

Some results on Bochner-type theorems

岡山県立大情報工 高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)

§ 1. Introduction

有限次元空間で知られている Bochner の定理は、無限次元空間 (nuclear space) に対し一般化される。

Theorem 1.1. Let E be a nuclear space with the dual E' . Then every continuous cylindrical measure μ on E' is σ -additive ($\sigma(E', E)$ -Radon.)

この定理は、 E が metrizable のときは Minlos [7] により、また、一般の場合は山崎 (Umemura [16]) によって証明された。ところで、 E が σ -Hilbert space のとき、Bochner の定理が成立するためには、nuclearity が必要となる。したがって、 E が Hilbert space のとき、Bochner の定理が成立するのは有限次元に限る。Hilbert space 上の cylindrical measure については、次の結果が知られている (Sazonov-Minlos theorems [7], [13])。

Theorem 1.2. A cylindrical measure μ on a Hilbert

space H is σ -additive iff it is continuous with respect to the Hilbert-Schmidt topology.

Theorem 1.3. Let H and G be Hilbert spaces and $T : H \rightarrow G$ be a continuous linear operator. Then T is of Hilbert-Schmidt type iff for each continuous cylindrical measure μ on H , the image $T(\mu)$ is σ -additive on G .

これら3つの定理は密接に関連しているが、小論では、これらの定理の一般化について、すでに知られている結果も含めて、そのいくつかを紹介し、相互の関連について考えたい。

§ 2. p -radonifying operators and p -summing operators

ここでは、定理1.3の Banach space への一般化として、Schwartzによる " p -radonifying operator" の理論を紹介しその結果を用いて、定理1.1の一般化および関連した結果について述べる。

E, F を Banach space, E', F' を dual space とする。
(E', F' は Banach space である。) E 上の cylindrical measure (c.m.) μ に対し、その特性関数 (ch.f.) は

$$\hat{\mu}(x') = \int_E \exp(i\langle x, x' \rangle) d\mu(x), \quad x' \in E'$$

で定義される。この $\mu(x')$ が E' 上で連続のとき、 μ は連続

な c.m. という。(μ が E' 上の c.m. のときは、その特性関数 $\mu(x)$ は E 上で定義される。) ところで、c.m. μ に対し、対応する random linear functional (r.l.f.) を $L : E' \rightarrow L_0(\Omega, P)$ とするとき、 μ が連続なることと、r.l.f. L が連続なることは同等である。(r.l.f. に関する詳細は、Dudley[1] を参照。) ここで、 $L(E') \subset L_p(\Omega, P)$, $0 < p < \infty$, であれば μ は weak p -th order という。更に、 $L : E' \rightarrow L_p(\Omega, P)$ が連続であれば、c.m. μ は type p という。

(連続な c.m. μ は type 0 ということにする。)

Definition 2.1. Let $T : E \rightarrow F$ be a linear operator.

(1) T is p -radonifying, $0 < p < \infty$, if for each c.m. μ on E of type p , the image $T(\mu)$ is a Radon measure on F .

(2) T is p -summing, $0 < p < \infty$, if for each weakly p -summable sequence $\{x_n\}$ in E , the sequence $\{Tx_n\}$ in F is absolutely p -summable. In particular, we say "absolutely summing" instead of "1-summing".

p -radonifying operator と p -summing operator の関係について、次の結果がある (Schwartz[14])。

Theorem 2.1. Let $1 < p < \infty$. Then $T : E \rightarrow F$ is p -summing iff it is p -radonifying.

この定理は、 $0 < p \leq 1$ では成立しない。 $p = 1$ のとき E' or F が Radon-Nikodym property をもてば、定理は成立する。ただし、 p -radonifying ならば、常に p -summing である。 $0 < p < 1$ のときは、次の結果がある。

Theorem 2.2. Suppose that E' has the metric approximation property (m.a.p.). If $T : E \rightarrow F$ is p -summing, then for each c.m. μ on E of type p , $T(\mu)$ is Radon on $\sigma(F'', F')$. (In this case, if F is reflexive, then $T(\mu)$ is Radon on F .)

