数のモードの分岐が同時に起きる場合は、最も小さな角振動数を持つモードを最適発振モードとする。

注意: この系にはスケーリング則があり、 γt_2 が同じ、言い換えれば ω_f/γ が同じ 2 つの系の振る舞いは同じになる [25]。近似計算 (16)、(17) で、 γt_2 と ω_n/γ が現れたのはそのためである。

3.2 2重遅延系 ($0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$)

ここでは、 $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ の場合の 2 重遅延系の線形安定性解析を行う [13, 25]。1 重遅延系の場合と同様に、固定点 x_c 近傍の解を式 (5) で表し、式 (1) に代入し線形近似を行うと、1 重遅延系の分岐点における条件 (8)、(9) に対応する条件が以下のように求まる。

$$\eta = \mu f'(x_c) = \frac{1}{\alpha_1 \cos \omega t_1 + \alpha_2 \cos \omega t_2} < 0 \quad (18)$$

$$\gamma^{-1} \omega = -\mu f'(x_c) (\alpha_1 \sin \omega t_1 + \alpha_2 \sin \omega t_2) \quad (19)$$

ここで、固定点 x_c は以下の式で与えられる。

$$x_c = \mu(\alpha_1 + \alpha_2) f(x_c) \quad (20)$$

式 (18) と式 (19) から $\mu f'(x_c)$ を消去すると、

$$\gamma^{-1} \omega = -\frac{\alpha_1 \sin \omega t_1 + \alpha_2 \sin \omega t_2}{\alpha_1 \cos \omega t_1 + \alpha_2 \cos \omega t_2} \quad (21)$$

が得られる。式 (21) と式 (18) から、発振可能なモードの角振動数の集合

$$\Omega(t_1, \alpha_1) = \{\tilde{\omega}_n | \tilde{\omega}_n \text{ satisfy Eq.(21) with Eq.(18)}\} \quad (22)$$

が求まる。したがって、 η の最大値は、

$$\eta_{max}(t_1, \alpha_1) = \max\{\eta(\tilde{\omega}_n) | \tilde{\omega}_n \in \Omega(t_1, \alpha_1)\} \quad (23)$$

で与えられ、 η_{max} を与える $\tilde{\omega}_n$ が最適発振モードの角振動数となる [25]。ただし、そのような $\tilde{\omega}_n$ が複数ある場合には、最小の $\tilde{\omega}_n$ を持つモードを最適発振モードとする [27]。

図 2 に、 $\gamma = 210$ のときの発振モードと遅延比 t_1/t_2 の関係を示す。(a) は、線形安定性解析で求めた最適発振モードで、(b) は、数値計算で得られた最初に発振するモードである。縦軸は、発振モードの角振動数 ω を ω_f で割ったもので、モードの実行的次数を与える。短い遅延の強度を $\alpha_1 = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ とした時のモード次数の変化を示している。図 3 は、線形安定性解析で求めた各モードの η と η_{max} を t_1/t_2 の関数として表したもので、最適モードの選択過程を図にしたものである。(a) と (b) に、 $\alpha_1 = 1, 0.01$ の場合を示す。

図 2 の (a) と (b) を比較すると、線形安定性解析と数値計算の結果がほぼ一致していることがわかる。ただし、 $\alpha_1 = 0.01$ の数値計算では、一部の領域で不規則な振動が見られる。これについては、後で考察する。したがって、線形安定性解析によりほぼ発振モードの予想ができる。

まず、 $\alpha_1 = 1$ の場合を見てみると、 $t_1/t_2 = (2n+1)/(2m+1)$ で、 m が十分に小さい場合、すなわち、低次の奇数比の場合、その近傍に $2m+1$ 次のモードの発振が見られる。一方、 $t_1/t_2 = 2n/(2m+1)$ や $t_1/t_2 = (2n+1)/2m$ のように、偶数：奇数または奇数：偶数で、 m が十分小さい場合には、その近傍に高次モードの発振が見られる。ただし、その中心では低次モードの発振が観測される。このような2つのピークを持つ高次モードの発振現象を、池田らは**タワー構造**と呼んだ [13]。

この理由について考えて見よう。まず、1重遅延系の解析によれば、遅延 t_2 は、周期 $T \sim 2t_2/(2l+1)$ を持つ奇数次モードを作り出す。一方、遅延 t_1 の作り出すモードは、周期 $T \sim 2t_1/(2k+1)$ を作り出す。遅延比が $t_1/t_2 = (2n+1)/(2m+1)$ のときに、 t_1 が作り出すモードの周期は、

$$T \sim \frac{2t_1}{2k+1} = \frac{2t_2(2n+1)}{(2k+1)(2m+1)} \quad (24)$$

となるので、 $2k+1 = (2h+1)(2n+1)$ とおけば、 $T \sim 2t_2/(2h+1)(2m+1)$ となり、遅延 t_2 から見て $(2h+1)(2m+1)$ のモードが作られ、どちらの遅延時間にも適合したモードになる。 $h=0$ とおけば、 $2m+1$ 次のモードになり、これが最適発振モードになる。実際に、図3(a)の $t_1/t_2 = 1/3$ 近傍を見ると、上に凸の曲線群が見られるが、 η_{max} を与えるのが、 $m=1, h=0$ とおいた3次モードの曲線で、その下に現れるのが $h=1, 2, \dots$ とおいた曲線である。1重遅延系で行ったと同様の近似計算をすると、モードの次数が上がるとそれに応じて η が $O(\omega^2/\gamma^2)$ だけ減少するので、 η_{max} を与えるのは、 $2m+1$ 次のモードになる。ただし、曲線 η の極大点は、 $t_1/t_2 = (2n+1)/(2m+1)$ ではなく少しずれた、 $t_{1R}/t_2 = (2n+1)/(2m+1) + \Delta t_\gamma/t_2$ となる。近似計算より、 $\Delta t_\gamma \sim -\gamma^{-1}(1 - t_1/t_2)$ であり、 $\gamma \rightarrow \infty$ で $\Delta t_\gamma \rightarrow 0$ となる [26, 27]。そこで、 t_{1R}/t_2 を**適合条件**と呼ぶ [27]。

一方、 $t_1/t_2 = 2n/(2m+1)$ または $t_1/t_2 = (2n+1)/2m$ のときに、 t_1 が作り出すモードの周期は、

$$T \sim \frac{2t_1}{2k+1} = \frac{2t_2(2n)}{(2k+1)(2m+1)} \text{ or } \frac{2t_2(2n+1)}{(2k+1)(2m)} \quad (25)$$

となり、この場合は、 k をどのように選んでも、 t_2 に対する奇数次モードを作り出すことはない。しかし、 t_1/t_2 近傍では、低周波数の発振モードが見られる。図3(a)の挿入図は、 $t_1/t_2 = 1/2$ 近傍を拡大した図である。 η_{max} は、 $t_1/t_2 \sim 1/2 + \Delta t_\gamma/t_2$ で最小値をとり、その点で、 η_1 と η_3 が交わっている。したがって、その点での周期は、1次モードに近いと考えられるが、3.3節の非分散系の議論から予想されるように、 T_f からかなりずれる。 $t_1/t_2 = 2/3, 3/4$ のように $t_1/t_2 > 1/2$ で見られるタワー構造の中心では、同様に1次モードに近い発振が起きている。一方、 $t_1/t_2 = 1/4$ のタワー構造の中心では、3次モードに近い発振が起きている。このことから、タワー構造の中心では、 $2m+1$ よりも低い次数のモードが発振すると推測される。タワー構造の作られ方について考察する。再び $t_1/t_2 = 1/2$ 近傍に着目すると、図2のように、タワー構造の外側では、次々高次の奇数次モードが発振していく。図3(a)をみると、タワー構造の部分で、 η_{max} の谷が出来ているが、谷を下降するにしたがい、ある深さまでは、高次のモードが発振している。このような高次モードは、そのモードに対応する適合条件 $t_1/t_2 \sim (2n+1)/(2m+1) + \Delta t_\gamma/t_2$ の近傍に現れる。しかし、モード次数には上限(カットオフ)があり、それを超えると、中心に近づくに連れモードの次数が低下していく。より正確に言えば、近似計算よりモードの角振動数に応じて η が $O(\omega^2/\gamma^2)$ だけ減少するので、ある値よりも ω が大きくなると、(適合条件でない)低次モードの η の方がそのモードの η よりも大きくなり η_{max} になる。したがって、大雑把に言えば、 $\omega/\gamma \ll 1$ を満たすモードがタワー構造に現れる。タワー構造を作り出す遅延比 $t_{1I}/t_2 = 2n/(2m+1) + \Delta t_\gamma/t_2$ および $t_{1I}/t_2 = (2n+1)/2m + \Delta t_\gamma/t_2$ を**非適合条件**と呼ぶ [27]。

