

強制自励系における同期化現象の一考察

京大・工 倉光 正己 (Masami KURAMITSU)

1. まえがき

van der Pol 発振器に周期的外力を加えた系

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = B \cos \nu t \quad (0 < \mu \ll 1) \quad (1)$$

において、自励振動周波数 1 と外力周波数 ν の関係によって、基本調波同期、 $\nu=3$ 高調波同期および $1/3$ 分数調波同期等の同期化現象（周波数引込み現象）が生じることは良く知られている。これらの現象に関しては、同期振動の振幅特性、同期領域等が詳しく調べられており、⁽¹⁾それ以上付け加えることは何も無いように思われる。しかし、敢えて言えば、例えば、なぜ ν が 3 あるいは $1/3$ の場合にのみ同期が生じるのか、また、これら 2 つの同期現象の間にはどのような関係があるのか、といった素人的な、しかし、ある意味で根本的な疑問に対しては、説得力のある説明は十分にはなされていないように思われる。

等者は、先に、多自由度発振器の新しい解析法として、平均ポテンシャル法を提案した。^{(2),(3)}平均ポテンシャルは系内の

全損失分に相当する量で、その値が時間の経過と共に減少するという性質をもつ。さらに、この性質を用いて、非線形抵抗素子（電圧制御型）は、そこで生じる損失分を極小とするために最も望ましい電圧値（停留電圧）をもつこと、従って、その比が簡単な整数比となるような、いくつかの周波数成分が抵抗素子に印加されると、素子はそれらの成分をうまく利用して、停留電圧付近になるべく長時間留まるような電圧波形（方形波近似波）を形成することを示した。⁽⁴⁾ この見方立てば、自励振動系における同期現象は、系に生じる損失分をより小さくするために方形波近似波を作ろうとする、一種の波形整形作用であるといえることができる。

本報告では、平均ポテンシャルの概念を強制自励系に拡張することにより、強制自励系における同期化現象を、自励振動系における同期化現象の結果を用いて説明することを試みる。

2. 平均ポテンシャルの強制自励系への拡張⁽⁷⁾

本節では、自励系に対して定義した平均ポテンシャル⁽²⁾が強制自励系に拡張できることを簡単に述べる。

Brayton と Moser は、2 端子素子（ K 個のインダクタ、 J 個のキャパシタ、いくつかの抵抗素子）から成る完全な LCR

回路を記述する微分方程式が、混合ポテンシャル (Mixed Potential) と名づけられたスカラー関数 $P(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V})$ を用いて、形式的に次式で与えられることを示した。^{(5), (6), (2)}

$$\begin{aligned} L_k \frac{di_k}{dt} &= \frac{\partial P(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V})}{\partial i_k} & (k=1, \dots, K) \\ C_j \frac{dv_j}{dt} &= -\frac{\partial P(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V})}{\partial v_j} & (j=1, \dots, J) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{i}_1, \dots, \dot{i}_K), \quad \mathbf{V} = (v_1, \dots, v_J)$$

ここに、 i_k, v_j はそれぞれインダクタ L_k を流れる電流およびキャパシタ C_j の端子電圧である。

混合ポテンシャル P は次式で与えられる。

$$P(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V}) = -F(\dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{V}) + H(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V}) \quad (3)$$

ここに $F(\dot{\mathbf{q}}), G(\mathbf{V})$ は回路の抵抗素子により決まる量で、電流ポテンシャル、電圧ポテンシャルと呼ばれる。 $H(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V})$ は回路のインダクタとキャパシタの結合状態で決まる量で、ループポテンシャルと呼ばれる。

(2), (3) 式の系において、 F および G が小さい弱非線形の場合、(2) 式の解 $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{V}$ は固有周波数をもつ正弦波の和の形に仮定できる。この解を(2)式に代入し平均化法を適用すると次式を得る、

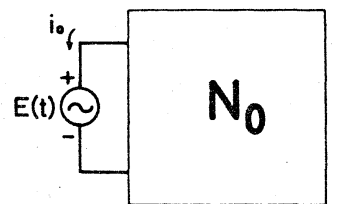
$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial U}{\partial r_l} & (l=1, \dots, M; M: \text{自由度}) \\ r_l^2 (\dot{\theta} + \omega_l - n_l) &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial U}{\partial \theta_l} & (I_l; \text{const}, \cdot = \frac{d}{dt}) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし r, θ は解の振幅, 位相, n_l は固有周波数, ω_l は系に実際に生じる周波数である。また, $\bar{U}$ は次式で定義し, 平均ポテンシャルと呼ぶが, 系全体の損失分の時間平均を表す。

$$\bar{U}(r, \theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [F(r, \theta, t) + G(r, \theta, t)] dt \quad (5)$$

