

極小モデルと退化

阪大 角田秀一郎

§1. はじめに, 1981年域ノム奇ニホニツム における筆者の拙文に誤りがありましたので, 訂正させていただきます.

非特異射影多様体 X と非特異曲線 Δ との間の全射 $\pi: X \rightarrow \Delta$ で次の条件を満たすものを考えます:

(i) $\pi^{-1}(P)$ は, reduced で連結, かつ単純正規交叉, $\pi^{-1}(P)$ は Δ の任意の点,

(ii) $\pi^{-1}(P)$ の非特異ファイバーは, $\pi^{-1}(P)$ の標準因子 $K(\pi^{-1}(P))$ は nef.

この条件のもとで, 結論は次の通り.

定理. 正規射影多様体 X と双有理写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ があって

(i) $\pi' := \pi \circ \varphi^{-1}$ は正則写像,

(ii) φ は特異ファイバーが同型,

(iii) Y は高々 terminal 特異点 (定義については, 本報告集の又別の論文参照),

(iv) $K(Y)$ は π' に関して, 相対的 nef.

前の拙著において, Y が満たすべき特異点の範囲についていた. これから, この特異点について説明します.

そのために, 2つの概念を導入します (実は本質的に同じものです).

定義1. $\pi: X \rightarrow \Delta$ は前の通りとします. 双有理写像の列

$$X = Y_n \xrightarrow{f_n} Y_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} Y_{n-2} \cdots \rightarrow Y_1 \xrightarrow{f_1} Y_0 = Y$$

以下の条件を満たすとする:

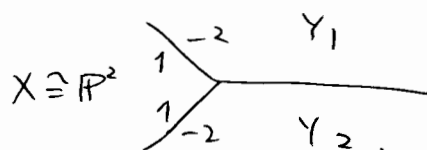
- (1) f_i は $\mathcal{C}_i$ のある特異ファイバーに属する素因子 D_i を、点 π_i について、
- (2) $-K(\mathcal{C}_i)|_{D_i}$ は ample であり、
 $\ker(\mathrm{Pic}(\mathcal{C}_i) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathrm{Pic}(D_i) \otimes \mathbb{Q}) = 1$,
- (3) X が "ある $\mathcal{C}_i$ の特異ファイバー F の素因子" であれば、
 $(X, F-X)|_X$ は高々 $\log$ -terminal 特異点、
 X の 全 proper transform は, minimal resolution.

このとき、 $\mathcal{C}_i$ は高々特別 $\mathrm{terminal}$ 特異点をもちと定義します。この定義について少し注意すると、まず、(1) の条件から帰納的に、 π から誘導される有理写像は必ずしも成り立つとはなることがわかります。 (2) の条件からこれも帰納的に $\mathcal{C}_i$ がすべて $\mathrm{terminal}$ 特異点のみもつことがわかり、したがって (2) も意味をもちます。

(1), (2) は、 $\mathrm{terminal}$ 特異点に対する条件としてそれほど強いものではありません (この報告集の川又氏、森氏の論文参照)。

次に特別 $\mathrm{terminal}$ 特異点の例を上げます。実は、これらからある意味で特別 $\mathrm{terminal}$ 特異点を特徴づけられます。

例 1. π, π を上の通りとせ、 F を特異ファイバーとします。以下 π の記号を使います。 F が $F = X + Y_1 + Y_2 + Z$ という分解をもちと仮定します。ここで、 X, Y_1, Y_2 は既約で、 Z は残りです。ここで、 X は $\mathbb{P}^2$ と同型で、 X, Y_1, Y_2, Z の configuration は次の図のようだとします。



$\equiv \mathbb{P}^2$ — は double curve, double curve の
両方きの数はそれぞれその double curve を含む素因子
(既約曲面) 内での交点数とあわせて、

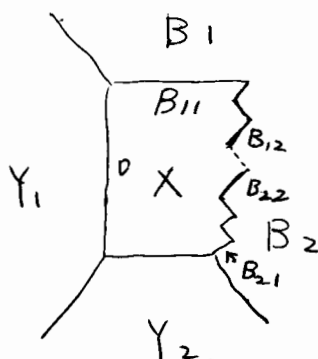
つまり、言葉で書けば、 X は、 Y_1, Y_2 との 4 交わり
の交わりは $\mathbb{P}^2$ の line で、 Y_1, Y_2 内では X の決める
double curve は -2 の自己交点数とあわせて、

