

「くさびの刃定理」と「超函数の特異性の分解」

東大・理 森 本 光 生

§0 序

1956年に Bogolyubov は「くさびの刃定理」(Edge of the Wedge Theorem) を シアトルで講演発表した。この定理は、一変数函数論での Painlevé の定理の多変数への拡張であるが、量子場の理論に直接応用されるので [8], 物理学者、数学者の協力により、一般化されてゐた。([1]) Martineau は 1964 年にリスボンで「くさびの刃定理」をコホモロジー的にとらえることにより、新しい証明を発表した。このアイデアを一言でいうと、「くさびの刃定理」は「正則函数の位相的境界値とコホモロジー的境界値の一致の原理」と「超函数に対するくさびの刃定理」の直接の帰結であるということである ([2])。以下において我々は、この Martineau の理論の概略を説明し、これを佐藤幹夫氏による「超函数の特異性の分解理論」との関係と説明する。詳しい証明つき議論が [2], [6] においてなされてゐるから、ここでは一切証明

と述べない.

尚、この1-トで超函数は hyperfunction を意味し、Schwartz の意味の超函数は "超函数 $\in \mathcal{D}'$ " と書くことにする.

§1 古典的なくさびの可定理

普通 くさびの可定理と呼ばれている定理の復習のために、[1] p63~68よりいくつか定理をぬき書きする.

定理1 (Painlevé)

複素平面の実軸と交わる領域を $\tilde{U}$ とする. $\tilde{U}$ で連続であり実軸上にならぬ $\tilde{U}$ の点で正則な函数 $\varphi(z)$ は $\tilde{U}$ で正則である.

定理2 (Bogolyubov)

$\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ を原点を頂点とする開いた角領域 (ひらき方 $< \pi$) とする. $\mathbb{C}^2$ の原点 0 の近傍 $\tilde{U} \ni 0$ に対し Γ のみに依存する別の近傍 $\tilde{U}' \ni 0$ が存在し, $\tilde{U} \cap T(\overline{\Gamma \cup -\Gamma})$ で連続かつ $\tilde{U} \cap T(\Gamma \cup -\Gamma)$ で正則な函数 φ は $\tilde{U}'$ まで解析接続できる.

($A \subset \mathbb{R}^2$ に対し $T(A) = \mathbb{R}^2 \times iA \subset \mathbb{C}^2$ と書く).

定理3 (Malgrange - Zerner)

$\Gamma = \{y_1 > 0, y_2 > 0\}$, $\partial\Gamma = \{y_1 = 0, y_2 \geq 0\} \cup \{y_1 \geq 0, y_2 = 0\}$ とする. $\mathbb{C}^2$ の原点 0 の近傍 $\tilde{U} \ni 0$ に対し, 別の近傍 $\tilde{U}' \ni 0$ が

存在し, $\tilde{u} \cap T(\partial\Gamma)$ で連続かつ $T(\partial\Gamma)$ の複素パラメータ
 について正則な函数 g は $\tilde{u}' \cap T(\Gamma)$ まで正則に拡張できる.

この定理 2, 3 はもちろん n 変数に対しても成立するが
 Martineau は 次のような一般化を行, 在 [3]:

定理 4

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ を R^n に与えられた頂点と原点とする閉じ
 た凸錐で, どれも全直線を含まないとする. C^n の原点 0 の近
 傍 $\tilde{u}$ に対し, 別の近傍 $\tilde{u}' \ni 0$ が存在して, 次の性質をもつ:
 φ_j を $\tilde{u} \cap T(\Delta_j)$ に台をもつ $\tilde{u}$ 上の超函数 $\in \mathcal{D}'(\tilde{u})$ で $T(\Delta_j)$
 の複素パラメータについて相対内部で正則かつ $\mathcal{D}'$ の "みで"
 境界値 $\delta_{\Delta_j} \varphi(x) = \lim_{\substack{y \downarrow 0 \\ y \in \Delta_j}} \mathcal{D}'\text{-}\lim \varphi_j(x+iy)$ が存在すると仮
 定する.

今 $\sum_{j=1}^m \delta_{\Delta_j} \varphi(x) = 0$ が $\tilde{u} \cap \{Im=0\}$ で成り立てば,
 $\tilde{u}' \cap T(\gamma(\Delta_j \cup \Delta_k))$ に台をもつ $\tilde{u}'$ 上の超函数 $\psi_{jk} \in \mathcal{D}'$
 で $T(\gamma(\Delta_j \cup \Delta_k))$ の複素パラメータについて正則なものが
 存在し, $\varphi_j(z) = \sum_{k \neq j} \psi_{jk}(z)$ $z \in \tilde{u}' \cap \Delta_j$
 が成り立つ.