短い遅延の強度 α_1 小さくしていった時の振る舞いを見てみよう。図2に示すように、 α_1 が小さくなるに

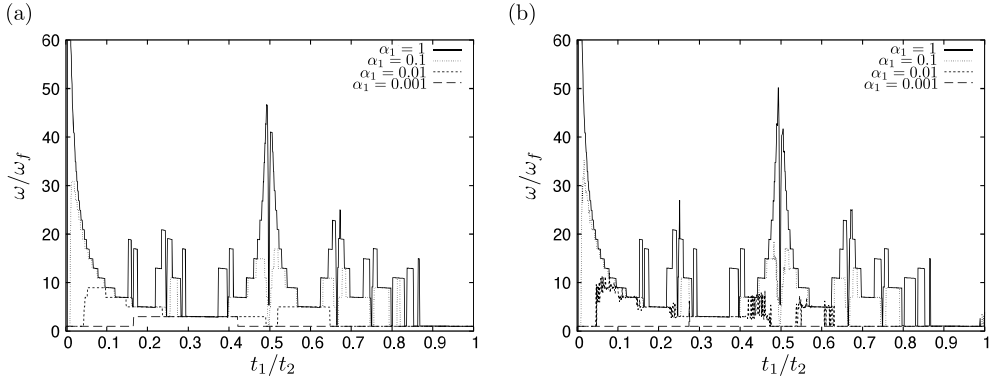


図2 発振モード ω/ω_f と遅延比 t_1/t_2 の関係 ($\gamma = 210$) (a) 線形安定性解析で求めた最適発振モード (b) 数値計算: μ を $d\mu/dt = 4.2 \times 10^{-5}$ で増加させた時に最初に発振するモード

連れて、タワー構造が低くなり、 $\alpha_1 = 0.01$ では9次以下のモードが発振する。さらに、 α_1 を小さくしていくと、基本モードだけが发振する様になり、1重遅延系と見做せる様になる。図3(b)に、 $\alpha_1 = 0.01$ における、各モードの η と η_{max} を示す。数値計算では、モードの選択が不安定になる領域があるが、そのような領域では、 η_{max} となるモードの η と別のモードが η が極めて近いために、数値計算ではモード選択が不安定になると考えられる。たとえば、 $0.4 < t_1/t_2 < 0.5$ では、3次と7次のモード間の選択不安定性が見られるが、図3(b)を見ると、その領域で、 η_3 と η_7 がほぼ同じ値を取っている。

ここまでの解析で、線形安定性解析で求まる最適発振モードと実際の発振モードがほぼ一致することがわかった。線形安定性解析は、 α_1 を固定すると、最適発振モードの規格化した角振動数 $\tilde{\omega}_n/\omega_f$ を t_1/t_2 の関数として与える。そこで、この関数およびその背後にある規則を**モード選択則**と呼ぶことにする。

最後に、余談になるが、クラリネットのレジスターホールの機能と2重遅延系のモード選択則の関係を簡単に述べておく [25]。クラリネットのレジスターホールは、マウスピースに一番近い最も小さな径を持つ音孔であるが、それを開くと運指を変えずに1オクターブと5度高い音(ほぼ3倍音)を発振する [12]。レジスターホールは、ほぼ1オクターブの音域にわたる運指にたいして機能する。マウスピース端からレジスターホールまでの距離と運指によって決まる実行管体長の比を取ると、ほぼ、 $1/2$ から $1/4$ の間で機能することになる。クラリネットの力学モデルは遅延方程式で与えられ、レジスターホールの機能を説明するモデルは2重遅延系で十分である [25]。このとき、レジスターホールの機能は、遅延比が $1/4 \leq t_1/t_2 \leq 1/2$ の間で3次モードが発振することに対応する。図2を見るとこの条件を満たすのは、 $\alpha_1 = 0.01$ の場合である。 α_1 を音孔の径に対応すると見做せば、これは、レジスターホールが十分に小さくかつ適切な径を持つときに機能することを示唆する。実際に、クラリネットの遅延方程式モデルを作って解析した場合でも同様な結論が得られる [25]。

3.3 非分散2重遅延系の線形安定性解析

適合条件と非適合条件の意味を明らかにするために、特異摂動極限である非分散系での線形安定性解析を行う [27]。極限 $\gamma \rightarrow \infty$ では、式 (19) は、以下のように書き換えられる。

$$\alpha_1 \sin \omega t_1 + \alpha_2 \sin \omega t_2 = 0 \quad (26)$$

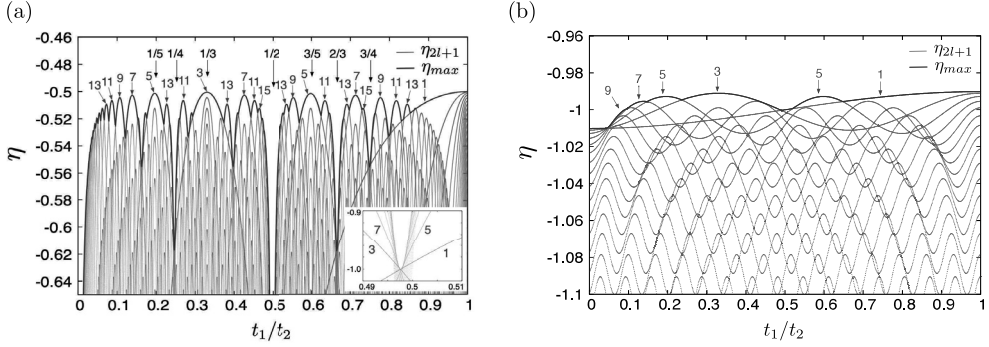


図3 線形安定性解析で求めた発振可能モードの η と η_{max} (a) $\alpha_1 = 1$:挿入した図は、 $t_1/t_2 = 1/2$ 近傍の拡大図 (b) $\alpha_1 = 0.01$

これと、条件 (18) を組み合わせれば、発振可能なモードが求まる。以下では、簡単のために、 $\alpha_1 = \alpha_2$ の場合の解析を行う。

最初に、適合条件 $t_1/t_2 = (2n+1)/(2m+1)$ の場合を考える。条件 (26) を満たすためには、 $\omega t_1 + \omega t_2 = 0 \pmod{2\pi}$ でなければならないので、 ωt_1 と ωt_2 は、以下のように与えられる。

$$\omega t_1 = \theta_L = \frac{2\pi L(2n+1)}{2m+2n+2} \pmod{2\pi} \quad (27)$$

$$\omega t_2 = -\theta_L \pmod{2\pi} \quad (28)$$

ここで、 L は自然数である。 t_1 と t_2 は与えられているので、 $0 < \omega < \infty$ の範囲の ω で条件 (27) を満たすものが、発振モードの候補を与える。図 4(a) に、 $(\cos \omega t_i, \sin \omega t_i)$ 空間 ($i = 1, 2$) で見た、発振可能モードのベクトル分布を示す。ベクトルは、 $\Delta\theta = 2\pi/(2m+2n+2)$ の間隔で並んでいるが、 $(2n+1)/(2m+2n+2)$ が規約分数になるので、全てのベクトルに対応する L が存在する。条件 (18) より、左半面のベクトルが発振可能なモードを与える。最適発振条件では、 η が最大値を取るので、 $\theta_L = \pi \pmod{2\pi}$ が最適発振条件を与える。したがって、 $L = (2l+1)(m+n+1)$ となり、角振動数は $\omega = (2l+1)(2m+1)\omega_f$ で与えられる。これらの内の最小次数のモード ($l=0$) が最適発振モードとなり、その角振動数は $\omega = (2m+1)\omega_f$ となる。すなわち、 $2m+1$ 次モードが最適発振モードである。これは、分散系の適合条件近傍でほぼ $2m+1$ 次のモードが発振することに対応している。ここまでは、 $\alpha_1 = \alpha_2$ の場合を考えていたが、 $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ であれば、最適発振条件は同じ条件で与えられる。したがって、 η_{max} は $\eta_{max}^R = (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$ となる。