このとき、 X の contraction は、特別 terminal
特異点とあわせて容易に check されます。

これをもとに、orbital type の特異点を定義します。
まず、例 1 の特異点は、orbital type とします。
次に帰納的に次のように orbital type を定義する。

例 2. $F = B_1 + B_2 + X + Y_1 + Y_2 + Z$ を、 F の分解で
次のようなものとする：

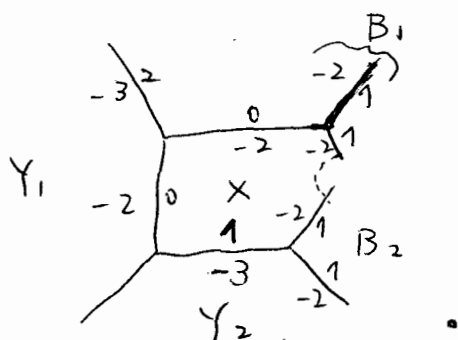
B_1, B_2 は、orbital type の特異点を定義し、
 X, Y_1, Y_2 は既約、 Z は残りとします。また、 B_1, B_2 、
 X, Y_1 と Y_2 の配列は、次の通り：



$\equiv \mathbb{P}^2$, $\dots$ は $\overbrace{B_2 \neq 0 \text{ のとき}}^{(-1) \text{ curve}}$ $\left(\overbrace{B_2 = 0 \text{ のとき}}^{0\text{-curve}} \right)$,

言葉で書けば, B_1 は, X と Y_1 にのみ交わり,
 B_2 は X と Y_2 に交わり, X は 有理曲面 $\mathbb{P}^2$ である
 $ruling$ に對して, $fibers$ には (-1) curve がある
 高さ 1 本とします. $Y_1' = Y_1/X$, $Y_2' = Y_2/X$
 $B_1' = B_1/X$, $B_2' = B_2/X$ とおけば, Y_1' は上の $ruling$ に對する
 $fibers$, Y_2' は section. B_1' と B_2' は 帰納
 的に, linear chain であることがわかります,
 1 本だけ, B_1' (resp. B_2') は 二つの端成分 B_{11} , B_{12}
 (resp. B_{21} , B_{22}) をもちます. B_{11} は Y_1
 と交わり, B_{21} は Y_2 と交わりとします. B_{11} は
 section $\mathbb{P}^2$, Y_2' とは交わらず, $B_1' - B_{11}$
 と B_2' と (-1) curve がある. X の $ruling$ に對する
 特異ファイバーを構成し, (-1) curve は B_{12} と B_{22}
 に交わる.

この場合, $B_1 + B_2 + X$ は 特別 terminal 特
 異点 になります. $\mathbb{P}^2$ 型の特異点 といえます. $\mathbb{P}^2$ 型
 type の 特異点 といえます. 以下例を書いておきます
 と,



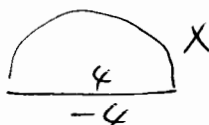
次に, nod type の特異点を定義します.

例3. $F = Y + X + Z$ の分解で, X は
 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の $\mathbb{P}^2$ で, X は Y のみと交わり,

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ には double curve 1本, 自己交点数 2をもつ非特異有理曲線系, $\mathbb{P}^2$ には, conic.



Y

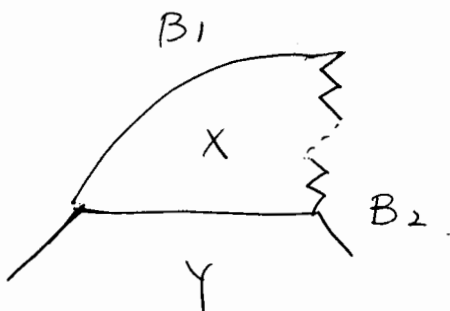


Y

とあるとき, X は特別 terminal sing を定義する, conic type のときと同様に, 帰納的に, nodal type を定義します. 実際, 例3の特異点は nodal type です.