(ここで $\gamma(A)$ は A の凸包を表わす).

§2 Martineau による証明

今 Δ が R^n の原点と頂点とする閉じた凸錐で内点をもつ

と仮定する. φ は $\tilde{U} \cap T(\Delta)$ の内部で正則な函数とすると,
 良く知られているように, いっども超函数の $\tilde{U}$ での境界値

$$\mathcal{B}\text{-}\lim_{y \rightarrow 0, y \in \Delta} \varphi(x+iy)$$

を考えることが出来る. Δ が内点を持つ場合にもこの境界値の概念は拡張出来る. Martineau は次の定理を証明した.

定理5 (正則函数の境界値の一致の原理)

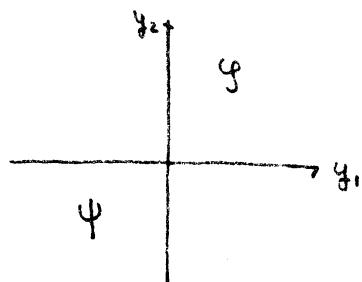
φ が $\tilde{U} \cap T(\Delta)$ に台をもつ $\tilde{U}$ 上の超函数 $\in \mathcal{D}'$ で, $T(\Delta)$ の複素パラメータについて相対内部で正則とする. もし 互相的な境界値 $\mathcal{D}'\text{-}\lim_{y \rightarrow 0, y \in \Delta} \varphi(x+iy)$ が存在すれば, それはユニモロジ-的境界値と一致する:

$$\mathcal{D}'\text{-}\lim_{y \rightarrow 0, y \in \Delta} \varphi(x+iy) = \mathcal{B}\text{-}\lim_{y \rightarrow 0, y \in \Delta} \varphi(x+iy).$$

= の定理は [2] において 正則函数芽の層 $\mathcal{O}$ の distributions prolongeables による分解を用いて証明されている. = の定理は 定理4の証明の第1段階であり, 第2段階は超函数に対して定理4と全くことである. これは代数的計算でありわりと簡単である. 実際 $n=1$ ならば 超函数に対する "Painlevé の定理" は超函数の定義の系である. $n=2$ の場合に Bogolyubov の定理を超函数に対してといてみよう. 簡単のため $\Gamma = \{y_1 > 0, y_2 > 0\}$ とする. $\tilde{U}$ は Stein 開集合と仮定して一般性を失わない. = の時.

$$\begin{aligned}
 B(u) &= H^2_{\tilde{u}, R^2}(\tilde{u}; \mathcal{O}) \\
 &= H^1(\{z \in \tilde{u}; y_1 > 0\}, \{z \in \tilde{u}; y_2 > 0\}, \{z \in \tilde{u}; y_1 < 0\}, \\
 &\quad \{z \in \tilde{u}; y_2 < 0\}; \mathcal{O})
 \end{aligned}$$

である. $z = (z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ である.



$$B\text{-}\lim \varphi = B\text{-}\lim \psi \quad \text{とあること.}$$

$$\alpha_{1,2} = \varphi, \quad \alpha_{1,-2} = 0$$

$$\alpha_{-1,2} = 0, \quad \alpha_{-1,-2} = -\psi$$

なる 1-コサイクルの定める超函数

は零である. つまり $\exists \beta_1, \beta_{-1}, \beta_2, \beta_{-2}$ で $\varphi = \beta_2 - \beta_1$,

$0 = \beta_{-2} - \beta_1$, $0 = \beta_2 - \beta_{-1}$, $-\psi = \beta_{-2} - \beta_{-1}$ である. (つまり 1-コサイクル α は 0-コチェイン β のコバウンダリ

に等しい). $\beta_1 = \beta_{-2}$ だから Bochner の定理により, ε

は 0 のある近傍まで解析接続され, ε を正則函数と定める.

$\varepsilon = \beta_1 = \beta_{-2}$, $\gamma \beta_2 = \beta_{-1}$ により "2 点同様に", 0

のある近傍で正則な函数 ε' があって $\varepsilon' = \beta_2 = \beta_{-1}$ となる.

故に $\varphi = \varepsilon' - \varepsilon$, $\psi = \varepsilon' - \varepsilon$. よって φ と ψ が互に解析接続可能な事が示された.