次に、非適合条件 $t_1/t_2 = (2n+1)/2m$ or $t_1/t_2 = 2n/(2m+1)$ の場合を考える。適合条件と同様の解析をすると、条件 (26) を満たす ωt_1 と ωt_2 は、以下のように与えられる。

$$\omega t_1 = \theta_L = \frac{2\pi L(2n+1)}{2m+2n+1} \text{ or } \frac{2\pi L2n}{2m+2n+1} \pmod{2\pi} \quad (29)$$

$$\omega t_2 = -\theta_L \pmod{2\pi} \quad (30)$$

図 4(b) に、 $(\cos \omega t_i, \sin \omega t_i)$ 空間で見た、発振可能モードのベクトル分布を示す。非適合条件では、ベクトルは、 $\Delta\theta = 2\pi/(2m+2n+1)$ の間隔で並んでいるために、 $\theta_L = \pi \pmod{2\pi}$ となるベクトルが存在しない。

そのため、 η が最大となるベクトルは、 $\theta = \pi$ に最も近い 2 つの角度

$$\theta_L^{op} = 2\pi \frac{n+m+1/2 \mp 1/2}{2m+2n+1} \quad (31)$$

を持つベクトルになる。これより、最適条件を与える L は、

$$L = \frac{n+m+(1/2 \mp 1/2)+l(2m+2n+1)}{2n+1} \text{ or } \frac{n+m+(1/2 \mp 1/2)+l(2m+2n+1)}{2n} \quad (32)$$

となる。ただし、 l は非負の整数で、 L を自然数にするものでなければならない。そのため、全ての非適合条件に対し、 l と L を具体的に求めることは難しい。ここでは、 $t_1/t_2 = 1/2$ の場合を見てみる。これは、 $t_1/t_2 = (2n+1)/2m$ で $n=0, m=1$ とした場合なので、 $\theta_L^{op} = 2\pi/3, 4\pi/3$ となる。(32) より l が非負の整数であれば L は自然数になるので、全ての l で η が最大となる。特に、 $l=0$ ならば $L=1, 2$ となるので、最適発振モードは、 $l=0, L=1$ の時である。(29) 式より、この時の角振動数は、 $\omega = 4\pi/3t_2 = 4\omega_f/3$ となり、基本振動モードの角振動数 ω_f に近いものになる。全ての非適合条件について、調べることは不可能であるが、非適合条件の最適発振モードの角振動数は、 $\omega \lesssim (2m+1)\omega_f$ になると予想される。 $\alpha_1 = \alpha_2$ における非適合条件の η_{max} は、 $\eta_{max}^I = (2\alpha_2 \cos \theta_L^{op})^{-1}$ で与えられ、適合条件の $\eta_{max}^R = -(2\alpha_2)^{-1}$ よりも小さな値を取る。特に、 $t_1/t_2 = 1/2$ の場合には、 $\eta_{max}^I = -\alpha_2^{-1}$ となり、全ての非適合条件の中で最小の値を取る。 $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ の場合でも、 $\eta_{max}^I < \eta_{max}^R$ である。分岐点近傍で η が μ の単調減少関数なので、非適合条件の分岐点 μ_c^I は、適合条件の分岐点 μ_c^R よりも大きく、非適合条件では発振が遅れる。図 3(a) を見るとわかるように、 $\gamma \gg 1$ の分散系においてもこの傾向が見られる。

遅延比 t_1/t_2 が無理数の場合には、さらに別の解析が必要である。そのとき発振可能なモードの角振動数の集合を $\Omega^{IR}(t_1, \alpha_1) = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots\}$ とすると、それらの η の上限は、 $\sup\{\eta(\omega_i) | \omega_i \in \Omega^{IR}(t_1, \alpha_1)\} = \eta_{max}^R$ となり、適合条件の最適モードの η に一致する。ただし、最適モードを決定することは出来ない。無理数比の問題は、非分散系特有の問題であり、分散系ではカットオフ以下の適合条件と非適合条件でモード選択が決まるので、考えなくてもよい。

$\gamma^{-1} \ll 1$ の分散系では、非分散系の解をもとにした摂動計算により最適発振モードを求めることが可能である。最初に、式 (21) の摂動計算より発振可能な角振動数の近似解を求める。次に、この近似解を用いて、式 (18) を計算して η を求める。発振可能なモードの中で η が最大となるものを最適発振モードとする。

最後に、非分散系における適合条件と非適合条件の定義とそれらからすぐに得られる定理を述べる。

[定義 2: 非分散系 ($0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$) の適合条件と非適合条件]

有理数の遅延比 $t_1/t_2 = n/m$ に対し、条件 (26) を満たす ω で、 $\omega t_1 = \pi, \omega t_2 = \pi \pmod{2\pi}$ が存在する場合を適合条件と呼ぶ。それ以外の有理数遅延比を非適合条件と呼ぶ。

[定義 3: 適合条件、非適合条件の次数]

非分散系の適合条件または非適合条件が規約分数 $t_1/t_2 = n/m$ で与えられるとき、 m を適合条件または非適合条件の次数と定義する。対応する分散系では、それらは $t_1/t_2 = n/m + \Delta t_\gamma/t_2$ で与えられるが、それらの次数を m とする。

[定理 1]

非分散系 ($0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$) の適合条件の η_{max} は $\eta_{max}^R = -(\alpha_2 + \alpha_1)^{-1}$ であり、非適合条件の η_{max} は $\eta_{max}^I < \eta_{max}^R$ となる。無理数遅延比の η の上限は、 η_{max}^R と一致する。

の反対側になる。しかし、 $f'_\mu(x_c) = -1$ なので、 $f_\mu(x(t-t_1)) - x_c$ と $f_\mu(x(t-t_2)) - x_c$ が $x(t) - x_c$ と同じ符号を持ち、式 (3) よりたがいに強め合い発振は安定する。適合条件では、このような発振が起きる。もし、 $t_1 = 2t_2/3$ だとすると、 $f_\mu(x(t-t_1)) - x_c$ と $f_\mu(x(t-t_2)) - x_c$ は反対符号になり弱め合うので発振がしにくくなり、非適合条件になる。分岐点 μ_c^N では、 $f'_\mu(x_c) = -1$ となること、固定点 x_c が式 (20) で与えられること、関数 $f(x)$ が式 (2) で与えられることより、多少の計算の後に、分岐点 μ_c^N の x_c は、

$$x_c^N = \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2\Delta x^2}}{2} \quad (35)$$

で与えられる。式 (33) より、分岐点 μ_c^N は、 α_1 に依存するが、 x_c^N は、 α_1 に依存しない。

次に、短い遅延が負の場合を考える。図 6(c), (d) は、 $t_1/t_2 = 2/3$ の場合の分岐点における関数 f_μ と $f_{\mu+}$ および発振直後の 3 次モードの波形を示したものである。(c) に示すように、分岐点において $f'_\mu(x_c) > -1$ なので、通常では周期倍分岐に対応する分岐が起きることはない。しかし、 $f'_{\mu+}(x_c) = -1$ となっている。この理由について考える。(d) を見ると、 $x(t_2) - x_c$ は $x(t) - x_c$ と逆符号であるが、 $f'_\mu(x_c) < 0$ なので、 $f_\mu(x(t-t_2)) - x_c$ は $x(t) - x_c$ と同符号になる。一方で、 $x(t_1) - x_c$ と $x(t) - x_c$ は同符号なので、 $f_\mu(x(t-t_1)) - x_c$ は $x(t) - x_c$ と逆符号となるが、 $\alpha_1 < 0$ なので、 $\alpha_1 f_\mu(x(t-t_1)) - x_c$ は同符号になる。したがって、 $\alpha_1 f_\mu(x(t-t_1)) - x_c$ と $\alpha_2 f_\mu(x(t-t_2)) - x_c$ は同符号になり、式 (3) より強め合い、 $f'_\mu(x_c) > -1$ であっても、 $f'_{\mu+}(x_c) = -1$ が満たされれば、実質的に周期倍分岐と見做せる分岐が起き、発振が始まる。この場合の分岐プロセスを **Boosted Bifurcation Process (BBP)** と名付ける [27]。分岐点 $\mu = \mu_c^B$ では $f'_{\mu+}(x_c) = -1$ となることと、式 (20) と式 (2) より、分岐点 μ_c^B での x_c は、

$$x_c^B = \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2\bar{\alpha}\Delta x^2}}{2} \quad (36)$$