例4. $F = B_1 + B_2 + X + Y + Z$ の2次の5因子分解とします:

- (i) B_1, B_2 は conic type の特異点で定義し, X は有理曲面で, ある ruling に沿って,
- (ii) B_1, B_2, X, Y の配列は2次の通り,



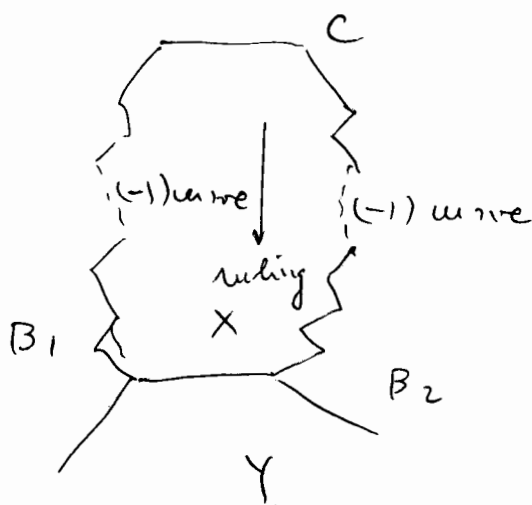
すなわち, $B'_1 = B_1/X$, $B'_2 = B_2/X$, $Y' = Y/X$ とおけば, Y' は $\mathbb{P}^1$ の ruling に沿って, section となり, B'_1 の Y' と交わる component (曲線) がまた section で, B'_1 が残り B'_2 と (ii) curve が特異点1本を

Component $\in A(-1)$ curve $\in B_2$ が B_1 の fiber を構成する。 B_1 の B_1 の edge component $\in (-1)$ curve が交わり、 B_2 の edge component で Y と交わり、 B_1 の (-1) curve と交わり、 Y' は section. ~~curve~~

このとき、 $B_1 + B_2 + C_1 + \dots + C_n + X$ は、特別 terminal 特異点を定義し、これを nodal type の特異点と定めます。

例 16. $F = B_1 + B_2 + C + X + Y + Z$ を $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}^2$ を分解とします; ~~curve~~

- (i) B_1, B_2 は unbel type の特異点、
- (ii) C は nodal type の特異点、
- (iii) $B_1 + B_2 + C + X + Y$ の西記号は $\mathbb{R}^2$ 内回り、



言葉での説明は略す。

~~この場合~~ $B_1 + B_2 + C + X$ の contraction は、特別 terminal sang. となりす。

例 3~例 6 の特殊点の "nod type" の特殊点です。最後に, exceptional type の特殊点を定義します。 P を特別 terminal 特殊点で, P は double curve に含まれないとする。このとき, P は "有理二重点で", cyclic sing. でないとするとき, P は exceptional type の特殊点と呼びます。次の命題の定理の証明のうちの Key になります。

命題 特別 terminal sing. は, corbel type の nod type, exceptional type の特殊点となる, すなわち, ある resolution π とすると, π の pull back と一致する。

証明の方針は, 前の報告と同様で略し, 以下域の奇点の話をしたことの補足等をしてみたいと思います。

§2. V を射影代数多様体とします。 V は高々 terminal 特殊点のみを許すとします。極小モデルの存在がわかりました。次の 2 つの case を V の研究に帰着させます (= これについては "又氏の論文を参照してください") :

Case 1. $-K_V$ が ample

Case 2. K_V が nef.

Case 1 については予想されることは, 次のです
 予想 1. $-K_V$ が ample であらば, V は rationally connected, すなわち, V の任意の 2 点 は rational curve の chain で結ばれる。

この予想に関して、次の定理があります。

定理(森, Kollar) V が "非特異" であれば, V の任意の点を通る有理曲線が存在する。

Case 2 について予想 1 が成り立つとは、
予想 2, ある $m > 0$ が存在して, $m K_V$ が
global sections で生成される。

この予想に関して、知られていゝことは、非常に多く、
一般次元では次の川又氏による2つの定理が知られてゐる、
定理. case 2 の仮定のもとで、

- (i) K_V が "numerically trivial".
- (ii) $K_V^n > 0$ $n = \dim V$

のいずれかが満たせば、予想 2 は正しく、ただ
指標数は 0 とする。

興味ある問題としては指標数が正の時、この定理
は成り立つのかというものが残っています、また予想 2 の
弱い形の次もまだ解けていません。

予想 2': case 2 の仮定のもとで、 $\kappa(V) \geq 0$,
つまり K は 1 年次元です。

この予想 2' について、3次元の場合に、 $\chi(V, \mathcal{O}_V) \leq 0$
がわかれば、予想 2' が OK、ということが、わかっ
ています。