

微分方程式の“理想的” 差分化

早稲田大学理工学部 広田良吾 (Ryougo Hirota)

Fac. of Science & Eng., Waseda Univ.

Aug.3,2000

1 理想的な差分化

可積分な微分方程式の“理想的な” 差分化を考える。“理想的な” 差分化とは微分方程式の解をそのまま再現するような差分方程式を構成することである。すなわち差分方程式を数値計算すると、計算値が差分間隔 δ で微分方程式の厳密解の値をとびとびに移っていくような差分化である。このとき保存量を持つ方程式は差分化しても保存量をもつようにしたい。

こんなことが可能だろうか？

ここでは良く知られている次の3つの常微分方程式を取り上げる。

1) 単振動の方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\alpha^2 x. \quad (1)$$

保存量 (全エネルギー) $H(t)$ は次式で与えられる。

$$H(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 x^2.$$

2) ロジスチック (Logistic) 方程式

$$\frac{d}{dt}N = \alpha N(1 - \lambda N), \quad \alpha, \lambda \text{ は正の定数.} \quad (2)$$

3) 非線形振動子の運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\alpha x - \beta x^3, \quad \alpha, \beta \text{ は正の定数.} \quad (3)$$

非線形振動子の運動方程式には保存量

$$H(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{\beta}{4} x^4.$$

がある。

方程式(1)は線形微分方程式であり、方程式(2),(3)は非線形微分方程式である。方程式(1),(3)には保存量がある。どの方程式も可積分な方程式である。解は次のように表現される。

- 1) 単振動の方程式の解 (初期値は $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = 0$)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t),$$

$$\omega = \alpha.$$

- 2) ロジスチック (Logistic) 方程式の解 (初期値は $x(0) = c_0 + \alpha$)

$$x(t) = \frac{\exp(\alpha t)}{c_0 + \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha t)}.$$

- 3) 非線形振動子の運動方程式の解 (初期値は $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = 0$)

$$x(t) = x_0 \operatorname{cn}(\Omega t, \kappa),$$

$$\Omega^2 = \alpha + x_0^2.$$

ここで cn はヤコビの楕円関数で、 κ は modulus である。

2 可積分な方程式の理想的な差分化

ここでの差分化の目的は微分方程式の解をそのまま保存するような差分方程式を構成することである。

2.1 単振動の方程式の差分化

単振動の方程式の差分化として左辺の2階微分 $\frac{d^2}{dt^2}$ を次の2階差分で置き換える:

$$\frac{d^2}{dt^2} x \rightarrow [x(t+\delta) - 2x(t) + x(t-\delta)]/\delta^2$$

と次式

$$x(t+\delta) - 2x(t) + x(t-\delta) = -\alpha^2 \delta^2 x(t),$$

が得られる。これがよく知られている単振動の方程式の差分化である。この差分方程式の特殊解は

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

で与えられる。ただし ω は次式をみたす:

$$\cos(\omega \delta) = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \delta^2.$$

しかしこの ω は、 δ が有限のとき、微分方程式の解の α とは異なるので目的の差分方程式ではない。

差分方程式の右辺に任意パラメータ a, b を導入して右辺の $x(t)$ を $ax(t+\delta)+2bx(t)+ax(t-\delta)$ で置き換える ($a+b=\frac{1}{2}$)。こうすると差分方程式は

$$\begin{aligned} x(t+\delta) - 2x(t) + x(t-\delta) \\ = -\alpha^2\delta^2[a(x(t+\delta) + x(t-\delta)) + 2bx(t)]. \end{aligned} \quad (4)$$

となる。解は

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

である。ここで ω は次式で与えられる：

$$\cos(\omega\delta) = \frac{1 - \alpha^2 b \delta^2}{1 + \alpha^2 a \delta^2}, \quad a + b = \frac{1}{2}.$$

理想的な差分化のポイントはこの ω が微分方程式の解の α と等しくなるようにパラメータ a を定めることにある。

$\omega = \alpha$ と置くと a は

$$a = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \cos(\alpha\delta)} - \frac{1}{(\alpha\delta)^2}$$

で与えられる。

この時、差分方程式(4)が求めている単振動の方程式の差分化になる。

この差分方程式(4)の保存量 $H(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H(t) &= (x(t) - x(t-\delta))^2 \\ &\quad + \delta^2 a \alpha^2 (x(t)^2 + x(t-\delta)^2) + 2\delta^2 b \alpha^2 x(t)x(t-\delta). \end{aligned}$$