となる。ここで、

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (37)$$

である。したがって、 $-\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ で $0 < \bar{\alpha} < 1$ となるので、 $x_c^B < x_c^N$ となり、 x_c が μ の単調増加関数なので、BBP の適合条件の分岐点 μ_c^B と NBP の適合条件の分岐点 μ_c^N の関係は、 $\mu_c^B < \mu_c^N$ となる。このことは、 $-\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ の領域では、BBP の分岐の方が NBP の分岐よりも早く起き、モード選択則を支配することを示唆する。

次に、 $t_1/t_2 = 1/2$ において、 $\alpha_1 = -0.9$ のときに見られた分岐現象について考察する。図 6(e), (f) は、分岐点における関数 f_μ と $f_{\mu+}$ および発振直後の 2 次モードの波形を示したものである。(e) に示すように、分岐点において $0 < f'_\mu(x_c) < 1$ で $x_c < x_0$ なので、通常、分岐が起きない領域で分岐が起きている。ただし、 $f'_{\mu+}(x_c) = +1$ なので、熊手型分岐に近い分岐が起きていることが予想される。そこで、この分岐プロセスを **Anomalous Bifurcation Process (ABP)** と名付け、このような分岐が起きる理由について考える。(f) を見ると、 $x(t) - x_c$ と $x(t-t_2) - x_c$ が同符号であるが、 $f'_\mu(x_c) > 0$ なので、 $f_\mu(x(t-t_2)) - x_c$ は、 $x(t) - x_c$ と同符号になる。一方で、 $x(t) - x_c$ と $x(t-t_1) - x_c$ は逆符号なので、 $f_\mu(x(t-t_1)) - x_c$ は、 $x(t) - x_c$ と逆符号になるが、 $\alpha_1 < 0$ なので、 $\alpha_1 f_\mu(x(t-t_1)) - x_c$ と $\alpha_2 f_\mu(x(t-t_2)) - x_c$ は同符号になり、式 (3) より強め合い、 $0 < f'_\mu(x_c) < 1$ であっても、 $f'_{\mu+}(x_c) = +1$ が満たされれば、分岐が起きて発振が始まる。この分岐の性質は、5 節の解析で明らかになる。分岐点 $\mu = \mu_c^A$ では $f'_{\mu+}(x_c) = +1$ となることと、式 (20) と式 (2) より、分岐点 μ_c^A での x_c は、

$$x_c^A = \frac{x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 2\bar{\alpha}\Delta x^2}}{2} < x_0 \quad (38)$$

となる。式 (38) が実解を持つためには、判別式が正でなければならない、その条件を書き下すと、

$$\alpha_1 < -\frac{1 - \bar{\alpha}_c}{1 + \bar{\alpha}_c} \alpha_2 \quad (39)$$

となる。ここで、

$$\bar{\alpha}_c = \frac{x_0^2}{2\Delta x^2} \quad (40)$$

である。 $x_0 = 0.2$, $\Delta x = 0.5$ なので、 $\bar{\alpha}_c = 2/25$ となり、 $\alpha_1 < -23/27 \sim -0.851851$ ならば ABP の分岐が起きる。これは、 $\alpha_1 = -0.9$ で ABP が観測されたことと辻褃が合う。ABP の分岐が起きる場合は、式 (38) の $\pm$ の符号に対応する 2 つの分岐点がある。 x_c が μ の単調増加関数なので、 $-$ 符号の分岐が最初に起き固定点が不安定化し、その後の $+$ 符号の分岐で固定点が再安定化すると考えられる。それらの分岐点を μ_c^{A-} と μ_c^{A+} とすると、 $\mu_c^{A-} < \mu_c^{A+} < \mu_c^B$ なので、2 番目の ABP の分岐が起きた後で BBP の分岐が起きる可能性がある。この点については、5 節で議論する。

ここでは詳細を示さないが、非分散系の BBP と ABP 領域においても線形安定性解析を行うことは可能である。それに基づく非分散系における BBP と ABP の適合条件と非適合条件の定義とそれに関連した定理を与える。

[定義 4: 非分散系 ($-\alpha_2 < \alpha_1 < 0$) の BBP の適合条件と非適合条件]

有理数の遅延比 $t_1/t_2 = n/m$ に対し、条件 (26) を満たす ω で、 $\omega t_1 = 0$, $\omega t_2 = \pi \pmod{2\pi}$ が存在する場合を BBP の適合条件と呼ぶ。それ以外の有理数遅延比を非適合条件と呼ぶ。

ABP の分岐は、 $f'(x_c) > 0$ で起きるので、式 (18) の不等号の向きが逆になり、 η が最小になるモードが最適発振モードになる。これより、適合条件と非適合条件の定義は以下の様になる。

[定義 5: 非分散系 ($-\alpha_2 < \alpha_1 < 0$) の ABP の適合条件と非適合条件]

有理数の遅延比 $t_1/t_2 = n/m$ に対し、条件 (26) を満たす ω で、 $\omega t_1 = \pi$, $\omega t_2 = 0 \pmod{2\pi}$ が存在する場合を ABP の適合条件と呼ぶ。それ以外の有理数遅延比を非適合条件と呼ぶ。

[定理 2]

非分散系 ($-\alpha_2 < \alpha_1 < 0$) の BBP において、適合条件の η_{max} は $\eta_{max}^R = -(\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}$ であり、非適合条件の η_{max} は $\eta_{max}^I < \eta_{max}^R$ となる。無理数遅延比の η の上限は、 η_{max}^R と一致する。

[定理 3]

非分散系 ($-\alpha_2 < \alpha_1 < 0$) の ABP において、適合条件の η_{min} は $\eta_{min}^R = (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}$ であり、非適合条件の η_{min} は $\eta_{min}^I > \eta_{min}^R$ となる。無理数遅延比の η の下限は、 η_{min}^R と一致する。

5 縮約写像を用いた非分散系の解析

ここまでの議論で、2 重遅延系 (1) の NBP 領域の分岐現象とモード選択則を理解するために、その特異摂動極限である非分散系の線形安定性解析を行い、モード選択則を理解するための鍵となる適合条件と非適合条件の意味を明確にすることができた。さらに、非分散系を用いることで α_1 が負値を取るときに現れる

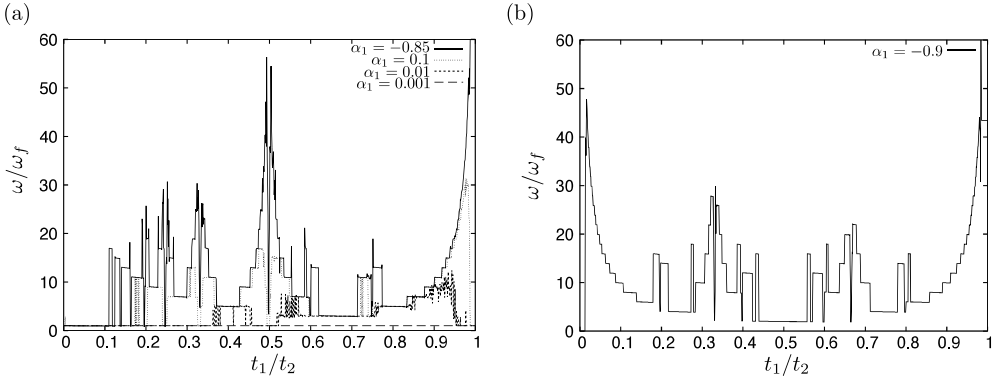


図5 負の短い遅延を持つ時の発振モードの数値計算 ($\gamma = 210$) (a) BBP: $-0.8 \leq \alpha_1 < 0$ (b) ABP: $\alpha_1 = -0.9$