系の固有周波数 n_l の比が簡単な整数に近くない非共振の場合, あるいは, 簡単な整数比に一致する完全な共振の場合, $\omega_l = n_l$ と考えられる。このとき(4)式は勾配系となるから, 解に沿って $\dot{U} \leq 0$ となり, 安定な平衡点は平均ポテンシャル(系全体の損失分の時間平均)の極小点に対応するといふ, 物理的意味の明確な結果を得る。また, 計算法としても簡単となる。

さて, このような方法を, 電源が付加された回路網に拡張することを考える。簡単のため, 図1のような, 自励系 N_0 に電圧源が唯一個だけ付加された系を考える。(電流源を外力とする場合や, 複数の外力が加わった場合にも同様に定式化できる。) 電圧源は一種の電流制御型抵抗と考えることができるから, 電圧源の電流ポテンシャルを(3)式の F に加えてやれば, 回路方程式はやはり(2)式で表現できる。(2)式に平均化法を適用する際, 外力 E の取扱いは, 周知のように, 次のように共振の有無により分けて考えなければならない。



(I) 系の抵抗素子を取去った生成系の図

図1. 強制外力をもつ自励系

有周波数と外力周波数とが十分離れ、主共振が生じないとき外力は生成系に残して考える。

(II) 固有周波数と外力周波数が一致し(I)の解が発散する主共振の場合には、外力は微小量と考え、生成系から除去する。

以上のことを考慮して(2)式に平均化法を適用すると、自励系の場合と同様、(4)、(5)式を得る。すなわち、強制自励系においても、安定な定常状態を求める問題は、(5)式の平均ポテンシャルを構成し、その極小点を求めることに帰着する。

3. 多数の共振回路と1個の能動素子で構成された発振器の強制振動

筆者等は従来、図2の回路について詳しく考察して来た。その理由は、この回路では系の固有周波数が各共振回路の共振周波数で与えられ、平均ポテンシャル法の考え方で最も基本的な、「多数の周波数成分が加えられたとき、1個の能動素子がどのように振舞うか」という問題を考えるのに最も適した回路であることにある。そこで本節でも、強制自励系の具体例として、図2の共振回路のうち1個を正弦波電圧源で置きかえた図3の回路について考察する。図2,3において、電圧制御型非線形抵抗 $g(v)$ の素子特性が次式で与えられるものとする。

$$i = g(v) \quad (6)$$

このとき電圧ポテンシャル $G(v)$ は、次式で定義される。

$$G(v) = \int i dv = \int g(v) dv \quad (7)$$

図2の自励系の解を次式のように仮定する。

$$v = \sum_{k=1}^M v_k = \sum_{k=1}^M v_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \quad (8)$$

系の平均ポテンシャルは(8)式を(7)式に代入して次式で定義される。

$$\bar{U} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G \left[\sum_{k=1}^M v_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \right] dt \quad (9)$$

一方、図3の回路の解は次式のように仮定できる。

$$v = \sum_{k=1}^{M-1} v_k + E(t) = \sum_{k=1}^{M-1} v_k \sin(\omega_k t + \theta_k) + A \sin \nu t \quad (10)$$

図3の回路の平均ポテンシャルは(10)式を(9)式に代入し次式となる。

$$\bar{U} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G \left[\sum_{k=1}^{M-1} v_k \sin(\omega_k t + \theta_k) + A \sin \nu t \right] dt \quad (11)$$