以上の証明で本質的なのは (管状領域の正則性に関する)

Bochner の定理で, α とはコホモロジーの計算にすぎない.

多変数の場合に上の証明法を拡張するには まず Bochner の定理を拡張しなくてはならない. 二れが以下に述べる消滅

定理である. まず Bochner の定理を相対コホモロジーの言葉に翻訳しよう.

$G = \{y_1 \leq 0, y_2 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ とおく. 次のコホモロジー空間の列は完全である.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0_{\tilde{u} \cap T(G)}(\tilde{u}; \theta) &\rightarrow H^0(\tilde{u}; \theta) \rightarrow H^0(\tilde{u} \cap T(G)^c; \theta) \\ &\rightarrow H^1_{\tilde{u} \cap T(G)}(\tilde{u}; \theta) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

まず 解析接続の一貫性より, $H^0_{\tilde{u} \cap T(G)}(\tilde{u}; \theta) = 0$ ができる. Bochner の定理よりは,

$$H^1_{\tilde{u} \cap T(G)}(\tilde{u}; \theta) \rightarrow H^1_{\tilde{u}' \cap T(G)}(\tilde{u}'; \theta)$$

の像がゼロになることがいえる. とくに, 次の結果をえる:

$$\lim_{\tilde{u} \downarrow u} \dim H^j_{\tilde{u} \cap T(G)}(\tilde{u}; \theta) = 0, \quad j=0, 1.$$

==> $u = \tilde{u} \cap \mathbb{R}^2$ と表わす. もっと一般に 次の定理が成り立つ.

定理6

$G \subset \mathbb{R}^n$ の原点と頂点とする閉じた凸錐で, 全直線と含まないとする. このとき 任意の開集合 $u \subset \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\mathcal{H}^j(u; T(G); \theta) = \lim_{\tilde{u} \downarrow u} \dim H^j_{\tilde{u} \cap T(G)}(\tilde{u}; \theta)$$

==> $\overset{j \neq n}{=} 0$. この種の定理は, Martineau [2], 森本 [5, 6] によって得られた. 最近 柏原 [7] により 拡張精密化されている.

くまびの刃の定理は 定理6より, コホモロジーの計算と

実行することによって得られる。この計算に意味と見通しを与えらるものが佐藤幹夫氏の超函数の特異性分解の理論である。

§3 超函数の特異性の分解理論 [7]

我々の目的にそうようにこの理論を述べる。

V は n 次元実ベクトル空間, V^* とその双対空間とする。
 $S^* = V^*/R^+$ と V^* の原点を中心とする単位球とを同一視する。
 $S^* \supset I$ が凸とは $\tilde{I} = \bigcup_{t>0} tI$ が凸かつ $\tilde{I} \neq V^*$ のことと定義する。今 $V \times S^*$ 上に 1 つの層 C を作り、

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} \pi_* C \rightarrow 0$$

が完全になるような写像 β を作ることを佐藤の理論の目的の 1 つである。ここで A は V 上の実解析函数芽の層, B は V 上の超函数芽の層, $\alpha: A \rightarrow B$ は自然な単射。
 $\pi_* C$ は $\pi: V \times S^* \rightarrow V$ なる自然な射影による層 C の順像を表わす。

層 C と写像 β を我々の定理 6 を用いることにより次のように構成することが出来る:

I は S^* の部分集合としよう、

$$D(I) = \{ x \in V; (x, \xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in I \}$$

$$TD(I) = V \times i D(I) \quad \text{とおこう。もし } I \text{ が開いてい}$$

れば、 $TD(I)$ は全直線と含まない V の閉じた凸錐である。 $u, v \in V$ の開集合、 $I, J \in S^*$ の開凸集合とする。今 $u \times I \supset v \times J$ ならば $u \supset v$, $TD(I) \subset TD(J)$ が成り立つから、制限写像: $\mathcal{H}^n(u; TD(I)) \rightarrow \mathcal{H}^n(v; TD(I))$ と自然な写像: $\mathcal{H}^n(v; TD(I)) \rightarrow \mathcal{H}^n(v; TD(J))$ が定義できる。 $\equiv \equiv$

$$\mathcal{H}^n(u; TD(I)) = \lim_{\substack{\tilde{u} \downarrow u \\ \text{ind}}} H_{\tilde{u} \cap TD(I)}^n(\tilde{u}; \theta)$$

