

山をすぎる二層流体の流れにおけるソリトンと トラップされた波の相互作用

九大応力研 船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

§1. 序

自由表面をもつ二層流体系においては、線形モードとして表面波モード、内部波モードの2つがある。そして内部波モードの長波長極限での波速 c_p に近い群速度をもつ表面波モードを考えると、この両モードの間にいわゆる長波短波共鳴相互作用がおこる¹⁾。

次に、この二層流体が水平スケールの大きい山の上を速さ V で流れているとし、 V が c_p に近いときを考えると、山によって作り出された長波長内部波モードが山から離れていく速度が小さいので、波の振幅は山の高さよりもずっと大きくなる。このような共鳴的な長波の励起は密度成層のない一層の流体や連続成層流体に対して既に調べられており、適当なスケーリングのもとで、“forced K-dV 方程式”と呼ばれる非斉次型の外力項を含んだ K-dV 方程式が導かれる^{2~4)}。

この論文では、上の長波短波共鳴相互作用と山による共鳴的な波の励起が同時に起こるような場合を考え、適当なスケーリングの下で非線形のモデル方程式を導出し、その解の挙動について調べる。

§2. 外力項をもつ長波短波共鳴方程式⁵⁾

図1のような自由表面をもつ水深 h_1, h_2 の二層流体系を考え、 h_1, h_2 よりずっと水平スケールは大きいが高さは小さい山に対して流体が速さ V で動いているとする。この二層流体系には、自由表面変位 ζ_1 と界面変位 ζ_2 が同符号である表面波モードと、異符号である内部波モードが存在する。この2つのモードの振動数 ω と波数 k の関係を示す分散曲線は図2のようになる。いま内部波モードの長波長極限での波速 c_p に近い群速度をもつ波数 k_0 の表面波モードの波束が存在していると仮定すると、この長波長内部波モードと短波長表面波モードとの間に共鳴相互作用がおこる。さらに V が c_p に近く

て長波長内部波モードが山によって共鳴的に励起される場合を考えると、 $\varepsilon \ll 1$ をみたとす ε を導入して、(山の高さ)/ $h_1 = O(\varepsilon^2)$, (内部波モードの振幅)/ $h_1 = O(\varepsilon^{4/3})$, (表面波モードの振幅)/ $h_1 = O(\varepsilon)$, (山、内部波モード、及び表面波モード波束の水平スケール)/ $h_1 = O(\varepsilon^{-2/3})$ というオーダーを仮定することにより、非粘性渦なし流れの基礎方程式系から次の方程式が得られる。

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} = \hat{\beta} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \hat{\alpha} AB + i \hat{\lambda} \frac{\partial A}{\partial \xi}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} = \hat{\gamma} \frac{\partial |A|^2}{\partial \xi} - \kappa \frac{\partial H}{\partial \xi} + \hat{\lambda} \frac{\partial B}{\partial \xi}. \quad (1b)$$

この式で A は表面波モードの複素振幅、 B は内部波モードの界面変位をあらわし、 ζ_1 と ζ_2 は A と B を使って

$$\begin{cases} \zeta_1/h_1 = \varepsilon A(\xi, \tau) \exp(i\theta) + \text{c.c.} - \varepsilon^{4/3} \nu_1 B(\xi, \tau), \\ \zeta_2/h_1 = \varepsilon \nu_2 A(\xi, \tau) \exp(i\theta) + \text{c.c.} + \varepsilon^{4/3} B(\xi, \tau), \end{cases} \quad (2)$$

と書ける。ここで $\xi = \varepsilon^{2/3} x$, $\tau = \varepsilon^{4/3} t$, x は水平座標、 t は時間である。そして $H(\xi)$ は山の形を表わす関数で、図 1 のように定義されている ($\xi \rightarrow \pm\infty$ で $H(\xi) \rightarrow 0$ とする)。また $\hat{\lambda} = (V - c_p)/\varepsilon^{2/3}$ であり、 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, κ は二流体の水深比と密度比から決まる正定数である。そして ν_1 , ν_2 は二流体の水深比と密度比から決まる正定数、 $\theta = k_0 x - (\omega_0 - k_0 V)t$ であり、 $\omega_0 = \omega_+(k_0)$ は表面波モードの振動数である。なお c.c. は直前の項の複素共役を意味する。

方程式 (1a) は表面波モードの時間発展を決めるもので、右辺第一項は分散性の効果、第 2 項は長波長内部波モードに伴う非一様な流れによる効果、第 3 項は V と c_p のわずかなずれによる効果をあらわす。一方内部波モードの時間発展の方程式 (1b) においては、右辺第一項は表面波の波束の振幅の非一様性による効果、第二項は山の存在による効果、第三項は V と c_p のわずかなずれによる効果をあらわす。方程式 (1) は適当なスケール変換 ($A \rightarrow S$, $B \rightarrow L$, $\xi \rightarrow X$, $\tau \rightarrow T$, $\hat{\lambda} \rightarrow \lambda$) によって、次の形に書き直せる。

$$\begin{cases} i \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} - SL + i\lambda \frac{\partial S}{\partial X}, \\ \frac{\partial L}{\partial T} = \frac{\partial |S|^2}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial X} + \lambda \frac{\partial L}{\partial X}. \end{cases} \quad (3)$$