(9)式と(11)式を比べると、(9)式において $v_M = A$, $\omega_M = \nu$, $\theta_M = 0$

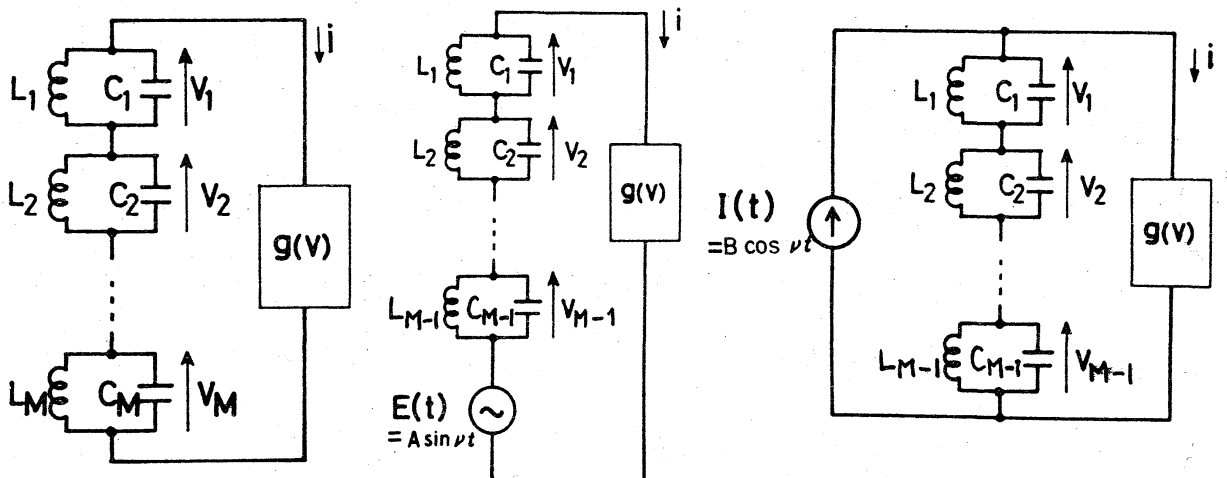


図2. 多自由度発振器 図3. 強制電圧源をもつ発振器 図4. 強制電流源をもつ発振器

とあけば(11)式が得られることがわかる。図3の強制系に生じる安定な振動を求めるには、(11)式の極小点を求めればよいが、それは図2の自励系の平均ポテンシャル(9)式において、1個の自励成分(共振回路)の振幅を固定した上で、残りの成分に関して極小点を求める操作に対応することになる。

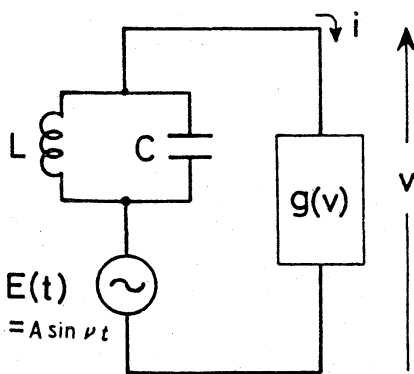
なお、強制自励系のモデルとしてよく用いられる図4の電流源を用いた回路は、非主共振($\nu \neq \omega_0$)の場合には図3の回路と等価であり、以下の考察が同様に適用できる。

4. 周期的外力をもつ van der Pol 発振器

本節では、前節の結果を $M=2$ の場合、すなわち図5の回路について考察する。能動素子特性が次のような3次特性の場合を考えよう。

$$i = g(v) = \mu \left(-v + \frac{v^3}{3} \right) \quad (12)$$

このとき、図5の回路方程式は次式となる。



$$\ddot{v} - \epsilon \omega (1 - v^2) \dot{v} + \omega^2 v = \omega^2 B \sin \nu t$$

$$\omega = 1/\sqrt{LC}, \quad \epsilon = \mu \sqrt{L/C} \quad (13)$$

$$B = A(\omega^2 - \nu^2)/\omega^2, \quad \cdot = d/dt$$

ここに、 v は能動素子に加わる電圧、 ω, ν は固有周波数と外力周波数、 μ

図5. 強制外力をもつ1自由度発振器は微小パラメータである。

(13)式で $\omega = 1$ とおけば、この式は良く知られた強制外力をもつ van der Pol 方程式である⁽⁸⁾。この系については以前から詳しい解析が行なわれており、^{(8),(1)}外力周波数 ν の値によって基本調波同期、 $\nu/3$ 高調波同期、 $1/3$ 分数調波同期が生じること、非共振の場合、外力 B が大きくなると自励成分の抑制現象が生じること等が知られている。以下では、これらの現象を2自由度自励系の平均ポテンシャルの等高線図を用いて考察し、現象を物理的に説明することを試みる。特に高調波同期と分数調波同期の関係について明らかにする。

4.1 外力による自励振動の抑制

(13)式において ν と ω が十分離れているとき、系には一般に外力成分と自励成分が共に存在する非周期的な振動が現れるが、外力振幅 B を大きくしていくと自励成分は小さくなり、遂には外力周波数 ν の成分のみの振動となる。この現象は自励振動の抑制 (quenching) 現象と呼ばれる。

2自由度自励系の非共振の場合の平均ポテンシャル U_a は、(7),(9),(12)式を用いて次式となる。

$$U_a(r_1, r_2) = \mu \left[-\frac{1}{4}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{32}(r_1^4 + 4r_1^2 r_2^2 + r_2^4) \right] \quad (14)$$