3 ロジスチック (Logistic) 方程式の差分化

一般的に可積分な非線形微分方程式の差分化は非常に難しい。しかし筆者等によって開発された『双線形化法』を使うと比較的に容易に可積分な差分方程式を得ることができる。もともと『双線形化法』はソリトン方程式の厳密解を直接的に（逆散乱法を使わずに）求める方法として発展して来た。最近“双線形微分方程式”のもつゲージ不変性（以下で説明する）が可積分な差分方程式の構成にも有用であることが発見され、この方法が急速に発展している¹。

¹R.Hirota and K.Kimura:J.Phys.Soc.Japan 69(2000)527

3.1 ロジスチック方程式の双線形化

『双線形化法』のいちばん簡単な例題として次のロジスチック方程式(2)

$$\frac{d}{dt}N = \alpha N(1 - \lambda N), \quad \alpha, \lambda \text{は正の定数.}$$

の双線形化を考える。

まず従属変数 N を新しい変数 f, g を使って

$$N = \frac{g}{f}$$

と置く。これを式 (2) に代入し分母を払うと

$$\frac{dg}{dt}f - g\frac{df}{dt} = \alpha g(f - \lambda g) \quad (5)$$

をうる。これが双線形の微分方程式である。

ここでこの方程式のゲージ不変性をチェックする。

ゲージ変換：

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow f(t)h(t), \\ g(t) &\rightarrow g(t)h(t) \end{aligned}$$

によって $N = g/f$ は不変 ($N = gh/fh = g/f$) である。したがって N を変換して得られた『双線形の微分方程式もゲージ変換によって不変であるに違いない』ことが想像される。実際に、式 (5) をゲージ変換すると

$$\begin{aligned} &(\frac{dg}{dt}h + g\frac{dh}{dt})fh - gh(\frac{df}{dt}h + f\frac{dh}{dt}) \\ &= \alpha gh(fh - \lambda gh) \end{aligned}$$

となり、両辺を h^2 で割ると

$$\frac{dg}{dt}f - g\frac{df}{dt} = \alpha g(f - \lambda g)$$

となってこれは式 (5) と同じである。式 (5) は確かにゲージ不変性を満たしている。

式 (5) を書き直すと次式になる。

$$(\frac{dg}{dt} - \alpha g)f = g(\frac{df}{dt} - \alpha \lambda g)$$

この式は任意関数 $\beta(t)$ を導入すると、次の二つの線形微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dg}{dt} - \alpha g = \beta g, \\ \frac{df}{dt} - \alpha \lambda g = \beta f \end{cases} \quad (6)$$

に等しくなる。ここで $\beta = 0$ と選ぶと

$$\begin{cases} \frac{dg}{dt} - \alpha g = 0, \\ \frac{df}{dt} - \alpha \lambda g = 0 \end{cases} \quad (7)$$

となり、解は

$$\begin{aligned} g &= \exp(\alpha t), \\ f &= c_0 + \lambda \exp(\alpha t) \end{aligned}$$

で与えられる。 c_0 は初期値によって定まる定数である。

注。 $\beta = 0$ と選べるのは、式 (6) はゲージ変換：

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow f(t)e^{\int^t \beta dt}, \\ g(t) &\rightarrow g(t)e^{\int^t \beta dt} \end{aligned}$$

によって式 (7) に変換されるからである。

3.2 ロジスチック方程式の理想的な差分化

ロジスチック方程式

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(1 - \lambda N)$$

は変数変換によって次の双線形の微分方程式 (5)

$$\frac{dg}{dt}f - g\frac{df}{dt} = \alpha g(f - \lambda g)$$

に変換された。左辺の微分を前進差分に置き換えると次の双線形差分方程式

$$\begin{aligned} \delta^{-1}\{[g(t+\delta) - g(t)]f(t) - g(t)[f(t+\delta) - f(t)]\} \\ = \alpha g(t)[f(t) - \lambda g(t)] \end{aligned}$$

または

$$g(t+\delta)f(t) - g(t)f(t+\delta) = \delta\alpha g(t)[f(t) - \lambda g(t)] \quad (8)$$

になる。ここで双線形差分方程式のゲージ不変性をチェックする。
ゲージ変換：

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow f(t)h(t), \\ g(t) &\rightarrow g(t)h(t) \end{aligned}$$

