

氷上 忍

初期値が $g_0 = 0$, $g_0 = 6 u_0$ のときは独立な 2 つの Ising 系に等価だから, Ising like な臨界指数が得られ, $0 < g_0 < 6 u_0$ のときは, X-Y like な解が安定な解となる。2次元の Baxter model と異なって今の場合 ($d = 4 - \epsilon$) には臨界指数は連続的変化を示さない。

臨界指数の Feynman-Graph 展開について

東大物理 五十嵐 儀孝

§ 0 Introduction

臨界指数を物理量の転移点での異常性からではなく, 直接的に摂動展開や Recursion 公式により求める方法が進歩しつつある。ここでは特に K. G. Wilson¹⁾ による次元数展開に関し, その方法と Renormalization-Group との関係について述べる。 $d > 4$ で分子場近似が正しいとの予想から, $\epsilon = 4 - d$ を微少量として, 臨界指数を ϵ 展開し, $d \leq 4$ の値を求める画期的方法であるが, 多くの摂動展開と同様 Asymptotic 展開になっている。

§ 1 Free energy-Hamiltonian

$$H/kT = \int \left\{ \frac{1}{2} r_0 s^2(x) + \frac{1}{2} [\nabla s(x) - \nabla^2 s(x)]^2 + u_0 s^4(x) \right\} d^d x \quad (1)$$

u_0 の項が分子場からのずれを表わしていると考えて, Graph では u_0 で展開する。また $\nabla^2 s$ の項は $k \gg 1$ の発散をとめるために付けたものであり, 場合によっては cut off をする事で除ける。

$s^2 = \sum s^\alpha s^\alpha$ では $1 \leq \alpha \leq n$ で, n は内部自由度を示し, Ising ($n=1$), X-Y, Helium ($n=2$), Heisenberg ($n=3$), spherical ($n=\infty$) に対応する。内部対称性は $s^2 = s^\alpha s^\alpha$, $s^4 = (s^2)^2$ により決定される。また異方性は $s^2 = \sum J_{\alpha\beta} s^\alpha s^\beta$ とすれば考慮できる。

§ 2 Correlation Function と Green 関数

相関関数を Graph の方法で計算する一般的な手段²⁾により, 次の変換をおこなう。

$$x_1 \rightarrow i t, k_1 \rightarrow -i \omega, \nabla^2 \rightarrow \square, d^d x \rightarrow i d t d^{d-1} x \equiv i d x' \quad (2)$$

すると, 相対論的場の理論から, 相関関数を Green 関数で表わす事ができて, 例えば, s の 2 体相関は,

$$\begin{aligned} i \langle s^\alpha(x) s^\beta(y) \rangle &\equiv i \int s^\alpha(x) s^\beta(y) \exp[-\beta H\{s\}] \delta s / \\ &\quad \int \exp[-\beta H\{s\}] \times \delta s \\ &= i \int s^\alpha(x) s^\beta(y) \exp[i \int \mathcal{L}(x') dx'] \delta s / \int \exp[i \int \mathcal{L}(x') dx'] \delta s \\ &= i \langle \hat{T} s^\alpha(x) s^\beta(y) S \rangle_0 / \langle S \rangle_0 \\ &= G^{\alpha\beta}(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで Lagrange 形式から Hamilton 形式に変換すれば,

$$S = T \exp[-i \int \mathcal{H}_1(x') dx'], \mathcal{H}_1(x') = u_0 s^4(x') \quad (4)$$

Wick の定理を用いた後に (2) の逆変換をすると, $G_0^{\alpha\beta}$ は Fourier 変換の形で,

$$G_0^{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{k^2 (k^2 + 1)^2 + r_0} \delta_{\alpha\beta} \quad (5)$$

これで任意の相関関数を Graph の方法を用いて計算することができる。

§ 3 Renormalization of r_0

自己エネルギー部分で k に依存しない部分を r_1 として, $r = r_0 - r_1$ を新しく変数にする。

$$r_1 = r_1(r, \epsilon, u_0) \equiv - \underbrace{\text{loop}}_{k=0} + \underbrace{\text{tadpole}}_{k=0} - \dots \quad (6)$$