U_a の等高線図を図6に、また、その立体図を図7に示す。図6で $\circ$ 印は安定平衡点 (極小値 = 池), Δ 印は不安定平衡点 (極大値 = 山), $\times$ 印は峠点を示す。

さて、図5の強制系の平均ポテンシャルは、3節で述べたように(14)式の $U_a(r_1, r_2)$ において $r_1 = r$ (自励振幅), $r_2 = A$ (強制振幅) とおいて得られる。従って強制系の平均ポテンシャル $U_f(r, A)$ の極小点を求める操作は、図6あるいは図7において、 $r_2 = A$ なる水平直線上で U_a の極小点を求めることを意味する。このような極小点の軌跡、すなわち A に対する自励成分の振幅特性は、図6の等高線の水平接線との接点の軌跡として与えられる。これを図6中に太線で示した。図7では○印に対応する。図より、外力振幅 $A = 0$ のとき極小点は $r = r_0 = 2$ (自励振動振幅) であるが、 A の増加と共に極小点を与える r の値は減少し、 $A \geq \sqrt{2}$ では $r = 0$ で極小となり、外力周波数成分のみの振動が生じる ことがわかる。

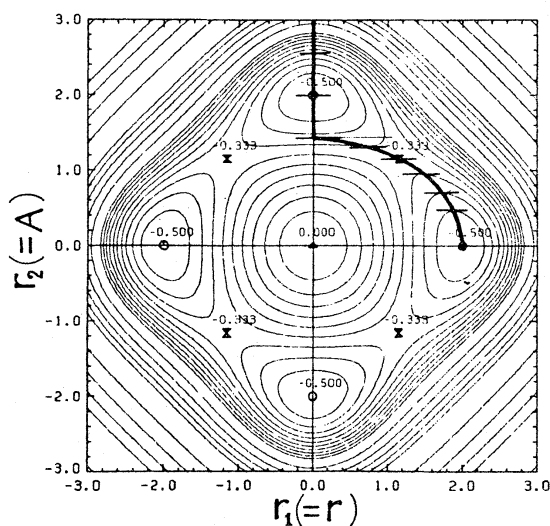


図6. 平均ポテンシャルの等高線図
と振幅特性

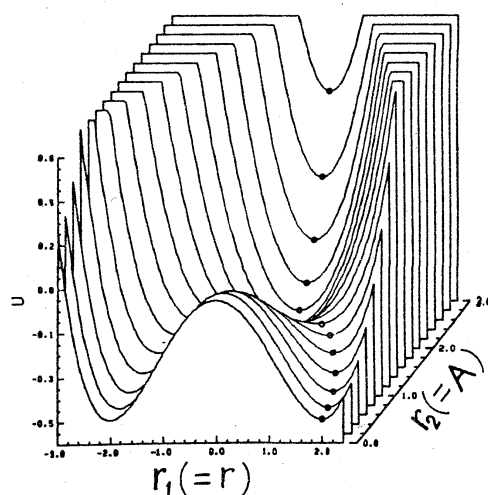


図7. 平均ポテンシャルの立体図

4.2 3 高調波同期と $\frac{1}{3}$ 分数調波同期

(13)式において, 外力周波数 ν が自励周波数 ω の $\frac{1}{3}$ あるいは 3 倍に近いとき, 周波数 ω が ν の 3 倍あるいは $\frac{1}{3}$ に同期化し, 周期振動が生じることが知られている⁽¹⁾。これらの現象は 3 高調波同期および $\frac{1}{3}$ 分数調波同期と呼ばれている。本節では, $\nu = \omega/3$ あるいは $\nu = 3\omega$ の関係が成り立つ離調度ゼロの場合を考察する。

2 自由度自励系において 2 つの固有周波数の比が 1:3 のとき, この系の解を

$$v = r_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + r_3 \sin(3\omega_1 t + \theta_3) \quad (15)$$

と仮定すると, 系の平均ポテンシャル U_s は次式となる。

$$\begin{aligned} U_s(r_1, r_3, \varphi) &= U_a(r_1, r_3) + U_{add}(r_1, r_3, \varphi) \\ &= \mu \left[-\frac{1}{4}(r_1^2 + r_3^2) + \frac{1}{32}(r_1^4 + 4r_1^2 r_3^2 + r_3^4) - \frac{1}{24} r_1^3 r_3 \cos \varphi \right] \end{aligned} \quad (16)$$

ただし, $\varphi = \theta_3 - 3\theta_1$, U_a は非共振平均ポテンシャル(14)式, U_{add} は 1:3 の共振効果により現れる付加項である。