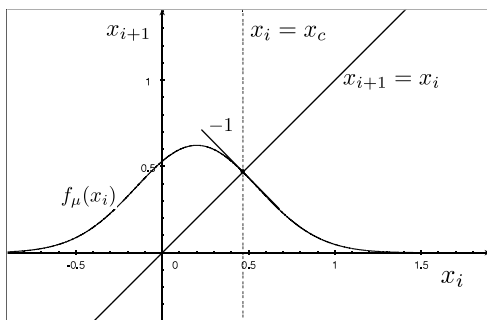
BBP や ABP の直感的な理解を深めることが出来た。したがって、非分散系の性質が明らかになれば、分散系の多くの性質は、非分散系の解析に基づいた摂動計算をすることで捉えることが可能である。ただし、この小論では摂動計算は取り扱わない。この節では、非分散系の性質をより深く知るための手法について解説する [28]。まず、有理比の遅延 $t_1/t_2 = n/m$ を持つ非分散系が、 m 次元写像に等価であることを示す。次に、 $t_1/t_m = 1/2$ の場合を例に取り、ABP と BBP が共存するときの固定点 x_c の分岐の性質を調べる。さらに、その分岐から発生するアトラクターの大域的な性質について、数値解析を交えて考察する。

最初に、これらの解析の根拠となる分散系と非分散系の関係に関する我々の仮説を述べておく。短い遅延の強度 $|\alpha_1|$ は極端に小さくなく、 γ は十分大きく、低次の非適合条件の近傍でタワー構造が観測できる条件の元で、以下の仮説を提案する [28]。

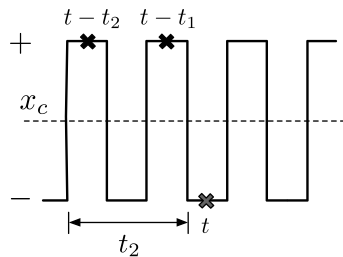
- A1: 遅延比 $t_{1R}/t_2 = n/m$ が、非分散系における適合条件を与えるとする。線形安定性解析より、減衰率が $\gamma \gg m/T_f$ の分散系において、適合条件 $t_1 = t_{1R} + \Delta t_\gamma$ のある近傍が存在し、第一分岐により周期 $T \approx T_f/m$ をもつ解が発振することが示される。数値解析によれば、この解は、角が丸まった方形波またはそれに近いものである。線形安定性解析より、特異摂動極限 $\gamma \rightarrow \infty$ において、この近傍が、点 t_{1R} に収束すると仮定できる。さらに、この近傍の解が、周期 $T = T_f/m$ を持つ方形波解に収束すると仮定する。
- A2: 遅延比 $t_{1I}/t_2 = n'/m'$ が、非分散系における非適合条件を与えるとする。線形安定性解析より、十分に大きな減衰率 γ を持つ分散系において、非適合条件 $t_1 = t_{1I} + \Delta t_\gamma$ の近傍にタワー構造が存在し、非適合条件における分岐がその近傍で最も遅いことが示される。数値計算にれば、発振する解は周期解またはほぼ周期解で、その周期は $T \gtrsim T_f/(m+1)$ である。線形安定性解析より、分散系の非適合条件の分岐点 μ_c^γ が、特異摂動極限 $\gamma \rightarrow \infty$ において、非分散系の非適合条件 ($t_1 = t_{1I}$) の分岐点 μ_c^∞ に収束すると仮定できる。さらに、解の周期が、非分散系の解の周期に収束すると仮定してもよい (may または should の意味で)。

この仮説が正しければ、非分散系の解析結果を分散系の解析に焼き直すことができる。

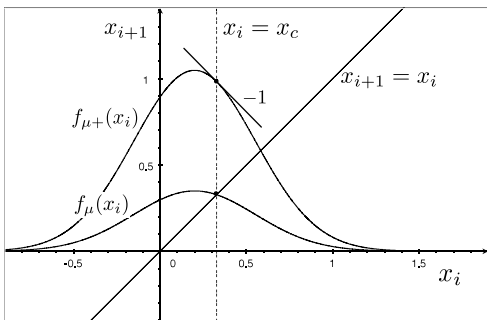
(a)



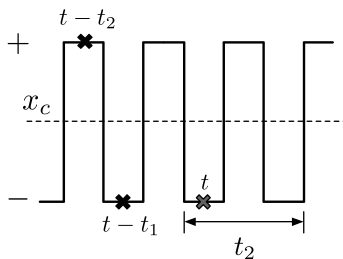
(b)



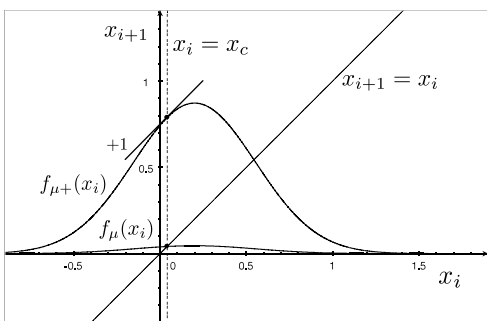
(c)



(d)



(e)



(f)

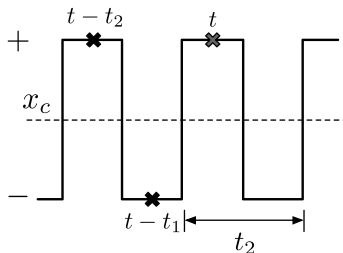


図6 非分散性の分岐点と分岐直後の波形の概念図 (a) NBP の分岐点 (b) NBP の発振波形 (c) BBP の分岐点 ($\alpha_1 = -0.5$) (d) BBP の発振波形 (e) ABP の分岐点 ($\alpha_1 = -0.9$) (f) ABP の発振波形

5.1 縮約写像:2D 縮約写像の分岐

まず、非分散系において、遅延比が有理数 n/m になる場合は、 m 次元写像と等価になることを示す [28]。任意に選んだ時刻 $t = t_0$ における解 $x(t)$ の値を $x_0 = x(t_0)$ とし、時間間隔 t_2/m ごとの解を $x_i = x(t_0 + it_2/m)$ ($i \in \mathbb{Z}$) とすると、式 (3) は、以下のような 2 対 1 の差分写像に書き直せる。

$$x_j = \mu[\alpha_1 f(x_{j-n}) + \alpha_2 f(x_{j-m})] \quad (41)$$

そこで、最初の m の要素を $\mathbf{X}_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ と書き、 m 次元ベクトルと見なせば、次のベクトル $\mathbf{X}_1 = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m-1})$ は、写像 (41) から求まる。これを i 回繰り返せば、 i 番目のベクトル $\mathbf{X}_i = (x_{mi}, x_{mi+1}, \dots, x_{mi+m-1})$ が求まる。そこで、2 対 1 写像 (41) を以下のような m 次元写像

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{i-1}) \quad (42)$$

に書き直す。ここで、 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ は、写像 (41) から求まる m 次元関数である。この写像を**縮約写像**と呼ぶ [28]。

遅延比が $t_1/t_2 = 1/2$ の場合は、2 対 1 写像 (41) は、

$$x_{j+1} = \mu\alpha_1 f(x_j) + \mu\alpha_2 f(x_{j-1}) \quad (43)$$

となる。そこで、変数 (y, z) を導入し、 $y_i = x_{2i}$ 、 $z_i = x_{2i+1}$ とおくと、2 対 1 写像 (43) は、以下の 2 次元写像になる。