方程式 (3) は、山が存在しないとき ($H \equiv 0$) には、ソリトン方程式であって無限個の保存量をもつ。しかし山の存在するときには、このうち最初の 2 個

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} L dX, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |S|^2 dX,$$

だけが保存される。

§3. ソリトンとトラップされた波^{1,5)}

山から離れた平らなところ ($H = 0$) で存在する (3) のソリトン解は、長波長内部波モード (以下では長波と呼ぶ) と短波長表面波モード (以下では短波と呼ぶ) がカップルしたもので、その形は

$$\begin{cases} S = \sqrt{2(\lambda + \tilde{p})} \tilde{q} \operatorname{sech}[\tilde{q}(X - \tilde{p}T - X_0)] \exp\{i[-\frac{1}{2}(\lambda + \tilde{p})X - \hat{\Omega}T + \psi_0]\}, \\ L = -2\tilde{q}^2 \operatorname{sech}^2[\tilde{q}(X - \tilde{p}T - X_0)], \end{cases} \quad (4)$$

と書ける。ここで $\hat{\Omega} = \tilde{q}^2 - \tilde{p}^2/4 + \lambda^2/4$ 。また $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, X_0 , ψ_0 は任意のパラメータであるが、このうち重要なのはソリトンの速さを表わす $\tilde{p}$ と幅を決める $\tilde{q}$ である。

さらに、平らなところでは、長波だけからなる定常進行波の解

$$S = 0, \quad L = \psi(X + \lambda T), \quad [\psi \text{ は任意の関数}] \quad (5)$$

も存在する。以下ではこの波を **FL**(free long-wave solution) と呼ぶことにする。

次に、山にトラップされた波を、“ $|S|$ と L が X のみに依存しかつ遠方で 0 に近づく解”に対応するものとして定義すると、この波には長波だけからなるものと長波と短波がカップルしたものの二種類がある。長波だけからなるものは $S = 0$, $L = H(X)/\lambda$ と表わされ、以下ではこれを **TL**(trapped long-wave solution) と呼ぶことにする。

またカップルした解は一般に

$$S = f(X) \exp\{i[\varphi(X) - \Omega T]\}, \quad L = g(X), \quad (6)$$

と表わされ、 f, g, φ は X の実関数で、遠方では $f \rightarrow 0$, $g \rightarrow 0$ をみたす必要がある。

(6) を (3) に代入すると、まず $\varphi(X) = -\frac{1}{2}\lambda X$ が得られ、さらに

$$f'' + \frac{1}{\lambda}f^3 + (-\frac{1}{\lambda}H + \frac{1}{4}\lambda^2 - \Omega)f = 0, \quad (7)$$

$$g = -\frac{1}{\lambda}(f^2 - H), \quad (8)$$

が求まる。ここで、プライムは X に関する微分を表わす。与えられた $H(X)$ に対して、(7) と $f \rightarrow 0$ ($X \rightarrow \pm\infty$) は固有値問題を形成し、 Ω が固有値となる。 f が求まれば (8) から g が求まる。以下ではこのようにして求めた解を TC(trapped coupled solution) と呼ぶことにする。

そして とくに $H = \text{sech}^2 X$ という対称な形の山に対して数値的に TC の計算を行った。その結果、まず $\lambda < 0$ に対しては、 $f(X)$ が $X = 0$ に関して対称なモードと反対称なモードが存在し、モードの数は λ が 0 に近いほど多い。図 3 は $\lambda < 0$ のときの TC の例を示している。一方 $\lambda > 0$ の場合には、対称解は存在するが反対称解は存在しない。そのかわり（反対称ではない）非対称解が存在し、さらに $f(X)$ が複数のピークをもつ対称解、非対称解も得られる。図 4 はその例を示している。なお、 $\lambda > -1/2$ のときには

$$\begin{cases} S = \sqrt{1+2\lambda} \text{sech} X \exp\{i[-\frac{1}{2}\lambda X - (1 + \frac{1}{4}\lambda^2)T]\}, \\ L = -2\text{sech}^2 X, \end{cases} \quad (9)$$