一方, 強制自励系において, $\nu = \omega/3$ の 3 高調波同期の場合の平均ポテンシャル U_3 は, 3 節の結果より, (16)式で, $r_1 = A$, $r_3 = r$, $\theta_1 = 0$ とおいた関数となる。この系の平均化方程式は, (4)式を用いて次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{\partial U_3}{\partial r} = -\mu \left[\frac{1}{8} r^3 + \frac{1}{4} (A^2 - 1) r - \frac{1}{24} A^3 \cos \varphi \right] \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} = -\frac{\mu}{24r} A^3 \sin \varphi \end{aligned} \quad (17)$$

(13)式の平衡点は、 $\dot{\varphi}=0$ より、すべて $\varphi=0, \pi$ を満たし、 φ に
 関して $\varphi=0$ は安定、 $\varphi=\pi$ は不安定である。従って、(17)式
 の安定平衡点、すなわち、 U_3 の極小点を求めることは、自励系
 の平均ポテンシャル U_3 の $r_1-r_3 \cos \varphi$ 平面($\varphi=0, \pi$)で α 等高線
 (図8)において、 $r_1=A$ なる制約(水平線上)で極小点を求
 めることに帰着する。従って、外力 A を変化させたときの自
 励成分振幅 r の特性は、不安定平衡点(極大点)も含めて考
 えると、図8の等高線の水平接点の軌跡として得られる。こ
 の特性を図8中に太線で示した。

また比較のため、従来の平均化
 法により得られた振幅特性を図
 9に示す。○印は安定平衡点、
 △印は不安定平衡点である。図
 8, 9の両特性は当然一致する。

次に、 $\nu=3\omega$ の $1/3$ 分数調波
 同期の場合、解は次のように仮
 定する。

$$v = r \sin(t - \varphi/3) + A \sin 3t \quad (18)$$

この場合の平均ポテンシャル U_3
 は、(16)式において、 $r_3=A, r_1=r,$
 $\theta_3=0, \theta_1=-\varphi/3$ とおいした式で

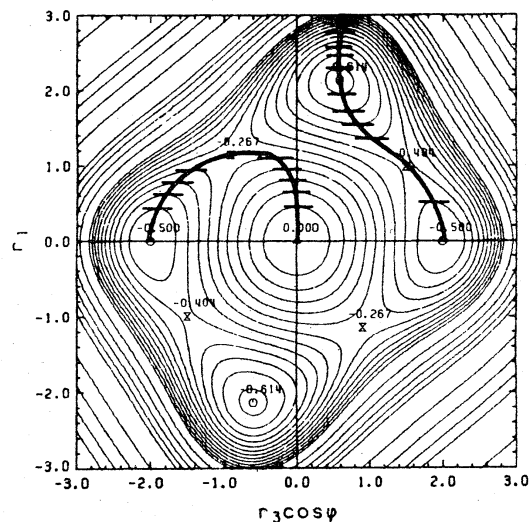


図8. 第3高調波同期振動の振幅特性作図法

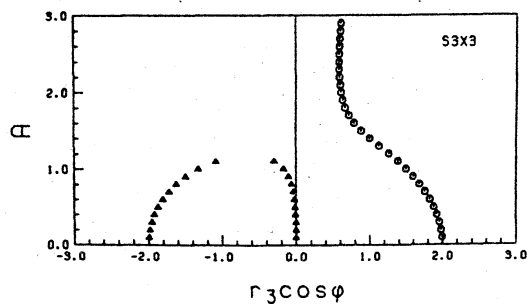


図9. 平均化法による第3高調波同期の振幅特性

与えられる。第3高調波同期の場合と同様の考察を行なうと、外力振幅 A の変化に対する自励成分振幅 r の特性は、自励系の平均ポテンシャル U_0 の $r_1 - r_3 \cos \varphi$ 平面 ($\varphi = 0, \pi$) での等高線図の垂直接点の軌跡として得られる。この様子を図10に示す。また、平均化法による振幅特性を図11に示す。この場合も、両者は一致する。

図8, 10の作図法より明らかに、自励系の平衡点はすべて、強制系の振幅特性曲線上に存在する。特に、安定な平衡点は安定な振幅特性にある。これは、安定な自励振動、すなわち能動素子での損失分を極小とする振動波形は、⁽⁴⁾成分の一つを外力として固定して与えても、当然安定な振動であることを意味する。