によって式 (8) は

$$\begin{aligned} & [g(t+\delta)f(t) - g(t)f(t+\delta)]h(t+\delta)h(t) \\ & = \delta\alpha g(t)[f(t) - \lambda g(t)]h(t)^2 \end{aligned}$$

となって不変ではない。ゲージ不変になるためには右辺の係数は $h(t)^2$ ではなく $h(t+\delta)h(t)$ でなければならない。そこでゲージ不変になるように右辺を書き直す。パラメータ a, b を導入すると次の双線形差分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & g(t+\delta)f(t) - g(t)f(t+\delta) \\ & = \delta\alpha[ag(t+\delta)f(t) \\ & \quad + bg(t)f(t+\delta) - \lambda g(t+\delta)g(t)], \\ & a + b = 1. \end{aligned}$$

この差分方程式に予想解 $f(t) = c_0 + \lambda g(t)$ を代入すると線形方程式

$$g(t+\delta) - g(t) = \delta\alpha[ag(t+\delta) + bg(t)]$$

が得られる。この式を解いて $f(t), g(t)$ は

$$\begin{aligned} & f(t) = c_0 + \lambda g(t), \\ & g(t) = \left(\frac{1+b\alpha\delta}{1-a\alpha\delta}\right)^{t/\delta}, \\ & a + b = 1. \end{aligned}$$

を得る。単振動の方程式の場合と同じようにパラメータ a, b を

$$\frac{1+b\alpha\delta}{1-a\alpha\delta} = e^{\alpha\delta}$$

となるように、即ち

$$a = \frac{1}{\alpha\delta} - \frac{1}{e^{\alpha\delta} - 1}$$

と定める。こうすると差分方程式の解は微分方程式の解

$$\begin{aligned} g &= \exp(\alpha t), \\ f &= c_0 + \lambda \exp(\alpha t) \end{aligned}$$

と同じ形になる。双線形差分方程式は従属変数の変換

$$g(t) = N(t)f(t)$$

によって次の非線形差分方程式

$$\begin{aligned} & N(t+\delta) - N(t) \\ & = \delta\alpha\{aN(t+\delta) + bN(t) - \lambda N(t)N(t+\delta)\} \end{aligned}$$

に変換される。これが求めるロジスチック方程式の差分化である。

“理想的な”差分方程式の計算結果を下図に示す。差分間隔 δ (図では少し大きくとってある) でプロットした数値解 (折れ線) は厳密解 (点線) の上をとびとびに移っている。

4 非線形振動子の運動方程式の差分化

非線形振動子の方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -2\alpha x - 2\beta x^3, \quad \text{定数 は後の都合上 2 倍している.}$$

は変換 $x(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$ によって次の双線形微分方程式

$$[D_t^2 g \cdot f + 2\alpha g f]f - g[D_t^2 f \cdot f - 2\beta g^2] = 0 \quad (9)$$

に変換される。ここで D_t^2 はソリトン理論で使われている双線形演算子であり、次式で定義される。任意の関数 f, g に対して

$$D_t^2 f \cdot g = \frac{d^2 f}{dt^2} g - 2 \frac{df}{dt} \frac{dg}{dt} + f \frac{d^2 g}{dt^2}$$

である。この双線形方程式 (9) はゲージ変換によって不変である。式 (9) は任意関数 $\gamma(t)$ を導入すると次の二式に分離される。

$$\begin{aligned} D_t^2 g \cdot f + 2\alpha g f &= \gamma(t) g f, \\ D_t^2 f \cdot f - 2\beta g f &= \gamma(t) f^2. \end{aligned}$$

任意関数 $\gamma(t)$ はゲージ変換:

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow f(t)g(t), \quad g(t) \rightarrow g(t)h(t), \\ D_t^2 h(t) \cdot h(t) &= \gamma(t)h(t)^2. \end{aligned}$$

によって 0 と選べる。

双線形微分方程式を差分化する。パラメータ a_1, a_2, b_1, b_2 を導入すると、ゲージ不変な双線形差分方程式として次式が考えられる:

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 g(t) \cdot f(t) + 2\alpha \{a_1 [g(t+\delta)f(t-\delta) + g(t-\delta)f(t+\delta)] + 2a_2 g(t)f(t)\} &= 0, \\ \Delta_t^2 f(t) \cdot f(t) - 2\beta \{b_1 g(t+\delta)g(t-\delta) + b_2 g(t)^2\} &= 0, \\ a_1 + a_2 &= \frac{1}{2}, \quad b_1 + b_2 = 1. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 g(t) \cdot f(t) &= [g(t+\delta)f(t-\delta) - 2g(t)f(t) + g(t-\delta)f(t+\delta)]/\delta^2, \\ \Delta_t^2 f(t) \cdot f(t) &= 2[f(t+\delta)f(t-\delta) - g(t)f(t)]/\delta^2. \end{aligned}$$

である。この一組の双線形差分方程式は変数変換 $g(t) = x(t)f(t)$ によって次式に変換される：

$$\begin{aligned} [x(t+\delta) + x(t-\delta)]f(t+\delta)f(t-\delta)(1 + 2\alpha\delta^2a_1) &= 2x(t)f(t)^2(1 - 2\alpha\delta^2a_2), \\ [1 - \beta\delta^2b_1x(t+\delta)x(t-\delta)]f(t+\delta)f(t-\delta) &= [1 + \beta\delta^2b_2x(t)^2]f(t)^2. \end{aligned}$$

この2式の比をとって f を消去すると x に対する非線形差分方程式：

$$\frac{[x(t+\delta) + x(t-\delta)]}{[1 - \beta\delta^2b_1x(t+\delta)x(t-\delta)]} = \frac{2x(t)A_0}{[1 + \beta\delta^2b_2x(t)^2]} \quad (10)$$

が得られる。この式を書き換えると $(x(t) = x_m, t = m\delta)$

$$x_{m+1} + x_{m-1} = 2A_0x_m - \beta\delta^2x_m[2A_0b_1x_{m+1}x_{m-1} + b_2x_m(x_{m+1} + x_{m-1})] \quad (11)$$

となる。ここで

$$A_0 = \frac{1 - 2\alpha\delta^2a_2}{1 + 2\alpha\delta^2a_1}$$

である。パラメータ a_1, a_2, b_1, b_2 は方程式 (10) の解が非線形振動子の解

$$x(t) = x_0 \operatorname{cn}(\Omega t, \kappa).$$

に一致するように定める。ヤコビの楕円関数の加法定理を使うと最終的に次式

$$\begin{aligned} A_0[1 - \beta\delta^2b_1x_0^2\operatorname{cn}^2(\Omega\delta)] &= \operatorname{cn}(\Omega\delta)(1 + \beta\delta^2b_2x_0^2), \\ A_0[\kappa^2\operatorname{sn}^2(\Omega\delta) - \beta\delta^2b_1x_0^2\operatorname{dn}^2(\Omega\delta)] &= \operatorname{cn}(\Omega\delta)\beta\delta^2b_2x_0^2. \end{aligned}$$

となる。ただし

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_1 + b_2 = 1.$$

である。

差分方程式 (11) の保存量を求める計算は面倒である。Appendix で詳しくのべる。保存量の計算結果は

$$H_m = \frac{(x_m)^2 - A_0x_mx_{m-1} + (x_{m-1})^2 + \beta\delta^2(b_1 + b_2)(x_mx_{m-1})^2}{1 + 2A_0b_1\beta\delta^2x_mx_{m-1} - b_1b_2\beta^2\delta^4(x_mx_{m-1})^2}. \quad (12)$$

となる。これが時間連続のときの保存量

$$H(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{\beta}{4}x^4.$$

の差分化である。 $b_1 \neq 0, \delta \neq 0$ のとき保存量は有理式になる。

保存量を求めるのは面倒であるが、結果がただしいかどうかをチェックするのは簡単である。保存量 (12) の差を計算すると因数分解されて

$$\begin{aligned} H_{m+1} - H_m &\propto (x_{m+1} - x_{m-1})(1 + b_1\beta\delta^2x_m^2) \\ &\quad \{x_{m+1} - 2A_0x_m + x_{m-1} + \beta\delta^2x_m[2A_0b_1x_{m+1}x_{m-1} + b_2x_m(x_{m+1} + x_{m-1})]\}. \end{aligned}$$

となる。右辺は差分方程式によって 0 となる。したがって H_m は保存量である。

A 保存量の求め方

差分方程式(11)の保存量を求める²。時間連続のときの保存量 $H(t)$ は $x, \frac{dx}{dt}$ の多項式である。ところが 差分方程式(10)の保存量の計算結果は保存量は一般に x_m, x_{m-1} の有理多項式であることを示している。この事実が非線形差分方程式の保存量の計算を非常に難しくしている。計算方法のポイント次のようになる：