以後 $G_0^{\alpha\beta}(k)$ を, このくりこみをした free Green 関数とする。

$$G_0^{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{k^2 (k^2 + 1)^2 + r} \delta_{\alpha\beta} \quad (7)$$

r_1 の定義 (6) の内線 は (7) の G_0 を用いる。ところで r_0 は分子場の χ_0^{-1} であるから $r_0 = T - T_0$ である。また $r_0 = r + r_1(r)$ より, 新しい転移点 $r=0$ に対応する r_0 の値は, $r_{0c} = r_1(0)$ である。すると新しい転移温度 T_c は, $r_{0c} = T_c - T_0$ で与えられるので,

$$r_0 - r_{0c} = r R(r, u_0, \varepsilon) = T - T_c. \quad (8)$$

ここで, $R = 1 + \{r_1(r) - r_1(0)\} r^{-1}$ で定義され, 新たに帯磁率が $\chi = r^{-1} \propto (T - T_c)^{-\gamma}$ なる異常性を示すとすれば

$$R(r, u_0, \varepsilon) \propto r^{\gamma-1}. \quad (r \rightarrow 0) \quad (9)$$

§4 u_R と 4-Body Spin 相関関数

Wilson によれば, $u_R \equiv -g(0, 0, 0)/4! \cdot g^4(0)$ で u_R を定義しているが, $g(0, 0, 0) = G^1(0, 0, 0) - 3G^2(0)$ は 4 体の Cumulant 相関 $Q_4(0, 0, 0)$ であり, $4! g^4$ で割れば 4 体の vertex³⁾ Γ_4 になる。

$$u_R = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \quad (10)$$

Unitarity cond⁴⁾ から u_R の $r \rightarrow 0$ でのふるまいを求める事ができる。Migdal の与えたものを一般次元 d に拡張すると,

$$\Gamma_n = Z^{-n/2} (TM^d)^{1-n/2} \tau_4(p_i/M). \quad (11)$$

$M \rightarrow 0$ で $G = z g(p^2/M^2) \propto p^{\eta-2}$ より, $Z \propto M^{\eta-2}$ となり, $\Gamma_4(p_i \rightarrow 0) \propto z^{-2} \times M^{-d} = M^{4-d-2\eta}$ を得る。ところで, $M \propto (T - T_c)^\nu = r^{\nu/\gamma}$ であるが, $\gamma = \nu(2-\eta)$ なる現象論的な関係をさらに用いれば, $\Gamma_4 \propto r^\omega$, $\omega = \varepsilon - 2\eta/2 - \eta$ を得る。

§5 d-Dimensional Technic

d 次元単位球の表面積 σ_d を $(2\pi)^d$ で割った量が K_d である。計算の都合上 $G_0^{\alpha\beta}$ は (7) の代りに, $G_0^{\alpha\beta} = (k^2 + r)^{-1} \delta_{\alpha\beta}$ を用いて, 適当な cut off をする事もできる。例として次の Graph を調べる。

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: A bubble diagram with two external lines on the left labeled } k/2 \text{ and } k/2, \text{ and two external lines on the right. The bubble has two internal lines. Below the diagram is } r=0. \\
 & = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \frac{1}{(k-p)^2} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p \int_0^1 dx \\
 & \quad \times \frac{1}{\{x(k-p)^2 + (1-x)p^2\}^2} \\
 & = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} d^d p \int_0^1 dx \frac{1}{\{(p-xk)^2 + x(1-x)k^2\}^2} \\
 & = \frac{K_d}{2} \int_0^1 dx \int_0^{\infty} dp p^{1-\epsilon/2} (p+1)^{-2} k^{-\epsilon} \{x(1-x)\}^{-\epsilon/2} \\
 & = \frac{K_d}{2} B(2-\epsilon/2, \epsilon/2) B(1-\epsilon/2, 1-\epsilon/2) k^{-\epsilon} \quad (12)
 \end{aligned}$$

$k \ll 1$ の場合, $\epsilon > 0$ では $u_0 s^4$ 項が効くが, $\epsilon < 0$ では効かず, 分子場近似がよい事を意味している。同様に次の Graph は,

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: A bubble diagram with two external lines on the left labeled } k=0 \text{ and } k=0, \text{ and two external lines on the right. The bubble has two internal lines. Below the diagram is } r \neq 0. \\
 & = \frac{K_d}{2} B(2-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}) r^{-\epsilon/2}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

cut off の方法は種々考えられるが, 例えば (12) では, $k^{-\epsilon} = (1 - \epsilon \ln k + \frac{\epsilon^2}{2} \ln^2 k \cdots)$ と展開すると, $B(2-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ の展開で現れる $\frac{2}{\epsilon}$ で, $\epsilon \rightarrow 0$ で第 0 次項は発散するので, これを除けば, (7) の G_0 を用いた事に相当する。