従来、平均化法による解析では、第3高調波同期と1/3分数

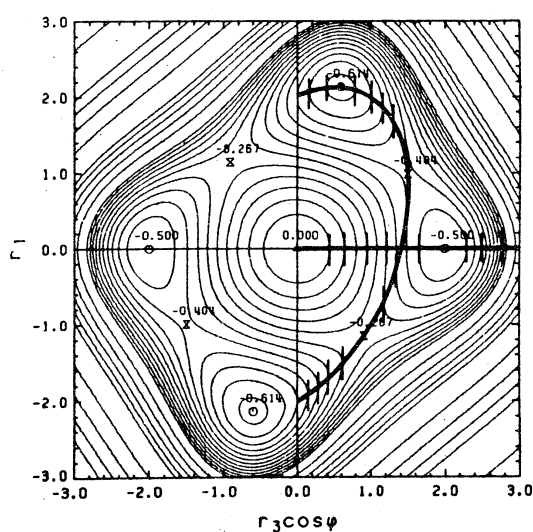


図10. 1/3分数調波同期振動の振幅特性作図法

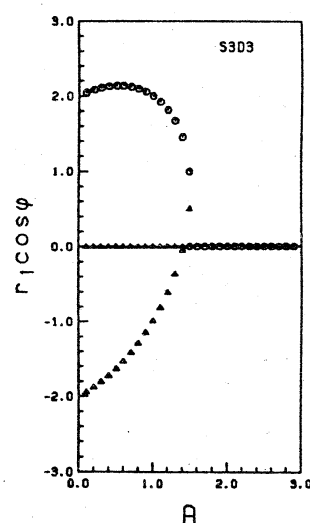


図11. 平均化法による1/3分数調波同期の振幅特性

調波同期は、互に独立した現象であるかのように取扱われてきた。しかし、上述のように、2自由度自励系の平均ポテンシャルから両者の平均化方程式が導かれ、自励系の等高線図から両者の振幅特性が得られたように、両者は密接な関係にある現象であることが明らかとなった。

4.3 シミュレーション波形

前節の解析結果を確認するため、(13)式を用いてシミュレーションを行った。いくつかの外力振幅 A に対する振動波形を、 ω_1 の高調波同期の場合を図12に、 $1/3$ 分数調波同期の場合を図13にそれぞれ示す。図中、実線は能動素子にかかる電圧を示し、点線および2点鎖線はそれぞれ外力及び自励振動成分である。一方、2自由度自励系に生じる方形波近似波形を図14に示す⁽⁴⁾。外力 A として方形波近似波の成分($r_1=2.136, r_2=0.593$)の一方と同じ値を与えた場合の強制同期波形が図12,13の◎印のものである。これらは図14の波形にほぼ等しい。

以上のことをまとめると、1と3の周波数成分を用いて作ることのできる波形のうち、3次特性の能動素子にとって最も「望ましい」波形は図14に示したものであるが、一方の周波数成分が強制外力として固定されると、その条件下で他の成分(自励成分)が損失分(平均ポテンシャル)を極小とするように決まるため、系には種々の同期波形が見られる、と