保存量は多項式とし、多項式の係数が初期値に依存する定数であることを仮定する。

注 係数が初期値に依存する定数とは係数も保存量であることを仮定している。

この方法を使って実際に差分方程式(11)

$$x_{m+1} + x_{m-1} = 2A_0x_m - \beta\delta^2x_m[2A_0b_1x_{m+1}x_{m-1} + x_m(x_{m+1} + x_{m-1})]$$

の保存量を求めてみる。

まず保存量が次の多項式で表現されることを仮定する：

$$\begin{aligned} H(m) = & a_{20}x_m^2 + a_{11}x_mx_{m-1} + a_{02}x_{m-1}^2 \\ & + a_{30}x_m^3 + a_{21}x_m^2x_{m-1} + a_{12}x_mx_{m-1}^2 + a_{03}x_{m-1}^3 \\ & + a_{40}x_m^4 + a_{31}x_m^3x_{m-1} + a_{22}x_m^2x_{m-1}^2 + a_{13}x_mx_{m-1}^3 + a_{04}x_{m-1}^4. \end{aligned}$$

差分方程式(11)の性質：

1. 時間反転($\delta \rightarrow -\delta$)にたいして不変である。
2. 陽的(explicit)である。

より、保存量 $H(m)$ は簡単になって

$$H(m) = c_1(m)h_1(m) + c_2(m)h_2(m) + c_3(m)h_3(m), \quad (13)$$

$$h_1(m) = x_m^2 + x_{m-1}^2, \quad (14)$$

$$h_2(m) = x_mx_{m-1}, \quad (15)$$

$$h_3(m) = x_m^2x_{m-1}^2. \quad (16)$$

と表される。仮定 ($H(m), c_1(m), c_2(m), c_3(m)$ が保存量である) より、次式

$$H = c_1h_1(m-1) + c_2h_2(m-1) + c_3h_3(m-1),$$

$$H = c_1h_1(m) + c_2h_2(m) + c_3h_3(m),$$

$$H = c_1h_1(m+1) + c_2h_2(m+1) + c_3h_3(m+1).$$

が成り立つ。本文で示した保存量(12)は $c_1(m)$ が1になるように規格化してある。一般性を失わずに H を1に規格化できるので、 c_1, c_2, c_3 は次式で与えられる：

$$c_1(m) = \begin{vmatrix} 1 & h_2(m-1) & h_3(m-1) \\ 1 & h_2(m) & h_3(m) \\ 1 & h_2(m+1) & h_3(m+1) \end{vmatrix} / \Delta(m),$$

²この方法は早大修士2年木村 欣司君との共同研究の結果である。

$$c_2(m) = \frac{\begin{vmatrix} h_1(m-1) & 1 & h_3(m-1) \\ h_1(m) & 1 & h_3(m) \\ h_1(m+1) & 1 & h_3(m+1) \end{vmatrix}}{\Delta(m)},$$

$$c_3(m) = \frac{\begin{vmatrix} h_1(m-1) & h_2(m-1) & 1 \\ h_1(m) & h_2(m) & 1 \\ h_1(m+1) & h_2(m+1) & 1 \end{vmatrix}}{\Delta(m)},$$

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} h_1(m-1) & h_2(m-1) & h_3(m-1) \\ h_1(m) & h_2(m) & h_3(m) \\ h_1(m+1) & h_2(m+1) & h_3(m+1) \end{vmatrix}.$$

仮定 ($c_j(m)$, $j = 1, 2, 3$ が保存である) より次式:

$$c_j(m+1) - c_j(m) = 0, \quad \text{for } j = 1, 2, 3 \quad (17)$$

が成り立つ。等式 (17) が正しいかどうかを確かめる方法はいろいろある:

1. 最も簡単な方法は差分方程式 (11) を使って数値的にチェックすることである。この方法は行列式の大きさが相当に大きくても (100×100 のオーダーでも) チェックが可能である。
ランダムな初期値にたいして等式 (17) が成り立てば確率的に正しいことが確かめられる。
仮定が間違っていて等式 (17) が成立しない場合、数値的なチェックは簡単で速いので非常に有効である。
2. 数式処理システムにあるグレブナ基底を使って等式を確かめる。コンピュータの結果は信頼できる。しかし行列式の大きさと差分方程式の複雑さにより通常のコンピュータでは計算不能になる場合が多い。³
3. 強力なコンピュータが使えない場合は、行列式を簡単にして通常のコンピュータでも計算できるようにする。