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \mu\alpha_1 f(z_i) + \mu\alpha_2 f(y_i) \\ z_{i+1} &= \mu\alpha_1 f(y_{i+1}) + \mu\alpha_2 f(z_i) \\ &= \mu\alpha_1 f(\mu\alpha_1 f(z_i) + \mu\alpha_2 f(y_i)) + \mu\alpha_2 f(z_i) \end{aligned} \quad (44)$$

この写像の固定点を (y_c, z_c) とすると、以下の式を満たす。

$$\begin{aligned} y_c &= \mu\alpha_1 f(z_c) + \mu\alpha_2 f(y_c) \\ z_c &= \mu\alpha_1 f(y_c) + \mu\alpha_2 f(z_c) \end{aligned} \quad (45)$$

非分散系 (3) の固定点 x_c は、2 対 1 写像 (43) の固定点でもあるので、2 次元写像 (45) の固定点 $\mathbf{x}_c = (x_c, x_c)$ となる。一方、 $y_c \neq z_c$ という固定点 (y_c, z_c) が存在する可能性もある。この場合、簡単な考察により、 (z_c, y_c) も固定点となる。これを、元の 2 対 1 写像 (43) に焼き直すと 2 周期解になるので、非分散系における振動解を与える。

以下では、固定点 $\mathbf{x}_c$ の分岐に着目する。線形安定性解析を行うために、2 次元写像 (44) の固定点 $\mathbf{x}_c$ の周りの線形近似を行うと

$$\begin{aligned} \delta y_{i+1} &= \mu f'(x_c)(\alpha_1 \delta z_i + \alpha_2 \delta y_i) \\ \delta z_{i+1} &= \mu f'(x_c)(\alpha_1 \delta y_{i+1} + \alpha_2 \delta z_i) \\ &= \mu f'(x_c)(\mu f'(x_c)\alpha_1 \alpha_2 \delta y_i + (\mu f'(x_c)\alpha_1^2 + \alpha_2)\delta z_i) \end{aligned} \quad (46)$$

となる。固定点 $\mathbf{x}_c$ の安定性を調べるには、線形化行列

$$A = \mu f'(x_c) \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ \mu f'(x_c)\alpha_1 \alpha_2 & \mu f'(x_c)\alpha_1^2 + \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

の固有値 λ を求めればよい。そこで、 $\lambda' = \lambda/\mu f'(x_c)$ とおけば、特性方程式は、

$$\lambda'^2 - (\mu f'(x_c)\alpha_1^2 + 2\alpha_2)\lambda' + \alpha_2^2 = 0 \quad (48)$$

となり、 λ' は以下のように与えられる。

$$\lambda' = \frac{1}{2} \left[\mu f'(x_c)\alpha_1^2 + 2\alpha_2 \pm \sqrt{(\mu f'(x_c)\alpha_1^2 + 2\alpha_2)^2 - 4\alpha_2^2} \right] \quad (49)$$

したがって、 λ' すなわち λ が実数になるためには、以下の判別式を満たさなければならない。

$$\mu^2 f'(x_c)^2 \alpha_1^4 + 4\alpha_2 \alpha_1^2 \mu f'(x_c) \geq 0 \quad (50)$$

これより、 $f'(x_c) \geq 0$ または $\mu f'(x_c) \leq -4\alpha_2/\alpha_1^2$ ならば実解を持つ。

そこで、 λ が実数値を取る分岐が起きる場合、すなわち、 $\lambda = +1$ 、 $\lambda = -1$ について考える。まず、詳細な考察により、 $f'(x_c) \geq 0$ では $\lambda = -1$ の分岐は起きないこと、 $\mu f'(x_c) \leq -4\alpha_2/\alpha_1^2$ ではどちらの分岐も起きないことが示される [28]。そこで、 $\lambda = +1$ の分岐が起きる条件を書き下すと

$$\bar{\eta} = \mu f'(x_c) = \frac{1}{\alpha_2 \mp \alpha_1} \quad (51)$$

となる。負符号 $-$ の場合は、ABP の分岐条件 $f'_{\mu+}(x_c) = +1$ と一致する。一方、正符号 $+$ の場合は、 $f'_{\mu}(x_c) = +1$ となる。 $\alpha_1 < 0$ の場合は、 $f'(x_c)$ が μ と共に増加するならば、分岐が起きる順番は、 $f'_{\mu+}(x_c) = +1$ の分岐 $\rightarrow f'_{\mu}(x_c) = +1$ の分岐となる。詳しい解析を行うと、我々のモデルは、条件 (39) を満たす場合に、 $f'_{\mu+}(x_c) = +1$ の分岐が起きる [27]。これは、4 節で与えた直感的な方法による ABP の適合条件の結果と一致する。一方、 $\alpha_1 > 0$ の場合は、順番が逆になり $f'_{\mu}(x_c) = +1$ の分岐が最初に起きることになる。しかし、 μ の関数として見ると $f'(x_c)$ は最初増加するが途中から減少に転じるために、常に $f'_{\mu}(x_c) < 1$ となり、 $f'_{\mu}(x_c) = +1$ の分岐は起きない。

次に、 $\text{Im}\lambda \neq 0$ で、分岐点で $\lambda\lambda^* = 1$ となる分岐 (Hopf 分岐の写像版または Neimark-Sacker 分岐) を考える。式 (49) より、分岐条件は

$$\lambda\lambda^* = \mu^2 f'(x_c)^2 \alpha_2^2 = 1 \quad (52)$$

となる。 $\text{Im}\lambda \neq 0$ の場合は、 $f'(x_c) < 0$ なので、

$$\mu f'(x_c)\alpha_2 = -1 \quad (53)$$

となる。これを、(49) に代入すると、分岐点での λ は、

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu f'(x_c)\lambda' \\ &= \frac{1}{2} \left[\alpha_1^2/\alpha_2^2 - 2 \mp \sqrt{(\alpha_1^2/\alpha_2^2 - 2)^2 - 4} \right] \end{aligned} \quad (54)$$

となる。したがって、 $f'(x_c) < 0$ の領域でおきる NBP と BBP の分岐は Hopf 分岐になる。特に、NBP の分岐で $\alpha_1/\alpha_2 = 1$ の場合は、

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{-3} \right) \quad (55)$$

となり、 $\lambda^3 = 1$ となるので、3 周期点を作り出す。数値計算を行うと、 $\alpha_1/\alpha_2 = 1$ の場合は subcritical 分岐である [28]。

$t_1/t_2 = 1/3$ 、 $t_1/t_2 = 2/3$ についても同様な解析が可能である [28]。これらの 3 次元縮約写像では、 $\lambda = +1$ の分岐は禁止される。したがって、可能性がある分岐は、周期倍分岐 ($\lambda = -1$) と Hopf 分岐である。どちらの写像も、ABP の非適合条件なので、ABP の分岐が起きるとすれば、Hopf 分岐になる。まず、 $t_1/t_2 = 1/3$ に対応する 3 次元写像で $\alpha_1 > 0$ の場合は、NBP の適合条件になるが、この場合は、 $\mu f'(x_c) < 0$ の領域で、周期倍分岐が最初に起きる。一方、 $\alpha_1 < 0$ の場合は、BBP の非適合条件なので、 $\mu f'(x_c) < 0$ の領域で、Hopf 分岐が最初に起きる。次に、 $t_1/t_2 = 2/3$ に対応する 3 次元写像で $\alpha_1 > 0$ の場合は、NBP の非適合条件なので、 $\mu f'(x_c) < 0$ の領域で、Hopf 分岐が最初に起きる。一方、 $\alpha_1 < 0$ の場合は、BBP の適合条件なので、 $\mu f'(x_c) < 0$ の領域で、周期倍分岐が最初に起きる。

2 次元 3 次元の縮約写像の結果をまとめると以下の定理になる。

[定理 4] 2 次元および 3 次元縮約写像において、NBP および BBP の適合条件ならば、固定点 x_c の第一分岐は、周期倍分岐 ($\lambda = -1$) となり、ABP の適合条件ならば、熊手型分岐 ($\lambda = +1$) となる。一方、非適合条件では、いずれの場合も Hopf 分岐 ($\lambda\lambda^* = 1$, $\text{Im}\lambda \neq 0$) となる。