定理 1.3 の一般化として、次の結果を得る。

Theorem 2.3. Suppose that E' has the m.a.p. and F is reflexive. Then $T : E \rightarrow F$ is p -summing, $0 < p < 1$, iff for each continuous c.m. μ on E , $T(\mu)$ is Radon on F , that is, T is 0-radonifying.

$T : E \rightarrow F$ が p -summing, $0 < p < 1$, のとき、任意の $r > 0$ に対し、 T は r -summing となる。このような T は completely summing という。0-radonifying operator は常に completely summing であるが、逆は一般に成立しない。 $m.a.p.$ の代わりに type を仮定することがある。通常 2 種類の定義 (stable と Rademacher) があるが、ここでは、stable type の意味で使う。任意の Banach space は、type p ,

$0 < p < 1$, であり、 type 1 であれば、ある $p > 1$ があって type p となる。(定義および関連した結果は後述する)

Theorem 2.4. Suppose that E' has type 1. Then $T : E \rightarrow F$ is completely summing iff it is 0-radonifying.

ここで、定理 1.1 の一般化を考える。

Theorem 2.5. Let E, F be locally convex Hausdorff spaces, and $T : F \rightarrow E$ be a continuous linear operator. Suppose that there is a fundamental family $\{\|\cdot\|_\alpha\}$ of continuous seminorms on E such that each associated Banach space E_α of $(E, \|\cdot\|_\alpha)$ has the m.a.p. Suppose also that for each continuous seminorm $\|\cdot\|_\alpha$ on E , there is a continuous seminorm $\|\cdot\|_\beta$ on F such that $T : F_\beta \rightarrow E_\alpha$ is dual completely summing. Then for each continuous c.m. μ on E' , the image $T'(\mu)$ is Radon on $\sigma(F', F)$.

Remark. $E = F, T = I$ (identity map) とする。 E が nuclear space のとき、定理 2.5 の条件は満たされるので、定理 1.1 が従う。また、定理 2.5 の E に関する条件で、m.a.p.の代わりに、各 E_α が type 1 をもつとしてもよい。

Okazaki-Takahashi [10]による次の結果は、定理 2.5 より従う。しかしながら、その証明は本質的に同じである。

Corollary 2.6. Let $T : F \rightarrow E$ be a continuous linear operator. Suppose that E satisfies the same assumption as in Theorem 2.5 and F is barrelled. Suppose also that E admits a $T(F)$ -accessible Borel probability measure. Then for each continuous c.m. μ on E' , the image $T'(\mu)$ is Radon on $\sigma(F', F)$.

この結果は、abstract Wiener space と Bochner's theorem の関連を述べた Okazaki [9], Sato [12] の結果を一般化する。詳細は、これらの文献を参照されたい。

また、定理 1.1 の逆問題、つまり nuclearity の必要性については、Okazaki-Takahashi [11] を参照されたい。

§ 3. p -stable cylindrical measures and Λ_p -operators

Schwartz の p -radonifying operator の理論は、type p の c.m. μ の Radon extension に関するものであったが、ここでは、 p -stable cylindrical measure μ の Radon extension について紹介する。以下、 E は Banach space, μ は E 上の c.m. とする。 μ の特性関数 (ch.f.) $\hat{\mu}(x')$ は E' 上で定義された positive definite function である。

Definition 3.1. Let $0 < p \leq 2$.

(1) μ is p -stable symmetric if there is a linear ope-

rator T from E' into some L_p such that $\exp(-\|Tx'\|^p)$, $x' \in E'$, is the ch.f. of μ . In particular, if $p = 2$, then μ is called Gaussian.

(2) $T : E' \rightarrow L_p$ is a Λ_p -operator if $\exp(-\|Tx'\|^p)$, $x' \in E'$, is the ch.f. of a Radon measure on E .

以下、 p -stable c.m. としては、このようなものを考える。
(すなわち、symmetric なものだけを扱う。) p -stable c.m. or Λ_p -operatorについては、非常に多くの結果が知られているが、そのいくつかを紹介する。詳細は、Linde [4] を参照されたい。 (Ω, P) を probability space, $0 < p \leq 2$ とする。linear operator $T : E' \rightarrow L_p(\Omega, P)$ が連続のとき、r.l.f. T に対応する E 上の c.m. を ν とする。 ν は type p である。

Definition 3.2. T is decomposed if ν is Radon on E . Moreover, ν is Radon of order p , that is,

$$\int_E \|x\|^p d\nu(x) < \infty$$

then T is called p -decomposed.