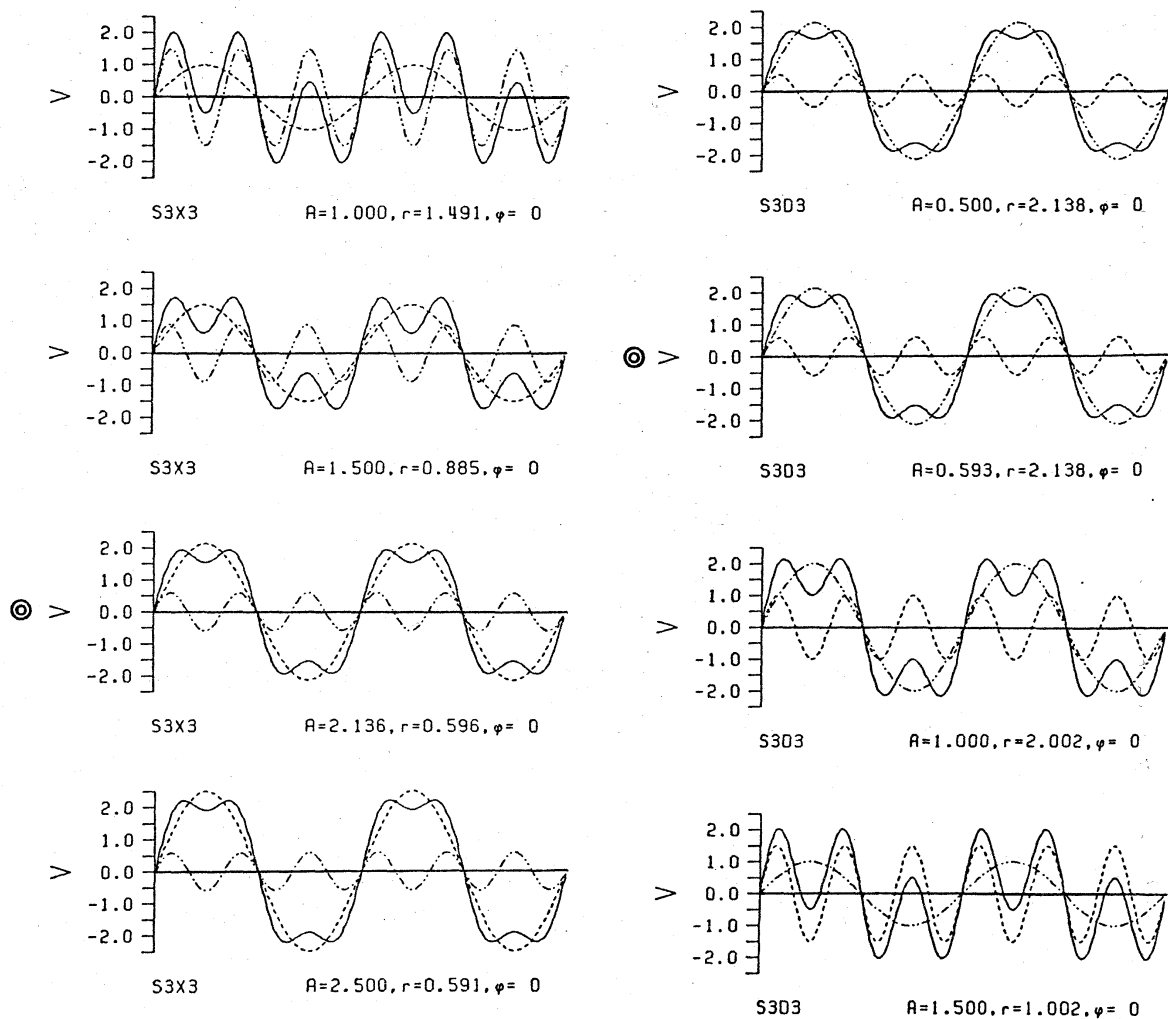


图12.第3高調波同期振動

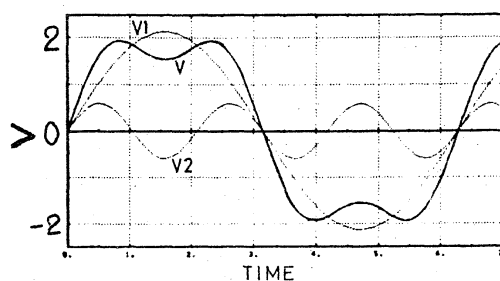
图13. $1/3$ 分数調波同期振動

图14. 1:3 同期 自励振動波形

解釈することができず。

なお、基本調波同期に関しては、図3と図4は等価ではなく、
自励系との関係も特徴的なものがないので本文では省略する。⁽⁷⁾

5. 能動素子特性と同期の種類との関係

能動素子特性の形と系に生じる同期の種類との関係は、一般的にはもちろん、図5の回路に限っても必ずしも明らかではない。このような問題を考えるの1段階として、van der Pol 発振器のような軟らかい発振器と比較するため、硬い発振器について簡単に考察する。⁽⁹⁾

能動素子特性が次の5次多項式で表される場合を考える。

$$i = g(v) = \mu \left(v - \frac{\beta}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5 \right) \quad (19)$$

ただし、 μ は微小パラメータ、 β は負性抵抗の大きさを表すパラメータである。この素子の電圧ポテンシャルは次式となる。

$$G(v) = \int g(v) dv = \mu \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\beta}{12} v^4 + \frac{1}{30} v^6 \right) \quad (20)$$

この関数は、発振状態に対応する正負の極小値(+,-)の他に、非発振状態に対応して原点にも極小点をもつ。このような素子を用いた2自由度自励系の平均ポテンシャルを計算すると、2つの固有振数比が1:3, 1:5, 1:2の場合に、非共振ポテンシャルに共振による付加項が加わり、同現象の生じる可能

性があることになる。実際、1:3のとき $G(v)$ の +, -, 0 の3つの極小値を利用した特徴的な波形をもつ3種類の同期波形が生じることは、先に示した⁽⁴⁾。