と解析的に書ける解も存在し、これは対称な TC の 1 つになっている。

§4. ソリトンとトラップされた波の相互作用

次に、遠方から伝播してきたソリトンや FL が $H = \text{sech}^2 X$ の形の山のところでトラップされた波と相互作用をするときにどのようなことがおこるかを、方程式 (3) を数値的に解いて調べた。計算法としては、時間、空間とも中心差分を使った単純な差分法を用いた。計算領域は $-\ell \leq X \leq \ell$ とし、周期的境界条件を用いた。 ℓ は主に 75 を使った。空間きざみは 0.05、時間きざみは 0.0005 を主に用い、保存量 I_1, I_2 が保存されていることを確かめながら計算を進めた。また初期の FL の関数形としては $L = \hat{a} \text{sech}^2(X - X_0)$ を用いた ($\hat{a}, X_0$ は定数)。

ソリトンやトラップされた波の挙動を考える上で重要な一つの観点は、長波が短波波束に及ぼす効果である。すなわち、(3) の第一式で右辺第二項だけを残した $iS_T = -SL$ を考え、この式に $S = |S| \exp(i\hat{\theta})$ [$\hat{\theta}$ は実関数] を代入すると、 $\hat{\theta}_{XT} = L_X$ が得られる（ここで添字はその変数による微分を表わす）。この左辺は短波の波数の時間変化を示す。

従って $L_X > 0$ のところでは短波の波数は増大し、図 2 の分散曲線からわかるように群速度が減少する（波束が流れの上流側へむかって進む速さが遅くなる）。 $L_X < 0$ のところでは逆のことがおこる。ゆえに L が正の部分は図 5(a) のように短波を排除しようとし、 L が負の部分は図 5(b) のように短波を引き寄せようとする。

もう一つの重要な観点は、山がどのような長波を作り出そうとするかである。(3) の第二式で短波の効果を無視した $L_T = -H_X + \lambda L_X$ を考えると、その一般解は $L = H(X)/\lambda + \hat{\psi}(X + \lambda T)$ と書ける。ここで $\hat{\psi}$ は任意関数である。従って山のところでは、FL である $\hat{\psi}$ の部分を放出して TL に近づこうとする傾向がある。ゆえに $\lambda > 0$ のときには山のところで L の正の部分が作られる傾向があるし、 $\lambda < 0$ のときには負の部分が作られる傾向がある。

図 6 は $\lambda = -0.5$ のときの TL とソリトン ($\tilde{p} = \tilde{q} = 1.0$) の相互作用に伴う波の時間発展を示したもので、実線が $|S|$ 、破線が L を表わす。また各時刻での図の一番下の実線は $H(X)$ を示しており、山の右側 ($X > 0$ 側) が上流側である。入射ソリトンが 2 つのソリトンと正の FL に分裂していく様子がわかる。また山の付近では、 L がずっと負のままなので、上に述べたメカニズムにより入射ソリトンの短波成分の一部が捕捉されて、対称な TC が作られている。

図 7 は $\lambda = 1.0$ のときの対称 TC [(9) の解析解] と負の FL ($\hat{a} = -2.5$) の相互作用を示したもので、この場合は山の付近では短波はすべて排除されてしまい、TL が最終状態となる。このことは、山によって L の正の部分が作られ、それが短波を排除したと解釈できる。また排除された短波は L の負の部分とカップルして（多分）3 個のソリトンになる。

図 8 は $\lambda = 1.0$ のときの TL とソリトン ($\tilde{p} = \tilde{q} = 1.0$) の相互作用を示したもので、山の付近では前図と同じく短波が排除され、(初期値と同じ) TL が最終状態となる。また入射ソリトンは山のところで反射し、振幅がかなり増大している。

これまで示した結果や他の計算結果から次のことが言える。

(i) 山の付近においては、 $\lambda > 0$ のときにはつねに TL が最終状態であり、 $\lambda < 0$ のときには（短波が存在しないときを除けば）ほとんどの場合 TC が最終状態となる。ただし

後者の場合、一般に多数の解からなる TC の中のどれが現れるかについては、いまのところ理論的に予想はできない。

(ii) 遠方から山のところに伝播してきたソリトンや FL は、トラップされた波との相互作用によりさまざまな挙動を示し、その一例としてソリトンの増幅、分裂、反射などがみられる。

次に波の最終状態が初期値にどのように依存するかを定量的に調べるために、いくつかのシリーズの計算を行なった。まず図 8 と同様な初期値で、 $\tilde{q}_0$ (入射ソリトンの $\tilde{q}$) だけを 0.8 から 1.2 の範囲で変えてみた。このときの最終状態においてはつねに 1 つのソリトンが存在するが、 $\tilde{q}_0 = 1.03$ あたりを境目にして挙動が大きく異なる。すなわち $\tilde{q}_0 \leq 1.02$ では図 8 に示したようにソリトンの反射、増幅がみられるが、 $\tilde{q}_0 \geq 1.04$ では図 9 のように入射ソリトンがほぼそのままの形で通り抜けていく。図 10 は最終状態でのソリトンのパラメータ $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ を $\tilde{q}_0$ の関数として示したものであるが、明らかに $\tilde{q}_0 = 1.03$ 付近のみで挙動の急激な変化がみられる。