なる記号を用いた。 $\equiv$ の二つの写像を合成して、

$$\text{写像: } \mathcal{H}^n(u; TD(I)) \rightarrow \mathcal{H}^n(v; TD(J))$$

がえられる。 $\equiv$ の写像は、 $u \times I$ を動かすときに鎖条件を満足することは明らかである。したがって $\equiv$ の写像と対応: $u \times I \mapsto \mathcal{H}^n(u; TD(I))$ は $V \times S^*$ 上の準層と定義する。この準層に同伴する層を C と定義する。

定理7

$u \in V$ の開集合、 $I \in S^*$ の開凸集合とする。層 C の $u \times I$ 上の横断面の全体 $C(u \times I)$ は次の式で与えられる:

$$C(u \times I) = \lim_{\substack{I' \subset I \\ \text{proj}}} \mathcal{H}^n(u; TD(I'))$$

$\equiv \equiv$ I' は I に真に含まれる凸開集合を表わす。

次に写像 β を作る。まず

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \mathcal{H}^n(u; V) = \lim_{\text{ind}} H_{\tilde{u} \cap V}^n(\tilde{u}; \theta) \\ &= H_{\tilde{u} \cap V}^n(\tilde{u}; \theta) \end{aligned}$$

に注意しよう. S^* の任意の凸閉集合 I に対して $V \subset TD(I)$ であるから 自然な写像

$$\beta_I: \mathcal{H}^n(u; V) \longrightarrow \mathcal{H}^n(u; TD(I))$$

が存在する. この β_I と はり合わせて, 写像

$$\beta: \mathcal{B}(u) = \mathcal{H}^n(u; V) \longrightarrow C(u \times S^*) = (\pi_* C)(u)$$

が定義される.

定理 8

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(u) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}(u) \xrightarrow{\beta} C(u \times S^*) \longrightarrow 0$$

は完全列である.

この層 C を用いると, u 上の超函数がある正則函数の境界値となるための必要十分条件が次のように書ける.

定理 9

Γ を V の原点を頂点とする開凸錐とする. $u \in V$ の開集合とする. 今 S^* 上の開凸集合 I を $\bar{\Gamma} = -D(I)$ となるようにえらぶ. この時 $f \in \mathcal{B}(u)$ に対し $\text{supp } \mathcal{D}(f) \subset u \times \bar{I}$ が成り立つための必要かつ十分条件は 任意の開凸錐 $\Gamma' \subset \Gamma$ に対し u の複素直線 $\tilde{u}_{\Gamma'}$ と $\tilde{u}_{\Gamma'} \cap T(\Gamma')$ で正則な函数 $g_{\Gamma'}$ が存在して $f(x) = \mathcal{B}\text{-}\lim_{y \rightarrow 0, y \in \Gamma'} g_{\Gamma'}(x+y)$ となることである.

又境界値 $\mathcal{E}$ と作用素 $\mathcal{B}\text{-}\lim$ は単射であることが, 写像 α の単射性と同様に示せる. つまり

定理 10

境界値をとる作用素 $\beta\text{-lim}$ は単射的である.

今1つ記号を導入する.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}^0(u; T(\Gamma)) &= \lim_{\substack{\Gamma' \subset \Gamma \\ \Gamma' \downarrow u}} \text{ind } \mathcal{H}^0(u; T(\Gamma')) \\ &= \text{即ち } \mathcal{H}^0(u; T(\Gamma)) = \lim_{\substack{\Gamma' \subset \Gamma \\ \Gamma' \downarrow u}} \text{ind } H^0(u \cap T(\Gamma'); \mathcal{O}) \text{ である.} \\ & \text{この記号を用いると, 上の定理 9, 10 は次のように言い換えられる:}\end{aligned}$$

ユホモロジ-的境界値 $\beta\text{-lim}$ は $\tilde{\mathcal{H}}^0(u; T(\Gamma))$ から $\beta(u)$ の中への写像と考えられる. この写像は単射的であり, 像は $\text{supp } \beta(f) \subset u \times \bar{I}$ となる超函数 f の全体と一致する.

以上の定理 7, 8, 9, 10 は 定理 6 よりユホモロジ-の計算によって導き出される. 証明付きの詳細は [6] に書いたからここでは結果を述べるにとどめる.

さて くまびの刃の定理にもどろう. 次の形で くまびの刃定理を証明する.