1:5 および 1:2 の場合の同期波形を図15, 16に示した。これらの波形の生じる理由は次のように説明できる。

第5高調波が用意されているとき、基本波のみによる平均ポテンシャルの値をより小さくするためには、素子特性の正飽和領域の影響を小さくするため、基本波の頂部を平坦化することが望ましい⁽⁴⁾。このためには、第5高調波を逆位相($\psi=\pi$)で重畳しなければならない。その結果、波形の立上り部分は正弦波のそれに比べ緩やかとなる。(図15) この事実、原点付近に電圧ポテンシャルの極小値をもつ(20)式の特徴にとつては、平均ポテンシャルを減少させるため望ましいことである。よって5次特性(硬発振特性)では、第5高調波を基本波に重畳することは全体的に好ましいことになり、1:5の同期が生

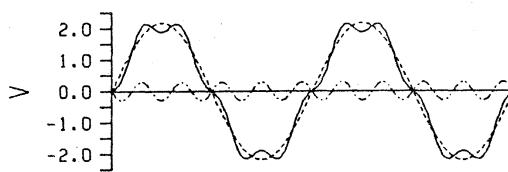


図15. 1:5同期自励振動波形

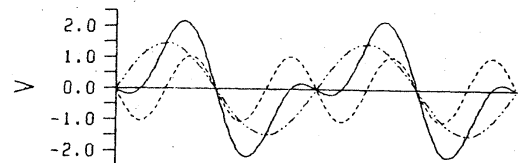
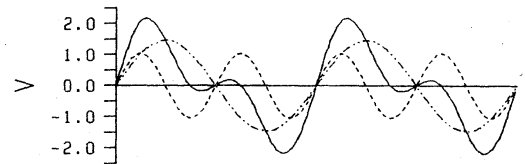


図16. 1:2同期自励振動波形

じることとなる。これに対し3次軟発振特性では、原点付近に電圧ポテンシャルの極大値が存在するから、原点付近での緩慢な動きは平均ポテンシャルを増加させることになり、頂部平坦化と利害が反する。よって、 ω 5高調波を用いることは全体として利益がなく、同期は生じない、と考えられる。

図16の1:2波形を見ると、 ω 2高調波が $\varphi=0$ または π で重畳することにより、原点付近での停留時間の長い波形を巧みに構成している。よって、この同期も1:5同期と同様、電圧ポテンシャルが原点付近に極小値をもつ5次硬発振特性に特有なものであることがわかる。

6. おすび

本報告では、自励系に対して定義した平均ポテンシャルの概念を強制自励系に拡張した。この平均ポテンシャルを用いて、強制外力をもつ van der Pol 発振器における自励振動の抑制現象および ω 3高調波同期と $1/3$ 分数調波同期について考察した。特に、これら2つの同期振動の振幅特性が、1:3同期自励系の平均ポテンシャルの等高線図を用いて説明できることを示した。また、この系に1:3以外の同期が生じにくい理由として、ひとつの説明を試みた。

最後に、有益な御討論を頂いた本学西一禪一教授、上田聡

亮助教授, また, 平均ポテンシャルに関して長く協同研究を行って来た, 元本学院生高瀬冬人氏(現日立), 研究に協力された同.新田博之氏(現新日鉄)の皆様に深く感謝致します。

文 献

- (1) 例えは, Hayashi, C.: Nonlinear Oscillation in Physical Systems, pp. 285 - 308, McGraw Hill (1964).
- (2) 倉光, 高瀬: "平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析法," 電子通信学会論文誌(A), J66-A, 4, pp. 336-343 (昭58).
- (3) 倉光, 高瀬: "格子状結合された発振器群における多重モード振動," 京大数理解析研講究録413 (1981).
- (4) 倉光, 高瀬: "多自由度発振器における同期現象——波形に基づいた現象の考察——" 京大数理解析研講究録466 (1982)
- (5) Brayton, R. K. and Moser, J. K., "A Theory of nonlinear networks, I, II," Quart. Appl. Math., 22: 1-33, 81-104 (1964)
- (6) スメール, ハーシェル: 力学系入門, 岩波, (1979)
- (7) 倉光, 高瀬, 新田: "平均ポテンシャルを用いた強制自励系の解析法," 電子通信学会技術研究報告 NLP 83-7 (1983).
- (8) Pol, B. van der: "Forced Oscillation in a Circuit with Nonlinear Resistance, Phil. Mag., 7-3: 65-80 (1927)
- (9) 倉光, 高瀬, 新田: "平均ポテンシャルを用いた強制自励系の解析法(II)——強制外力をもつ硬い発振器の解析——," 信学校報 NLP 83-25 (1983).