次に $\lambda = -0.3$ に対して、TL とソリトン ($\tilde{p} = 1.0$, $\tilde{q} = \tilde{q}_0$) の相互作用をいろいろな $\tilde{q}_0$ の値に対して調べた。この λ の値に対する TC は図 11 のように 1 つの対称なモード (実線) と 1 つの反対称なモード (破線) からなる。 $0.4 \leq \tilde{q}_0 \leq 1.7$ の範囲のほとんどの $\tilde{q}_0$ に対して、最終状態では 2 つのソリトンと TC がみられる。そして TC は $\tilde{q}_0 \leq 0.8$ のときは反対称解であり、 $\tilde{q}_0 \geq 0.9$ のときは対称解である (前者の例を図 12 に示す)。図 13 は最終状態における 2 つのソリトンのパラメータ $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ と TC の $f(0)$ [対称解のとき] あるいは $f'(0)$ [反対称解のとき] を $\tilde{q}_0$ の関数として示したものである。比較的小さい $\tilde{q}_0$ に対してはこれらの値の初期値依存性はゆるやかであるが、 $\tilde{q}_0 \geq 1.3$ に対しては複雑な依存性がみられる。このような複雑な初期値依存性を示す別の例が図 14 である。この図は $\lambda = -0.3$ に対して、ソリトン ($\tilde{p} = 1.0$, $\tilde{q} = \tilde{q}_0$, $0.68 \leq \tilde{q}_0 \leq 1.39$) と TC [(9) の解析解] の相互作用により作られる対称な TC の $f(0)$ を $\tilde{q}_0$ の関数として示したものである。 $\tilde{q}_0$ の変化とともに $f(0)$ は複雑に変化し、とくに比較的大きい $\tilde{q}_0$ での変動が激しい。また 0.89 や 1.20 などの特別の $\tilde{q}_0$ の値に対しては、 $f(0)$ はほぼ 0 であり、TL に非常に近い TC が作られる。

以上のように、初期値パラメータの変化に対する、最終状態の複雑な依存性やある狭い範囲での鋭い依存性が数値的に示されたが、これらの挙動を理論的に説明することには成功していない。

最後に、TC の安定性についてはまだきっちりと調べていないが、これまでの結果は $\lambda > 0$ のときにすべての TC が不安定であることを示唆する。すなわち、この場合には山のところで L の正の部分が作り出される傾向があり、それが短波を排除しようとするので、短波成分を含む TC は摂動によりこわれてしまうように思える。実際のいくつかの数値計算においても、ごく小さいソリトンや FL をぶつけただけで TC はこわれてしまう。一方、 $\lambda < 0$ のときの TC の安定性についてはまだはっきりしない。図 12、13 の結果は $\lambda = -0.3$ のときの 対称解、反対称解が安定であることを示唆するが、 λ がもっと 0 に近いときに存在する高次モードの対称解、反対称解（図 3 の (c), (d), (e) のようなもの）の安定性についてはまだ全くわかっていない。

参 考 文 献

- 1) 例えば、Funakoshi, M. and Oikawa, M.: *The resonant interaction between a long internal gravity wave and a surface gravity wave packet*, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 1982-1995.
- 2) Wu, T. Y.: *Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances*, J. Fluid Mech. **184** (1987) 75-99.
- 3) Lee, S., Yates, G. T. and Wu, T. Y.: *Experiments and analyses of upstream-advancing solitary waves generated by moving disturbances*, J. Fluid Mech. **199** (1989) 569-593.
- 4) Grimshaw, R. H. J. and Smyth, N.: *Resonant flow of a stratified fluid over topography*, J. Fluid Mech. **169** (1986) 429-464.
- 5) Funakoshi, M.: *Steady trapped solutions to forced long-short interaction equation*, J. Phys. Soc. Jpn. **62**(1993) 1993-2006.