内部自由度の数は, 外線を $G_0^{\alpha\alpha}$ とし, $\frac{1}{2!} u_0^2 \sum \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{a'b'} \delta_{c'd'}$ の総和をおこなえばよいが, (a, b, c, d) と (a', b', c', d') でそれぞれ 2 つを α 成分と考え固定する。

§ 6 Wilson の Matching Condition

Wilson の臨界指数の求め方は, Kadanoff の picture に従った現象論的な要請を $G(k, r)$ と $u_R(r)$ に対して課するものである。

$$G(k, r=0) \propto k^{\eta-2} (k \ll 1), \quad R(r) \propto r^{\gamma-1} (r \ll 1)$$

$$u_R(r) \propto r^{\omega}, \quad \omega = \epsilon - 2\eta/2 - \eta \quad (r \ll 1). \quad (14)$$

これは strong な条件であり, Asymptotic な G , u_R のふるまいを現象論的に規定する

のであり、これに従う項を、微視的な Graph 展開から抽出する様になっている。例えば、 $k \ll 1$ では Graph 展開より $k^2 G(k) = 1 + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$ を得るが、第2項は $k^{-2\epsilon}$ に比例し、これを ϵ 展開すると、 $(1 - 2\epsilon \ell_n k + 2\epsilon^2 \ell_n^2 k - \dots)$ になる。一方現象論的な要請 $k^2 G(k) \propto k^\eta = 1 + \eta \ell_n k + \dots$ と両方の $\ell_n k$ の係数だけを比較して、 $\eta = \eta(\epsilon, u_0)$ を得る。これが Matching 条件であり、 $R(\epsilon, u_0, \ell_n r)$ や $u_R(\epsilon, u_0, \ell_n r)$ に対しても同様の事を行う。これら条件式は長いので省略するが、 u_R の条件式より u_0 を ϵ に関して逐次に求める事ができて、 u_0 を消去できる。これで4次元からと、分子場近似からのはずれの関係がついた。この様にして r, η, ϕ 等を定めると、Wilson の論文の (1)(2)(3) 式になり、次元、内部自由度、対称性のみ依存する。この方法の特徴は (14) を用いて u_0 を消去した所にあり、 $\epsilon \rightarrow 0$ で $u_0(\epsilon) \rightarrow 0$ 、すなわち $d=4$ で分子場が正しいと言う注目すべき事実が示された。

§7 Renormalization Group-Matching-Strong scaling の諸関係

Wilson の方法を R-group 理論の立場から調べてみよう。例えば η を求めるため G に対する Lie の微分方程式を考えよう。

$$\frac{\partial \ell_n G(x, y, u_0)}{\partial \ell_n x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \ell_n G(\xi, \frac{y}{x}, u_0 d^2(x, \tilde{y}, u_0)) \big|_{\xi=1} \quad (15)$$

$$x = k^2 / \lambda^2, \quad y = r / \lambda^2, \quad \tilde{y} = \tilde{r} / \lambda^2, \quad t = \chi^2 / \lambda^2$$

$$d(k^2, r, z^2 u_0; z) = G(k^2, r, z^2 u_0; z) / G_0 \quad (16)$$

$$d(\chi^2, \tilde{r}, z^2 u_0; z) = 1 \quad (\text{規格化点}) \quad (17)$$

(17) で $z=1$ にした場合に、これを満たす $\tilde{\lambda}, \tilde{r}$ を λ, r となし得る。それは (17) より、 $d(\tilde{\lambda}^2, \tilde{r}, u_0; 1) = 1$ を (16) に入れた場合、 $G \approx G_0$ なる $\tilde{\lambda}$ として $\tilde{\lambda} \approx 2\pi/a$ (a : 相互作用距離) ととれば、物理的考察から明らかに、 $\tilde{r}$ として実際の r をとることができる。 $\tilde{\lambda}, \tilde{r}$ は特に指定はしないが、 $d=1, z=1$ を満たす $\tilde{\lambda}, \tilde{r}$ を $\lambda \equiv 2\pi/a, r$ (実際の量) とした。

$T = T_c$ で $r=0$ ($y=0$) であり、この時 (15) の右辺は、 $G^{-1}(1, u_0 d^2(x, \tilde{y}, u_0)) \partial \ell_n G(\xi, u_0 d^2(x, \tilde{y}, u_0)) / \partial \xi (\xi=1)$ になる。すなわち、右辺の x

