

Mutation and Self #-equivalences of Links

大阪工大 渋谷哲夫 (Tetsuo Shibuya)

R^3 の oriented link l の間のつぎのような変形を $\#(I)$, $\#(II)$ -move という。特にこの変形を l の 1 つの component に行うとき、この変形をそれぞれ self $\#(I)$, self $\#(II)$ -move という。

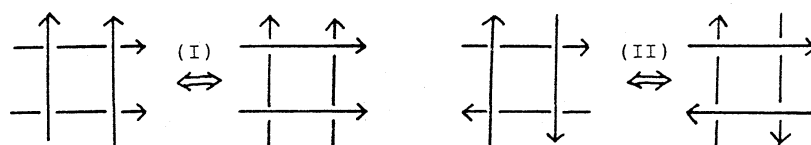


Fig. 1.

R^3 の 2 つの links l, l' が self #-equivalent (I) (or (II)) とは、 l が有限回の self $\#(I)$ (or (II))-moves で l' に変形できるときをいう。

1 回の $\#(I)$, $\#(II)$ -move はそれぞれ Fig. 2 (1), (2) の links を適当に fusion して得られ、これらの Arf

invariant はそれぞれ 1, 0 だから, つぎの Proposition を得る。

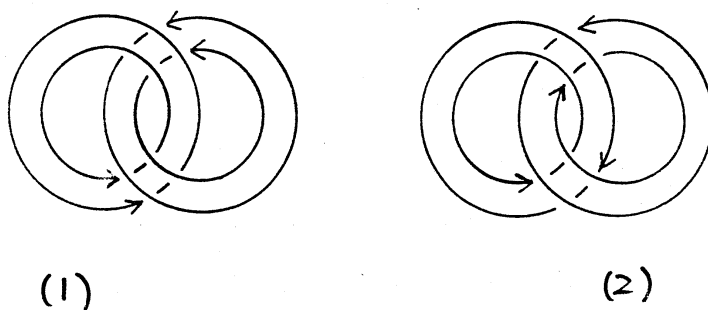


Fig. 2

Proposition ([2]). R^3 の 2 つの n -component proper links $l = k_1 \cup \dots \cup k_n$, $l' = k'_1 \cup \dots \cup k'_n$ に対し.

$$(1) \quad l \text{ と } l' \text{ が self \#-eq. (I)} \Rightarrow \bar{\varphi}(l) = \bar{\varphi}(l'),$$

$$(2) \quad l \text{ と } l' \text{ が self \#-eq. (II)}$$

$$\Rightarrow \varphi(l) = \varphi(l'), \quad \varphi(k_i) = \varphi(k'_i), \quad i=1, \dots, n,$$

$$\text{ここで } \varphi(\cdot) \text{ は Arf invariant で } \bar{\varphi}(l) \equiv \varphi(l)$$

$$= \sum_{i=1}^n \varphi(k_i) \pmod{2}.$$

この Proposition の逆は一般には成立しない。たとえば, Fig. 3 の link l は $\bar{\varphi}(l) = 0$ であるが Milnor により l は link homotopic to a trivial link でないことが知られている, [1]。(もちろん, self \#-eq. は link homotopy を含む。)

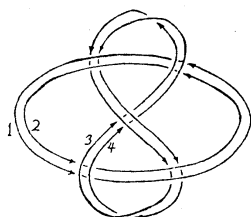


Fig. 3

しかし, 2-component link に関しては, Proposition の逆が成立することが知られる。

Theorem 1 ([3]). $l = k_1 \cup k_2$, $l' = k'_1 \cup k'_2$ を2つの 2-component links で $\text{Link}(k_1, k_2) = \text{Link}(k'_1, k'_2) (= \Gamma)$ とする。

(1) Γ が even のとき (すなわち l, l' が proper)。

(i) l と l' が self #-eq.(I) $\Leftrightarrow \bar{\varphi}(l) = \bar{\varphi}(l')$ 。

(ii) l と l' が self #-eq.(II)

$$\Leftrightarrow \varphi(l) = \varphi(l'), \varphi(k_i) = \varphi(k'_i), i=1, 2.$$

(2) Γ が odd のとき (すなわち l と l' が proper でない)。

(i) l と l' が self #-eq.(I)。

(ii) l と l' が self #-eq.(II) $\Leftrightarrow \varphi(k_i) = \varphi(k'_i), i=1, 2.$

証明は [3] に譲りますが, この定理の証明は任意の 2-component link はつぎの link のいずれかに self

#-equivalent になることを示すという方針です。

Remark. ℓ, r を Theorem 1 のものとする。

(1) $r=0 \Rightarrow \ell$ は trivial link ($\bar{\varphi}(\ell)=0$) 又は Whitehead link ($\bar{\varphi}(\ell)=1$) に self #-eq.(I)。

(2) $r(\neq 0)$ が even

$\Rightarrow \ell$ は $\mathcal{L}_0$ 又は $\mathcal{L}_1$ に self #-eq.(I)。

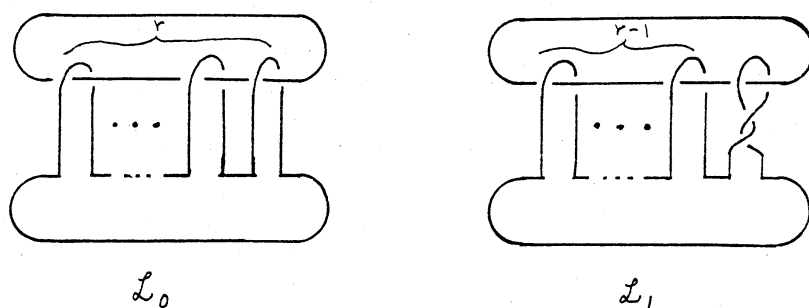


Fig 4

(3) r が odd $\Rightarrow \ell$ は $\mathcal{L}_0$ に self #-eq.(I)。

$r(\neq 0)$ が even の場合は $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ の一方が $\bar{\varphi}(\)=0$ で他方が $\bar{\varphi}(\)=1$ になる。 r が odd のときは、 $\mathcal{L}_0$ と $\mathcal{L}_1$ は self #-eq.(II) (したがって self #-eq.(I)) であることが証明できる。

Theorem 1 の応用として link の mutation に関してつぎの結果を得る。

Theorem 2 ([3]). 2つの n -component links $l = k_1 \cup \dots \cup k_n$, $l' = k'_1 \cup \dots \cup k'_n$ について, l' が l の mutant とする。

(1) l と l' は self #-eq. (I)。

(2) l と l' は self #-eq. (II)

$$\Leftrightarrow \varphi(k_i) = \varphi(k'_i), \quad i=1, \dots, n.$$

(3) l' が l の self mutant ならば, l と l' は self #-eq. (II)。ここで self mutant とは, 180° 回転する 3-ball の中の 2 つの arcs が link の 1 つの component に含まれている場合をいう。

References

- [1] J. W. Milnor: Link groups, Ann. of Math. 50 (1954), 177-195.
- [2] T. Shibuya: Self #-unknotting operations of links, Memo. of Osaka Insti. Tech., 34 (1989), 9-17.
- [3] T. Shibuya: Mutation and self #-equivalences of links, Kobe J. Math., to appear.