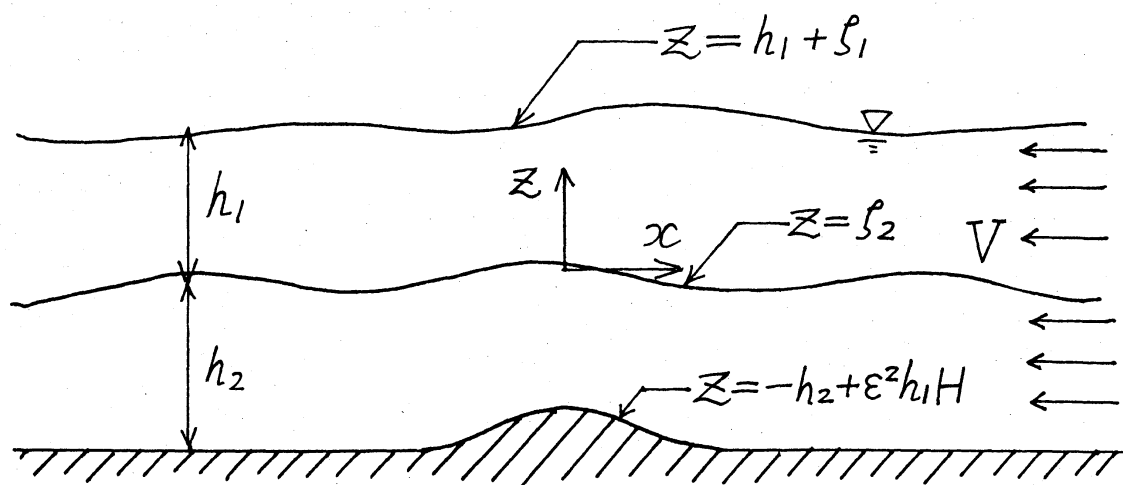


図1 山をすぎる二層流体の流れ

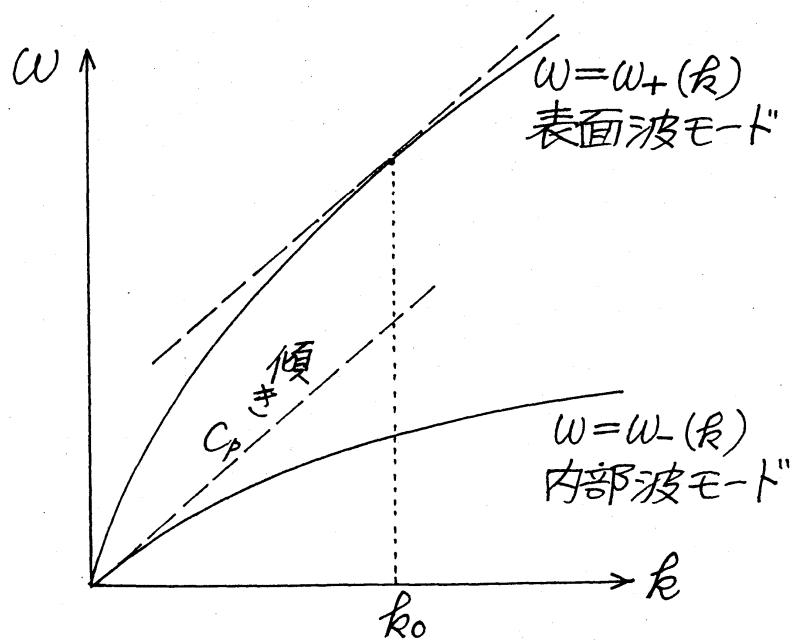


図2 表面波モードと内部波モードの分散曲線

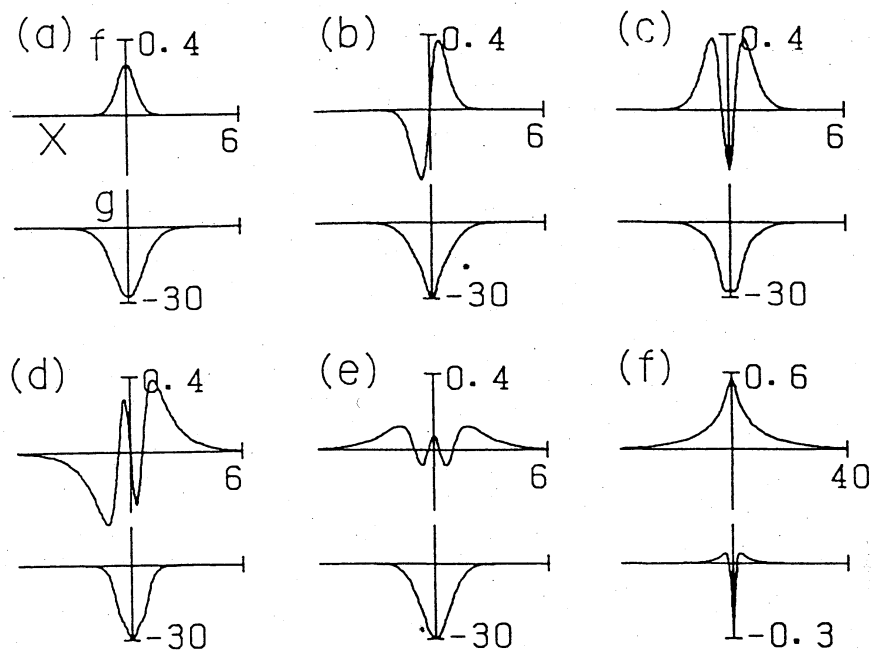


図3 $\lambda < 0$ に対する TC(trapped coupled solution) の例。(a) $\lambda = -1/30$, $\Omega = 23.5$, (b) $\lambda = -1/30$, $\Omega = 13$, (c) $\lambda = -1/30$, $\Omega = 6$, (d) $\lambda = -1/30$, $\Omega = 1$, (e) $\lambda = -1/30$, $\Omega = 0.7$, (f) $\lambda = -3$, $\Omega = 2.2583$.