注意: 3 次元縮約写像においては、一部数値的な評価を根拠にしている。また、周期倍分岐以外の分岐は必ずしも supercritical ではなく subcritical の場合もある。

有理数の遅延比 $t_1/t_2 = n/m$ をもつ非分散系 ($m \leq 10$) の数値解析の結果より次の予想を与える。

[予想 1] 任意の m 次元縮約写像において、固定点 x_c の第一分岐は、NBP および BBP の適合条件では、周期倍分岐 ($\lambda = -1$) となり、ABP の適合条件では、熊手型分岐 ($\lambda = +1$) となる。一方、非適合条件では、いずれの場合も Hopf 分岐 ($\lambda\lambda^* = 1$, $\text{Im}\lambda \neq 0$) となる。

5.2 分岐構造とアトラクター

ここでは、ABP が起きる時の縮約写像の分岐パラメーター μ を変化させたときの分岐の全体構造 (分岐構造) とそれによって発生するアトラクターの構造について議論する [28]。図 7 (a) は、 $t_1/t_2 = 1/2$ 、 $\alpha_1 = -0.9$ のときの 2 対 1 写像 (43) の分岐図である。ABP の領域では、 μ を増加させると、2 次元縮約写像の固定点は熊手型分岐を起こすが、対応する 2 対 1 写像では、この分岐により 2 周期解が発生する。次に、2 次元縮約写像の熊手型分岐で発生した双子の固定点は、それぞれ周期倍分岐を起こし、双子の 2 周期解を作り出す。これを、2 対 1 写像で見ると 4 周期解になる。その後、縮約写像は、数回の分岐の後にカオス状態になり、さらに、3 周期解になる。この 3 周期解は、2 対 1 写像でも 3 周期解である。これとは別に、灰色で描いた小さなアトラクターが存在する。 $\mu \sim 1.6$ 近傍で、固定点 x_c が subcritical 熊手型分岐で再安定化する [28]。この分岐は ABP である。さらに、固定点 x_c は、 $\mu \sim 2.5$ で Hopf 分岐を起こすが、これは BBP の分岐である。その後分岐を繰り返し、subcritical 的な分岐により小さなアトラクターは消滅する。

同様の分岐構造が、 $t_1/t_2 = 1/3$ 、 $t_1/t_2 = 2/3$ の 2 対 1 写像でも観測される。ただし、最初の ABP 領域の固定点 x_c の分岐は、非適合条件なので Hopf 分岐となる。また、固定点 x_c が再安定化する時の分岐は supercritical である [28]。すなわち、まず、subcritical 的な分岐で小さな振動解が現れ、それが supercritical Hopf 分岐により安定固定点 x_c に分岐する。その後の BBP 領域での固定点 x_c の分岐は、適合条件となる

$t_1/t_2 = 2/3$ では周期倍分岐であるが、非適合条件となる $t_1/t_2 = 1/3$ では Hopf 分岐になる。数値解析より、大きなアトラクターと小さなアトラクターが共存するという大まかな構造は、上の 3 つの写像で共通である。

図 8 に、ABP と BBP が共存するときの 2 次元および 3 次元縮約写像の固定点 x_c の分岐をまとめたものを示す [28]。共通しているのは、ABP の 2 回の分岐の後に BBP の分岐が起きることである。ABP 領域で、 x_c の固定点が不安定化した後に再安定化するの、 $\mu f'(x_c)$ が最初増加するが、その後減少する為である。その時、適合条件では、 $\max_{\mu} f'_{\mu+}(x_c) > 1$ となれば、ABP の分岐が起き、増大のあと減少するので、2 回分岐が起きる。非適合条件であっても、 $\max_{\mu} f'_{\mu+}(x_c)$ が 1 よりある程度大きければ ABP の分岐が可能となる。2 対 1 写像 (41) の数値解析より、有理数の遅延比 ($t_1/t_2 = n/m$) で、 $m \leq 10$ では、同様の分岐構造と 2 つのアトラクターの存在が確認される。そこで、以下のような予想を与える。

[(観測事項からの) 予想 2]

縮約写像では、NBP、BBP、ABP の各領域で、それらの特徴づける固定点の分岐構造を持ち、 α_1 を固定すれば、分岐構造は、遅延比 t_1/t_2 を変えても基本的に同じである。また、それらが生み出すアトラクターの大域的な構造は、遅延比 t_1/t_2 によらずほぼ同じである。

ただし、**大域的な構造**という言葉を使うときは、曖昧な表現ではあるが、パラメーター μ の変化に伴う固定点等の分岐の仕方、それによって生まれる固定点以外のアトラクターの種類や数等のおおまかな傾向を表すものとする。

図 7(b) は、分散系 ($t_1/t_2 = 1/2 + \Delta t_{\gamma}/t_2$, $\alpha_1 = -0.9$, $\gamma = 210$) において μ をゆっくりと変化させたとき ($|d\mu/dt| = 4.2 \times 10^{-5}$) の波形を μ の関数として描いたものである。波形が密なので、ベタ塗りのようにになっているが、挿入図のように、拡大すると発振状態の波形を見ることができる。最初に、2 次元縮約写像の熊手型分岐に対応する Hopf 分岐が起き、挿入図のように周期 $T_f/2$ の方形波が発振する。これは、非分散系の 2 対 1 写像で見られる 2 周期解に対応する。次に、この方形波は周期倍分岐を起こし周期 T_f の振動を作り出すが、これは 2 対 1 写像の 4 周期解に対応する。その後は厳密な対応はなくなるが、数回の分岐の後カオス解が出現する。非分散系と同様に、カオス解はさらに周期 $3T_f/4$ の解 (3 周期解) に分岐する。これとは別に、灰色で示す小さなアトラクターが出現する。まず、 $\mu \sim 1.5$ 近傍で、固定点 x_c が ABP の subcritical Hopf 分岐により再安定化する。固定点 x_c は、 $\mu \sim 2.5$ 付近で BBP の Hopf 分岐を起こし、発振が始まる。その後分岐を繰り返し、最後に subcritical 的な分岐により小さなアトラクターは消滅する。したがって、固定点 x_c の分岐構造とそれに伴い発生する 2 つのアトラクターの振る舞いは、非分散系と極めて近いものと言える。

分散系において、 $t_1/t_2 = 1/3 + \Delta t_{\gamma}/t_2$ と $t_1/t_2 = 2/3 + \Delta t_{\gamma}/t_2$ とした場合も、固定点 x_c は、図 8 に示す非分散系の分岐に対応した分岐構造を持ち、それに伴い発生する 2 つのアトラクターの性質も非分散系と極めて近いものになる [28]。さらに、遅延比 t_1/t_2 のほぼ全ての領域 ($t_1/t_2 = 0$ と $t_1/t_2 = 1$ の小さな近傍を除く) で、小さなアトラクターを作り出すのに必要な、ABP による固定点 x_c の再安定化とその後の BBP の Hopf 分岐が観測される。このとき、再安定化の直前の解の振動周期は、ABP のモード選択則に従い、その後の BBP の Hopf 分岐で現れる振動解は BBP のモード選択則に従う [28]。したがって、ほぼ全ての遅延比 t_1/t_2 で、2 つのアトラクターの構造が見られると考えて良い。この事実を踏まえ、以下の予想を与える。

[(観測事項からの) 予想 3]

γ が十分大きな分散系では、遅延比 t_1/t_2 の大部分の領域で、NBP, BBP, ABP のそれぞれにおける固定点の分岐構造は対応する非分散系と基本的に同じであり、アトラクターの大域的な構造も類似なものとなる。

ばよい。ただし、特異摂動なので、近似計算は漸近展開になり、高次の近似を行うと発散すると考えられる。

非分散系の適合状態と非適合状態は、有理数の遅延比 $t_1/t_2 = n/m$ を持つので、 m 次元の縮約写像と等価である。2次元と3次元の縮約写像の固定点の線形安定性解析から以下のことがわかる [28]。まず、ABP の適合状態では、分岐点の固有値は $\lambda = +1$ で熊手型分岐になる。ただし、固定点 x_c の再安定化では subcritical 分岐である。また、NBP と BBP の適合条件では、 $\lambda = -1$ で周期倍分岐となる。非適合条件では、いずれの場合も Hopf 分岐の写像版 (Neimark-Sacker 分岐) になり、subcritical 分岐になることもある。このように、縮約写像を用いると、適合条件と非適合条件の分岐の違いを明確にできる。数値計算から、適合条件と非適合条件の分岐の性質は、全ての有理数比の縮約写像で共通であると予測される。さらに、これに対応した分岐が分散系の適合条件と非適合条件で起きると予想される。