依存性は $d^2(x, \tilde{y}, u_0)$ を通して効いてくる。例えば $\tilde{y} = 0$ の場合は, $d^2(x) \approx k^{2\eta}$ であり分子場近似が良好なら $\eta \approx 0$ となり, 4次元に近ければ d^2 の k 依存性は弱い。一般に $\tilde{y}$ を適当に選べば $d^2(x, \tilde{y}, u_0) \approx 1$ にする事ができて, 結局 (15) は次の様になる。

$$\frac{\partial \ell_n G(x, u_0)}{\partial \ell_n x} = G^{-1}(1, u_0) \frac{\partial}{\partial \xi} G(\xi, u_0) \Big|_{\xi=1} \quad (18)$$

この様に右辺の x 依存性を除く近似が strong-scaling であり, 臨界指数が k に依存しない形の Kadanoff picture となり (14) の要請に一致する。実際 (18) を 1 から x まで積分すると,

$$\ell_n \{ G(x, u_0) / G(1, u_0) \} = G^{-1}(1, u_0) \frac{\partial}{\partial \xi} G(\xi=1, u_0) \cdot \ell_n x. \quad (19)$$

今 $a = 2\pi$ なる長さの単位を選べば, $x = k^2$ で (19) は,

$$G(k^2, u_0) = G(1, u_0) k^\sigma, \quad \sigma \equiv G^{-1}(1, u_0) \frac{\partial}{\partial \xi} G(\xi=1, u_0) \quad (20)$$

に帰する。つまり $\sigma \rightarrow \eta - 2$ を意味する。

次に Matching 条件で $\ell_n k$ の係数だけを比較して η を求める事は, (20) で $G(\xi, u_0)$ を Graph で計算し $\ell_n \xi$ を展開した場合, $\partial / \partial \xi (\xi=1)$ の演算で残るのが $\ell_n \xi$ の一次の項だけであるので, 正当化される。

M. Suzuki⁵⁾ の Matching 条件はもっと一般的であり, $H(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 + \dots$ なるハミルトニアンを考え, λ は次元, 対称性, 相互作用型を H_0 のから変える微少パラメーターとする。その際 H_0 は既に解きうるものと考え, 物理量, 例えば $G(\tau, \lambda)$ を λ 摂動展開する。一方 $G(\tau, \lambda) \propto \{\tau(\lambda)\}^{-r(\lambda)}$ なる現象論的な要請を置き, これを λ 展開し, $\lambda(0)$ の解析的性質が同じものの係数関数を等しいとする。これにより $r^{(n)}(0)$ を Graph 計算で表わせるので, $r(\lambda)$ を λ 展開型で求め得る。この方法も R-group の立場から理解できる。

§ 8 Comments

Wilson の方法は R-group の立場から理解できたが, (14) の条件は (15) を正確に解けば, η が k 依存性を示すので正しくない。Migdal⁶⁾ は実際 $\eta \propto \ell_n^{-2} k (\ell_n k^{-1} \gg$

五十嵐儀孝

1) を出し, Scaling Law が破れる事を示した。次に $\epsilon \approx 1$ の場合には s^6 項が分子場からのずれとして重要になり, 対称性も異なるため n 依存性も変ってくる。したがって $d=3$ を議論する場合は (1) のハミルトニアンでは不十分である。

References

- 1) K.G. Wilson, Phys. Rev. Lett 28, 548 (1972).
- 2) N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Field (Wiley, 1959).
- 3) A.M. Polyakov, Sov. Phys. JETP 28, 553 (1969).
- 4) A.A. Migdal, Sov. Phys. JETP 28, 1036 (1969).
- 5) M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. 28, 507 (1972).
- 6) A.A. Migdal, Sov. Phys. JETP 32, 552 (1971).

臨界指数に対する $1/n$ 展開

東大教養 阿 部 龍 蔵

最近, Wilson¹⁾ は臨界指数に対する ϵ 展開 ($\epsilon = 4 - d$, d : 空間の次元数) を求めることに成功した。彼の理論でスピン次元数 n は任意である。ここでは, 逆に d は任意であるとし, 臨界指数を $1/n$ のべきで展開する方法について述べる。 $1/n$ 展開は ϵ 展開と異なり, 系統的な展開が比較的簡単に導かれるが, 簡単のため, 帯磁率の指数 r に注目し, $1/n$ の最低次の項を求める。 ϵ 展開と $1/n$ 展開とは共通の領域 ($\epsilon \ll 1$, $1/n \ll 1$) をもつので, 互いの結果のチェックとしても使いうる。

われわれの出発点は Stanley の理論²⁾ である。彼は j 番目の格子点に n 次元のベクトル

$$\mathbf{S}_j = \{ \sigma_j(1), \sigma_j(2), \dots, \sigma_j(n) \}$$

を対応させる。ただし, 成分 $\sigma_j(m)$ は