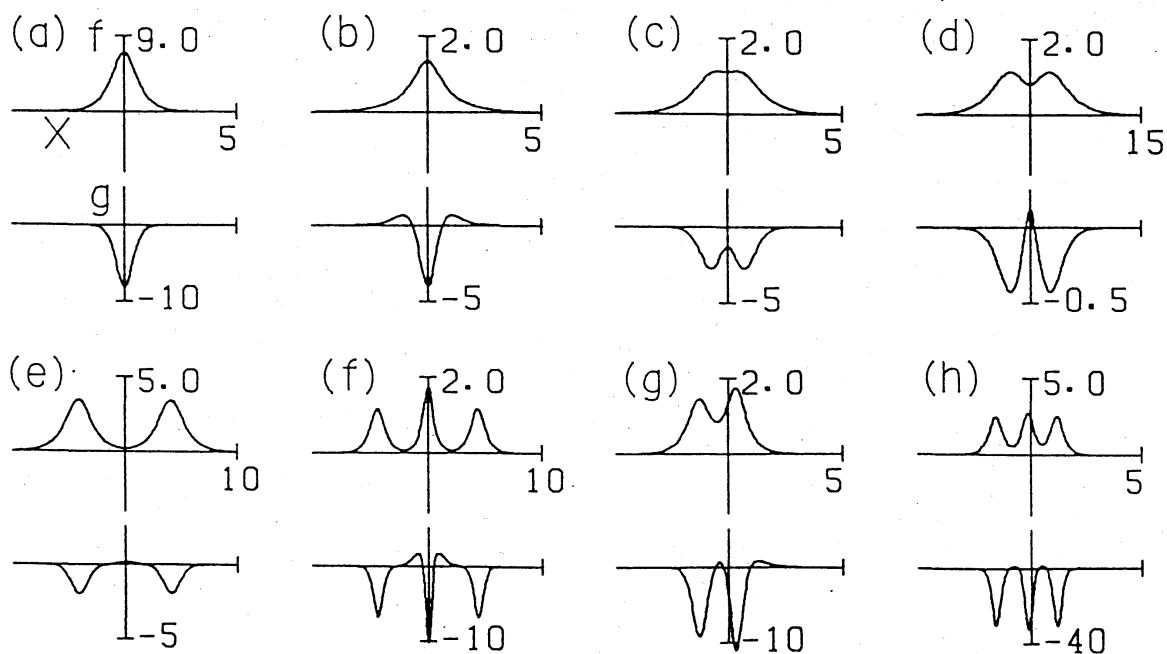


図4 $\lambda > 0$ に対する TC(trapped coupled solution) の例。(a) $\lambda = 6$, $\Omega = 13$, (b) $\lambda = 0.2$, $\Omega = 1$, (c) $\lambda = 0.2$, $\Omega = 1.6$, (d) $\lambda = 3$, $\Omega = 2.465$, (e) $\lambda = 6$, $\Omega = 10$, (f) $\lambda = 0.2$, $\Omega = 3.4$, (g) $\lambda = 0.2$, $\Omega = 4.6$, (h) $\lambda = 0.2$, $\Omega = 15.1$. (g) と (h) が非対称解。