定理 11 (超函数に対する くまびの刃)

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ を V の原点と頂点とする開凸錐とする.
今 $u \subset V$ を開集合とし $\varphi_j \in \tilde{\mathcal{H}}^0(u; T(\Gamma_j))$ が与えられてゐると仮定する. (φ_j は 正則函数の“芽”である).
今 $\sum_{j=1}^m \delta_{\Gamma_j} \varphi_j = 0$ とする. ($\delta_{\Gamma_j} = \beta\text{-lim}_{\Gamma_j}$ と略記し T_j)
このとき $\psi_{jk} \in \tilde{\mathcal{H}}^0(u; T(\Gamma_j \cup \Gamma_k))$ が存在して

$\varphi_j = \sum_{k \neq j} \psi_{jk}$ が $\tilde{\mathcal{H}}^0(u; T(\Gamma_j))$ で成り立つ。

証明

$f = \delta_{\Gamma_j} \varphi_j = - \sum_{k \neq j} \delta_{\Gamma_k} \varphi_k$ なる超函数を考えよう。

$$\text{supp } \beta(f) \subset u \times (\bar{I} \cap (\bigcup_{k \neq j} \bar{I}_k)) = \bigcup_{k \neq j} (u \times \overline{I_j \cap I_k})$$

==> I_j は $-\bar{\Gamma}_j = D(I_j)$ となる S^* の開凸集合である。

今 C の性質 (定理9) により 定理11でいうような ψ_{jk} が存在して

$$\delta_{\Gamma_j} \varphi_j = \sum_{k \neq j} \delta_{\chi(\Gamma_j \cup \Gamma_k)} \psi_{jk} \quad \text{となる。}$$

何故ならば $D(I_j \cap I_k) = -\chi(\Gamma_j \cup \Gamma_k)$ であるからである。(==> 層 C の "分解可能性" を用いている。これは

我々の議論だけでは示えていないが、佐藤幹夫氏の Radon 変換の考えを用いると証明できる。数研研で話した時には気が付かなかったが、その後 代数解析セミナーの方々に指摘を受けた。) $\delta_{\chi(\Gamma_j \cup \Gamma_k)} \psi_{jk} = \delta_{\Gamma_j} \psi_{jk} \quad (j \neq k)$ が成り立つから δ_{Γ_j} の単射性より求める関係式がえられる:

$$\varphi_j = \sum_{k \neq j} \psi_{jk}.$$



§4 あとがき.

数研研で話した原稿とはほとんど同じであるが、いくつかの点と訂正した。重大な所は 定理7 と 定理9 で、話した形では正しくないと 代数解析セミナーのメンバーの方々に

御指摘を受けた。佐藤氏の特異性の分解理論^[7]の概略はこのシンポジウムでも講演があったが、1969年夏の聖田シンポジウムの報告集、1970年春の片瀬のシンポジウムの報告集に発表される予定になっている。

又くエビの刃の定理と我々は定理11の形で証明したが、これは層Cの理論との関連の上ではもっとも良い形だと思う。ここではMalgrange-Zerner型のくエビの刃定理が脱落している。これは層Cの理論が実解析的座標変換に対して不変なものに対し、Malgrange-Zerner型のくエビの刃定理はそうではないことに帰因する。だからこの脱落はもっともなのである。尚Malgrange-Zerner型のくエビの刃の定理はもちろん、定理4も超函数に対して成り立つ[4]。Malgrange-Zerner型のくエビの刃定理の証明も代数化が試みられている[10]。

§5 文献

- [1] 梶原康二 複素関数論 森北出版
- [2] A. Martineau: Distributions et Valeurs au bord des fonctions holomorphes. Proc. Intern. Summer Course on the Theory of Distributions, Lisbon, 1964. p195-326.

- [3] A. Martineau, Théorèmes sur le prolongement analytique du type "Edge of the Wedge Theorem". Séminaire Bourbaki, 20^{ème} année. N° 340 (1967)
- [4] A. Martineau. Le "Edge of the Wedge Theorem" en théorie des hyperfonctions de Sato, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis. Tokyo. 1969.
- [5] M. Morimoto; Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier 19(2).
- [6] M. Morimoto. Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Section 1 Vol 17.
- [7] M. Sato. Hyperfunctions and Differential equations Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis. Tokyo. 1969.
- [8] R.F. Streater & A.S. Wightman: PCT, Spin & Statistics, and all that, Benjamin.
- [9] 柏原正樹: この報告集にのる講演
- [10] M. Morimoto: Une remarque sur le théorème du "Edge of the Wedge" de A. Martineau. Proc. Japan Acad. Vol 45, N° 6. (1969) pp 446-448.