縮約写像を用いると、パラメーター μ を変化させたときの固定点 x_c の分岐の全体構造 (分岐構造) を見ることができる。さらに、固定点 x_c の分岐により現れるアトラクターの大域的な構造も見ることができる。特に、ABP と BBP が共存する領域では、大小2つのアトラクターが共存する。このような、分岐構造とアトラクターの大域的な構造は、有理数の遅延比 ($t_1/t_2 = n/m$) の非分散系で共通であると予想される。さらに、分散系においてもほぼ同様の固定点 x_c の分岐構造とアトラクターの大域的な構造が、遅延比 t_1/t_2 の大部分の領域で見られる [28]。

これらの議論より、 α_1 を固定すると、NBP、BBP、ABP のどの分岐プロセスが分岐パラメーター μ のどの領域で支配的になるかが決まる。そして、各分岐プロセスごとに、適合条件と非適合条件が遅延比 t_1/t_2 の関数として決まり、発振モードは、 t_1/t_2 の複雑な関数として定義される。一方、固定点 x_c の分岐の全体構造やそれによって生じるアトラクターの大域的な構造は、遅延比 t_1/t_2 によらずほぼ同じである。ただし、固定点の分岐構造とアトラクターの大域的な構造は、埋め込み写像 $f(x)$ に依存する。たとえば、logistic 写像では、2つの固定点 x_c と $x_o = 0$ があり交替分岐を起こすために、ABP 領域でのアトラクターの消失が起きる [29]。簡単に説明すると、交替分岐点 μ_t で $f_\mu(x_c) = f_\mu(x_o) = +1$ となるので、 $\alpha_1 < 0$ の ABP 領域では、 $\mu = \mu_o < \mu_t$ で $f_{\mu+}(x_o) = +1$ 、 $\mu = \mu_c > \mu_t$ で $f_{\mu+}(x_c) = +1$ となり、これらの ABP の分岐はともに subcritical 分岐なので、2つの固定点 x_c と x_o は、領域 (μ_o, μ_c) でともに不安定になり、アトラクターは消滅する。ただし、NBP と BBP の領域で見られる分岐構造とアトラクターの性質はこの小論のモデルと類似したものになる。非分散系の ABP 領域のアトラクター消失は、 $\alpha_1 < 0$ であれば、全ての有理数の遅延比 t_1/t_2 で起きると予測され、分散系であっても、 $\alpha_1 = 0$ の近傍を除けば、遅延比 t_1/t_2 の大部分の領域で観測される。

このように、固定点の分岐の全体構造やアトラクターの大域的な構造は、埋め込まれた写像 $f(x)$ に依存して決まる。そして、 α_1 を固定した場合には、アトラクターの大域的な構造は、ほぼ遅延比 t_1/t_2 に依存しないと考えられる。ただし、発振モードは、 α_1 によって決まるモード選択則により、 t_1/t_2 の複雑な関数となる。すなわち、2重遅延系には、モード選択則が作り出す発振モードの多様性と分岐構造やアトラクターの大域的な構造の一様性の2つの側面がある。モード選択則のより深い理解、特にタワー構造の理解のためには、初等整数論を用いた解析が重要になると考えられる [13, 16]。また、分岐構造やアトラクターの大域的な構造の理解のためには、これらを明確に捉えることが可能な解析手法の開発が重要な課題と考えられる。さらに、3重遅延以上の多重遅延系のモード選択則や分岐構造等の問題も興味深い [26]。

謝辞

本研究は、JPSJ 科研費 JP19K03655 の助成を受けたものである。また、学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点（JHPCN）、および、革新的ハイパフォーマンス・コンピューティング・インフラ（HPCI）の支援による（課題番号: jh220001）。

参考文献

- [1] N. D. Hayes, J. Lond. Math. Soc. **25**, 226 (1950).
- [2] R. Bellman and K. Cooke, *Differential-Difference Equations* (Academic Press, New York, 1963).
- [3] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 1993).
- [4] M. C. Mackey and L. Glass, Science **197**, 287 (1977).
- [5] K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. **45**, 709 (1980).
- [6] G. Stepan, *Retarded dynamical systems: Stability and characteristic functions* (Wiley & Sons, New York, 1989).
- [7] L. Dugard and E. I. Verriest (eds.), *Stability and Control of Time-Delay Systems* (Springer-Verlag, London, 1998).
- [8] J.-P. Richard, Automatica **39**, 1667 (2003).
- [9] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems* (Birkhäuser, Boston, 2003).
- [10] R. T. Schumacher, Acustica **48**, 71 (1981).
- [11] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, and J. Woodhouse, J. Acoust. Soc. Am. **74**, 1325 (1983).
- [12] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments* (Springer-Verlag, New York, 1998) 2nd ed.
- [13] K. Ikeda and M. Mizuno, Phys. Rev. Lett. **53**, 1340 (1984); M. Mizuno and K. Ikeda, Physica D **36**, 327 (1989).
- [14] H. J. Zhang and J. H. Dai, Opt. Lett. **11**, 245 (1986); H. J. Zhang, J. H. Dai, T. Y. Wang, F. L. Zhang, G. Xu, and S. P. Yang, in *Directions in Chaos*, ed. H. Bai-Lin (World Scientific, Singapore, 1988) Vol. 2, p. 47.
- [15] C. Marriott, R. Vallée, and C. Delisle, Phys. Rev. A **40**, 3420 (1989).
- [16] C. Grotta-Ragazzo and C. P. Malta, J. Dyn. Differ. Equat. **4**, 617 (1992).
- [17] J. K. Hale and W. Huang, J. Math. Anal. Appl. **178**, 344 (1993).
- [18] J. Bélair and S. A. Campbell, SIAM J. Appl. Math. **54**, 1402 (1994).
- [19] A. Hohl, A. Gavrielides, T. Erneux, and V. Kovanis, Phys. Rev. A **59**, 3941 (1999).
- [20] X. Li, S. Ruan, and J. Wei, J. Math. Anal. Appl. **236**, 254 (1999).
- [21] S. Ruan and J. Wei, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems A: Math. Anal. **10**, 863 (2003).
- [22] J. C. Bastos de Figueiredo, L. Diambra, L. Glass, and C. P. Malta, Phys. Rev. E **65**, 051905 (2002).
- [23] H.-J. Wünsche, S. Bauer, J. Kreissl, O. Ushakov, N. Kornev, F. Henneberger, E. Wille, H. Erzgraber, M. Peil, W. Elsässer, and I. Fischer, Phys. Rev. Lett. **94**, 163901 (2005).

- [24] X. F. Liao, *Chaos Solitons & Fractals* **23**, 857 (2005).
- [25] K. Takahashi, K. Goya, and S. Goya, *J. Phys. Soc. Jpn.* **83**, 124003 (2014).
- [26] K. Takahashi and T. Kobayashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **86**, 124005 (2017).
- [27] K. Takahashi and T. Kobayashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **87**, 044001 (2018).
- [28] K. Takahashi and T. Kobayashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **88**, 024002 (2019).
- [29] K. Takahashi and T. Kobayashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **91**, 024002 (2022).
- [30] T. Idogawa, T. Kobata, K. Komuro, and M. Iwaki, *J.Acoust.Soc.Am.* **98**, 540 (1993); T. Kobata and T. Idogawa, *J.Acoust.Soc.Jpn(E)*. **14**, 6 (1993).
- [31] T. Tachibana and K. Takahashi, *Prog. Theor.Phys.* **104**, 265 (2000).
- [32] K. Takahashi, H. Kodama, A. Nakajima, and T. Tachibana, *Acta Acustica united with Acustica* **95**, 1123 (2009).