ここでは第3の方法について述べる。

$j = 1$ のとき式 (17) の分子は

$$\begin{vmatrix} 1 & h_2(m) & h_3(m) \\ 1 & h_2(m+1) & h_3(m+1) \\ 1 & h_2(m+2) & h_3(m+2) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_1(m-1) & h_2(m-1) & h_3(m-1) \\ h_1(m) & h_2(m) & h_3(m) \\ h_1(m+1) & h_2(m+1) & h_3(m+1) \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & h_2(m-1) & h_3(m-1) \\ 1 & h_2(m) & h_3(m) \\ 1 & h_2(m+1) & h_3(m+1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_1(m) & h_2(m) & h_3(m) \\ h_1(m+1) & h_2(m+1) & h_3(m+1) \\ h_1(m+2) & h_2(m+2) & h_3(m+2) \end{vmatrix}$$

³市販のものでグレブナ基底を計算する最強のソフトは富士通のRisa/ASIRである。

となるが、この式は行列式におけるヤコビの等式によって次式：

$$-\begin{vmatrix} 1 & h_1(m-1) & h_2(m-1) & h_3(m-1) \\ 1 & h_1(m) & h_2(m) & h_3(m) \\ 1 & h_1(m+1) & h_2(m+1) & h_3(m+1) \\ 1 & h_1(m+2) & h_2(m+2) & h_3(m+2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_2(m) & h_3(m) \\ h_2(m+1) & h_3(m+1) \end{vmatrix}$$

に等しい。したがって等式

$$\begin{vmatrix} 1 & h_1(m-1) & h_2(m-1) & h_3(m-1) \\ 1 & h_1(m) & h_2(m) & h_3(m) \\ 1 & h_1(m+1) & h_2(m+1) & h_3(m+1) \\ 1 & h_1(m+2) & h_2(m+2) & h_3(m+2) \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

が成り立てば仮定 ($c_1(m)$ は保存量である) は正しい。さらに式 (18) は $c_j(m), j = 2, 3$ が保存量であるための条件式でもある。

等式 (18) の左辺の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & h_1(m-1) & h_2(m-1) & h_3(m-1) \\ 1 & h_1(m) & h_2(m) & h_3(m) \\ 1 & h_1(m+1) & h_2(m+1) & h_3(m+1) \\ 1 & h_1(m+2) & h_2(m+2) & h_3(m+2) \end{vmatrix}$$

は関係式

$$\begin{aligned} h_1(m+1) - h_1(m) &= (x_{m+1} - x_{m-1})(x_{m+1} + x_{m-1}), \\ h_2(m+1) - h_2(m) &= (x_{m+1} - x_{m-1})x_m, \\ h_3(m+1) - h_3(m) &= (x_{m+1} - x_{m-1})x_m^2(x_{m+1} + x_{m-1}). \end{aligned}$$

を使うと書換られて

$$\propto \begin{vmatrix} x_m + x_{m-2} & x_{m-1} & x_{m-1}^2(x_m + x_{m-2}) \\ x_{m+1} + x_{m-1} & x_m & x_m^2(x_{m+1} + x_{m-1}) \\ x_{m+2} + x_m & x_{m+1} & x_{m+1}^2(x_{m+2} + x_m) \end{vmatrix} \quad (19)$$

となる。行列式 (19) の第 1 列に差分方程式 (11) を代入すると、行列式 (19) は簡単になって

$$\propto \begin{vmatrix} x_m x_{m-2} & 1 & x_{m-1}(x_m + x_{m-2}) \\ x_{m+1} x_{m-1} & 1 & x_m(x_{m+1} + x_{m-1}) \\ x_{m+2} x_m & 1 & x_{m+1}(x_{m+2} + x_m) \end{vmatrix}$$

と変形される。この式もさらに簡単化されて最終的に

$$\propto \begin{vmatrix} x_{m+1}x_{m-1} - x_mx_{m-2} & x_{m+1}x_m - x_{m-1}x_{m-2} \\ x_{m+2}x_m - x_{m+1}x_{m-1} & x_{m+2}x_{m+1} - x_mx_{m-1} \end{vmatrix} \quad (20)$$

となる。この行列式が差分方程式 (11) によって 0 になるかどうかを確かめるのは普通のコンピュータでも簡単である。