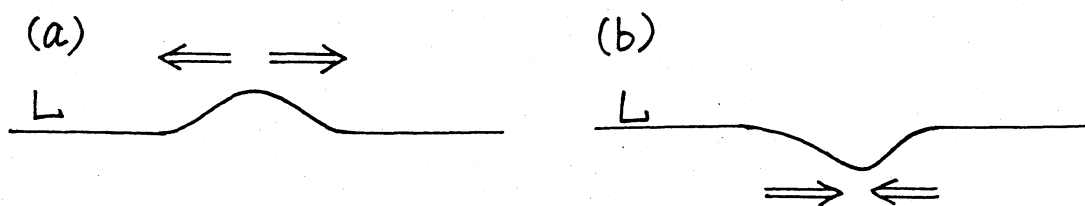


図5 長波が短波に及ぼす効果。長波は短波波束を矢印の方向に動かそうとする。

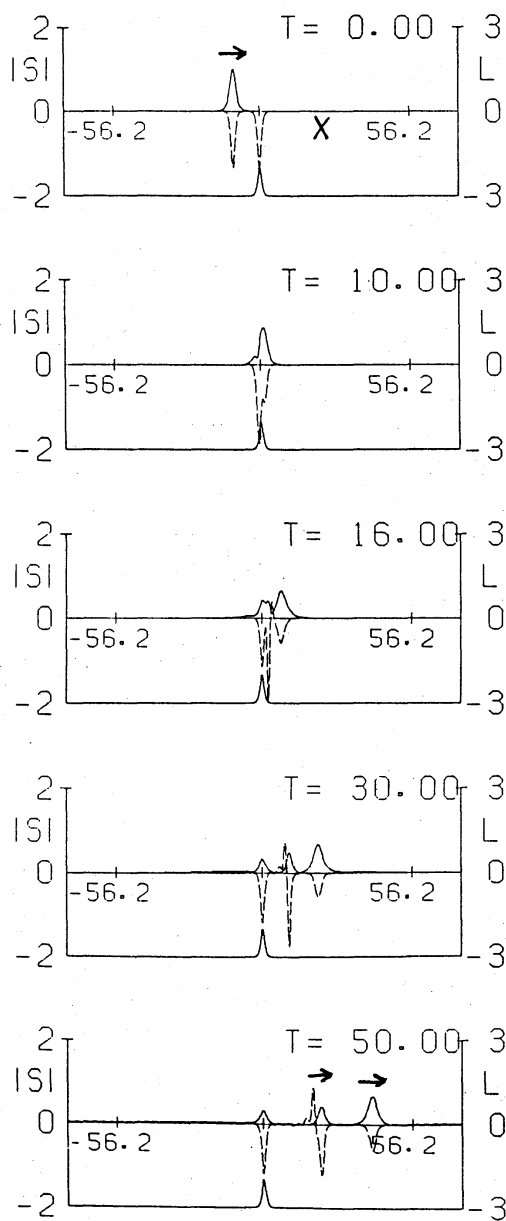


図6 TL (trapped long-wave solution) とソリトン ($\tilde{p} = \tilde{q} = 1.0$) の相互作用。 $\lambda = -0.5$. 実線は $|S|$, 破線は L を表わす。

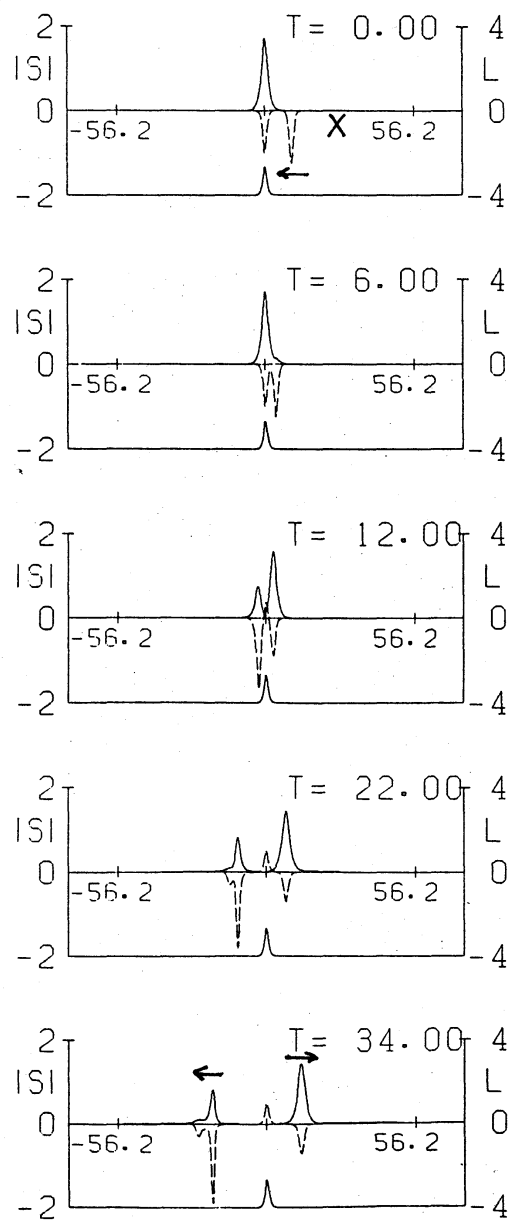


図7 対称 TC [解析解 (9)] と FL (free long-wave solution) [$\hat{a} = -2.5$] の相互作用。 $\lambda = 1.0$.