Definition 3.3. Let $\{x_n\}$ be any weakly p -summable sequence in E and μ be a p -stable c.m. on E with the ch.f. $\exp(-\sum |\langle x_n, x' \rangle|^p)$, $x' \in E'$, where $0 < p \leq 2$.

(1) E is said to be of (stable) type p if the conver-

gence of $\sum \|x_n\|^p$ is sufficient for μ to be Radon.

(2) E is said to be of (stable) cotype p if the convergence of $\sum \|x_n\|^p$ is necessary for μ to be Radon.

Theorem 3.1. E is of type p iff every p -decomposed operator $T : E' \rightarrow L_p(\Omega, P)$ is a Λ_p -operator.

Remark. If $0 < p < 2$, then every Λ_p -operator is p -decomposed. But for $p = 2$, this is false; this is true for $p = 2$ iff E is of cotype 2.

Theorem 3.2. Let $1 < p < 2$, and $T : E \rightarrow F$ be a linear operator.

(1) If for each continuous p -stable c.m. μ on E , $T(\mu)$ is Radon on F , then T is p -summing.

(2) Suppose that F is of type p . If T is p -summing, then for each continuous p -stable c.m. μ on E , $T(\mu)$ is Radon on F .

Remark. (1)は任意の Banach spaceが cotype p ($p < 2$)ということから示される。 $p = 2$ のときは、(1)が成立するための必要十分条件は、 E が cotype 2なることである。他方、 $p = 2$ のとき、Gaussian c.m.は type 2であるから、(2)は任意の Banach spaceに対して成立する。

Corollary 3.3. If any continuous p -stable c.m. on E

is Radon, $0 < p < 2$, then E is of finite dimension.

Remark. This is true for $p = 2$ (Linde-Pietsch [5]).

これによって、無限次元 Banach space 上では、c.m. の class を p -stable c.m. に制限しても、定理 1.1 のような結果を得ることはできない。そこで、 p -stable c.m. の class に対し、定理 1.2 と類似の議論をしたい。この議論は、次の §で行う。最後に、 Λ_p -operator と 0-Radonifying operator の関係を述べる。

Theorem 3.4. Any Λ_p -operator from E' into L_p is τ_κ -continuous and completely summing; where $\tau_\kappa = \tau_\kappa(E', E)$ is the Mackey-topology.

Remark. If $T : E' \rightarrow L_p$ is a Λ_p -operator, $1 < p \leq 2$, then T' is a continuous linear operator from $(L_p)'$ into E . In this case, $\mu = T'(\gamma_p)$ is a p -stable Radon measure on E . Here γ_p denotes the canonical p -stable c.m. on $(L_p)'$ with the ch.f. $\exp(-\|f\|^p)$, $f \in L_p$. (For $p = 2$, γ_2 is called a canonical Gaussian c.m.)

Theorem 3.5. Any Λ_2 -operator from E' into a Hilbert space H is 0-radonifying.

Theorem 3.6. Suppose that E has the m.a.p. or type 1. Then for $1 < p < 2$, any Λ_p -operator from E' into L_p

is 0-radonifying.

Remark. 定理 3.5 は、Gross[2], Okazaki[9], Sato[12]によって、本質的には知られている。定理 3.6 は、定理 2.3, 定理 2.4, 定理 3.4 より従う。ここで、 E の条件 (m.a.p. or type 1) が 必要か否かは不明である。 Λ_p -operator と p -summing (or p -nuclear) operator の関連において、様々な Banach space の特徴付けがなされているが、ここでは省略する。これらの詳細は、Linde [4], Takahashi-Okazaki [15] 等を参照されたい。

§ 4. Sazonov-type topologies

ここでは、定理 1.2 を Banach space に一般化した結果について考察する。以下、 E を Banach space, E' を dual space, $\tau_K = \tau_K(E', E)$ を Mackey-topology を表すものとする。 E' 上の vector topology τ_1, τ_2 に対し、identity map : $(E', \tau_1) \rightarrow (E', \tau_2)$ が連続のとき、 $\tau_1 \geq \tau_2$ で表す。 τ_1 が τ_2 より真に強いとき、 $\tau_1 > \tau_2$ で表す。 E 上の c.m. μ と E' 上の vector topology τ に対し、 μ が τ -連続とは、その特性関数 $\hat{\mu}$ が τ -連続なることである。

Definition 4.1. Let τ be a vector topology on E' .

(1) τ is said to be sufficient if every τ -continuous c.m. μ on E is Radon; that is, the τ -continuity of μ is sufficient for μ to be Radon.

(2) τ is said to be necessary if every Radon probability measure μ on E is τ -continuous; that is, τ -continuity is necessary for μ to be Radon.

(3) τ is said to be an S -topology if it is necessary and sufficient. E is said to be an S -space if there is an S -topology on E' .

Remark. Hilbert space H ($H = H'$) is S -spaceである。実際、 τ_{HS} (Hilbert-Schmidt topology) は S -topology である。Banach space については、 E が S -space であれば、 E は L_0 の部分空間と同型である (E が m.a.p. をもてば、逆も成立。) 特に、 S -space は cotype 2 である。 S -space の閉部分空間は S -space であり、 L_p , $1 \leq p \leq 2$; およびその閉部分空間 (S_p -type) は S -space である。このような空間についての詳細は、Mushtari[8] を参照されたい。

これより、一般の Banach space 上の sufficient topology について考えたい。次に定義する τ_{HS} は、いつでも sufficient である。

Definition 4.2. Let H be a separable Hilbert space.

(1) An operator $T : (E', \tau_\kappa) \rightarrow H$ is said to be of Hilbert-Schmidt type if it is factorizable by a Hilbert-Schmidt operator between Hilbert spaces.

(2) The Hilbert-Schmidt topology τ_{HS} on E' is the weakest vector topology making all Hilbert-Schmidt operators $T : (E', \tau_\kappa) \rightarrow H$ continuous.

Remark. $T : (E', \tau_\kappa) \rightarrow H$ が Hilbert-Schmidt type であるための必要十分条件は、ある 2-summing operator $S : H \rightarrow E$ が存在して、 $T = S'$ となることである。

また、 τ_{HS} は locally convex topology であり、その位相は τ_κ -continuous seminorms $\{\|T(\cdot)\|_H\}$ の family で定義される。もちろん、これらの seminorms は Hilbertian である。

(seminorm が Hilbertian とは、associated Banach space が Hilbert space ということである。) 一般に、associated Banach space が、type p , cotype q , m.a.p. 等をもつとき、seminorm がそれらの性質をもつといい、そのような seminorms の family で定義された locally convex topology τ は、type p , cotype q , m.a.p. 等をもつということにする。

Hilbert space H 上の sufficient topology τ が Hilbertian であれば、 $\tau \leq \tau_{HS}$ となる。より一般の結果については、以下で述べる。従って、 τ_{HS} より真に強い H 上の sufficient

topology τ を見いだすためには、 τ の性質を考察する必要がある。次に定義する τ_m は、 τ_{hs} より真につよい。

Definition 4.3. Let H be a separable Hilbert space, $\| \cdot \|$ a continuous seminorm on H , and B the associated Banach space.

(1) $\| \cdot \|$ is said to be measurable (in the sense of Gross) if $i': B' \rightarrow H$ is a Λ_2 -operator, where $i: H \rightarrow B$ is the natural map. In this case, if i is one-to-one ($\| \cdot \|$ is norm), then (i, H, B) is called an abstract Wiener space.

(2) The topology τ_m on H is the weakest vector topology making all measurable seminorms on H continuous.

Remark. すべての measurable seminorms が m.a.p. をもつわけではないが、 τ_m は m.a.p. をもつ measurable seminorms の fundamental family によって定義される。従って、 τ_m は m.a.p. をもつ。また、Hilbert-Schmidt type でない Λ_2 -operator が存在するので、 $\tau_m > \tau_{hs}$ である。 τ_m より真に強い sufficient topology は知られていない。次の結果は、sufficient topology であるための必要条件を与える。

Theorem 4.1. Let τ be a locally convex topology on H ; τ is defined by the family of continuous seminorms

$\{\|\cdot\|_\alpha\}$. If τ is sufficient, then for each $\|\cdot\|_\alpha$, the natural map $: H \rightarrow B_\alpha$ is dual completely summing, where B_α is the associated Banach space.

Remark. τ が m.a.p. をもつとき、各 natural map $: H \rightarrow B_\alpha$ が dual completely summing ならば、定理 2.5 より、 τ は sufficient topology である。同様の結果は、 τ が type 1 を仮定しても言える。すなわち、 τ が m.a.p. or type 1 を仮定すると、sufficient であるための必要十分条件が得られたことになる。

Corollary 4.2. Let τ be a sufficient topology on H . If τ has type 2, then $\tau \leq \tau_m$.

Remark. τ が unconditional basis, local unconditional structure, あるいはもっと一般に、G.L.P. をもつような場合は、 τ が sufficient で finite cotype (cotype 2) をもてば、 $\tau \leq \tau_m$ ($\tau \leq \tau_{HS}$) となる。特に、 τ が S_p -type, $1 \leq p \leq 2$, のときは、 τ が sufficient ならば、 $\tau \leq \tau_{HS}$ となる。

Hilbert space H 上の sufficient topology について、最後に、Okazaki [9], Sato [12] による結果を紹介する。

(E, τ) : locally convex Hausdorff space, $H \subset E$ (dense), inclusion map $i : H \rightarrow (E, \tau)$ は連続とする。 H 上の標準

Gaussian c.m. γ_H に対し、 $i(\gamma_H)$ が (E, τ) 上の Radon measure であるとき、 (i, H, E) は A.W.S. という。このとき、 $\tau \leq \tau_m$ であるから、 τ は sufficient である。

Theorem 4.3. Let (i, H, E) be an abstract Wiener space. Then for each continuous c.m. μ on E' , the image $i'(\mu)$ is a Radon measure on H .

次に、Banach space 上の sufficient topology について考える。

Theorem 4.4. Let τ be a locally convex topology on E' such that $\tau \leq \tau_k$. Suppose that τ is Hilbertian.

- (1) If τ is sufficient, then $\tau \leq \tau_{HS}$.
- (2) If every τ -continuous p -stable c.m., $0 < p < 2$, on E is Radon, then $\tau \leq \tau_{HS}$.
- (3) If E is of cotype 2, and if every τ -continuous Gaussian c.m. on E is Radon, then $\tau \leq \tau_{HS}$.
- (4) If τ is an S-topology, then E is isomorphic to a Hilbert space.

Remark. $p = 2$ のとき、(2) は成立しない。他方、(4) は Mushtari の結果である。(3) に関連しては、次が成立。

Theorem 4.5. E is of cotype 2 iff every Gaussian Radon probability measure on E is τ_{HS} -continuous.

Theorem 4.6. Suppose that E is of type p , $0 < p \leq 2$.

Then the following assertions are equivalent.

- (1) For each p -stable c.m. μ on E , μ is Radon iff it is τ_{HS} -continuous.
- (2) E is isomorphic to a Hilbert space.

Remark. Every Banach space is of type p , $0 < p < 1$.

Theorem 4.7. Let τ be a locally convex topology on E' such that $\tau \leq \tau_K$. Suppose that τ has type p , $0 < p < 2$. Then τ is sufficient iff every τ -continuous p -stable c.m. μ on E is Radon; that is, the τ -continuity is sufficient for μ to be Radon.

Remark. $p = 2$ のときは、 τ が Hilbertian でも成立しない。これに関しては、次が成立。

Theorem 4.8. Let τ be a locally convex topology on E' such that $\tau \leq \tau_K$. Suppose that E is of cotype 2, and τ has type 2. Then τ is sufficient iff every τ -continuous Gaussian c.m. on E is Radon.

ここで、 Λ_p -operator $T : E' \rightarrow L_p$, $0 < p \leq 2$, で定義される E' 上の vector topology τ_p を導入する。(これに関しては、Mushtari [8]、Linde [4] を参照。)

Definition 4.4. τ_p is the weakest vector topology

on E' making all Λ_p -operators $T : E' \rightarrow L_p$ continuous;
 τ_p is locally convex if $p \geq 1$.

Remark. $\tau_p \leq \tau_k$ 、 $\tau_p = \tau_q$ for $0 < p, q < 1$ 、等は知られている。明らかに、 τ_p は type q ($q < p < 2$)、 τ_2 は Hilbertian である。 τ_2 -連続な任意の Gaussian c.m. は Radon であることが知られている。次の結果は Mushtari による。

Theorem 4.9. E is of cotype 2 iff τ_2 is sufficient.

Definition 4.5. Let $0 < p, q \leq 2$.

- (1) E is said to be of M -cotype p (in the sense of Mushtari) if τ_p is sufficient.
- (2) E is said to be of cotype (q, p) (in the sense of Mathe) if every τ_p -continuous q -stable c.m. on E is Radon.

Remark. 容易に分かることは、 τ_p ($p < 1$) は necessary、従って、 E が S -space であることと、 M -cotype p ($p < 1$) であることは同等である。定理 4.9. は、cotype 2 と M -cotype 2 が同等であるということである。次の結果は知られているが (Linde[4])、定理 4.7 から従う。

Corollary 4.10. E is of M -cotype p iff it is of cotype (q, p) with $q < p$.

最後に、 p -stable c.m. の class に対する S -topology

をもつ Banach space を考える。これについて、次が成立。

Theorem 4.11. Let $0 < p \leq 2$. Then the following assertions for E are equivalent.

- (1) There exists a vector topology τ on E' such that for each p -stable c.m. μ on E , the τ -continuity of μ is necessary and sufficient for μ to be Radon.
- (2) E is of cotype (p, p) .

Remark. Every Banach space is of cotype $(2, 2)$.

M -cotype p , cotype (q, p) の Banach space について、多くの結果が知られている。また、type p の class に対する S -topology も考えられるが、それらは別の機会にふれたい。

References

- [1] R.M. Dudley : Random linear functionals, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 1-24.
- [2] L. Gross : Harmonic analysis on Hilbert space, Mem. Amer. Math. Soc. 46 (1963).
- [3] H.H. Kuo : Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463, Springer-Verlag, 1975.
- [4] W. Linde : Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Tubner-Texte zur Math. 58,

Leipzig, 1983.

- [5] W.Linde and A.Pietsch : Mappings of Gaussian cylindrical measures in Banach spaces, Theory Prob. Appl. 19 (1974), 445-460.
- [6] P.Mathé : A note on classes of Banach spaces related to stable measures, Math. Nachr. 115 (1984), 189-200
- [7] R.A.Minlos : Generalized random processes and their extension to measures, Trudy Moskov. Obsc. 8 (1959), 497-518.
- [8] D.Kh.Mushtari : Spaces of cotype p , $0 < p \leq 2$, Theory Prob. Appl. 25 (1980), 105-117.
- [9] Y.Okazaki : Bochner's theorem on measurable linear functionals of a Gaussian measure, Ann. Prob. 9 (1981), 663-664.
- [10] Y.Okazaki and Y.Takahashi : Accessible cylindrical measure and Bochner's theorem, J. Functional Anal. 67 (1986), 115-125.
- [11] Y.Okazaki and Y.Takahashi : The converse of Minlos' theorem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. (to appear).
- [12] H.Sato : Gaussian measurable dual and Bochner's theorem, Ann. Prob. 9 (1981), 656-662.

- [13] V.Sazonov : A remark on characteristic functionals,
Teor. Veroj. i. Prim. 3 (1958), 201-205.
- [14] L.Schwartz : Geometry and probability in Banach
spaces, Lecture Notes in Math. 852, Springer-
Verlag, 1981.
- [15] Y.Takahashi and Y.Okazaki : On the relationship
between γ_p -radonifying operators and other operator
ideals in Banach spaces of stable type p ,
Math. Ann. 281 (1988), 145-156.
- [16] Y.Umemura : Measures on infinite dimensional vector
spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1 (1965), 1-47.