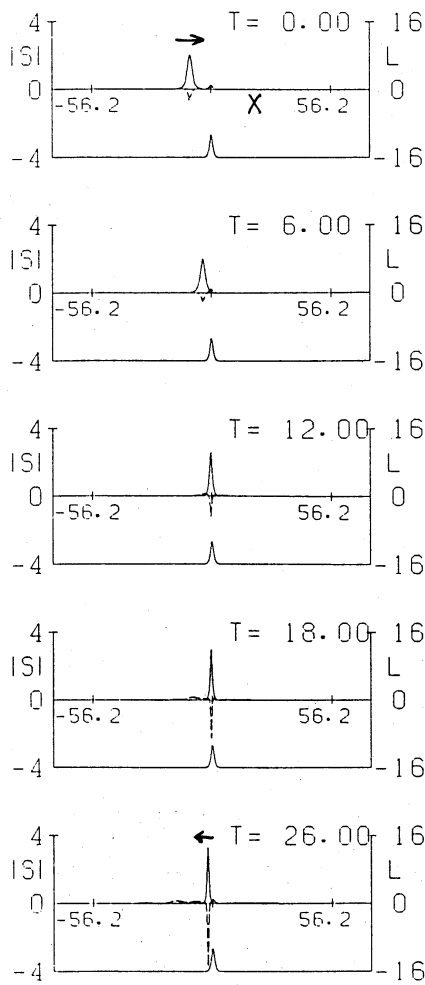


図8 TL とソリトン ($\tilde{p} = \tilde{q} = 1.0$) の相互作用。 $\lambda = 1.0$.

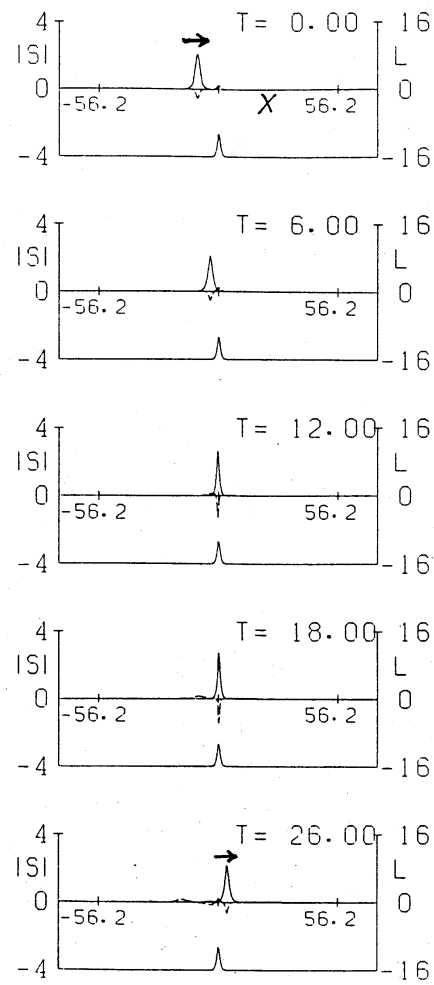


図9 TL とソリトン ($\tilde{p} = 1.0$, $\tilde{q} = 1.04$) の相互作用。 $\lambda = 1.0$.

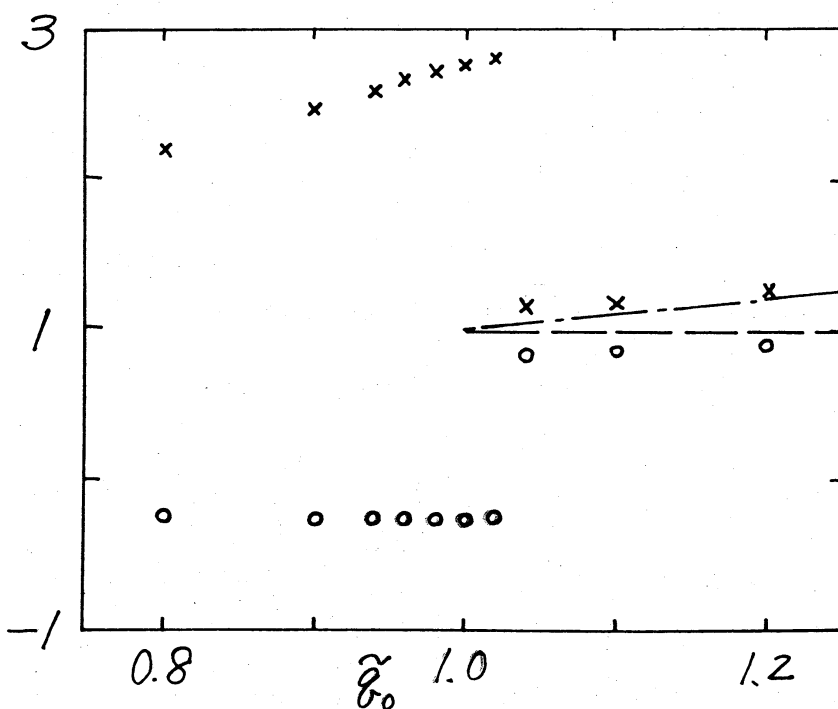


図10 TL とソリトン ($\tilde{p} = 1.0$, $\tilde{q} = \tilde{q}_0$) の相互作用で作られるソリトンのパラメータ $\tilde{p}$ (○印), $\tilde{q}$ (×印). $\lambda = 1.0$. 破線は入射ソリトンの $\tilde{p} (= 1.0)$, 一点鎖線は入射ソリトンの $\tilde{q} (= \tilde{q}_0)$.

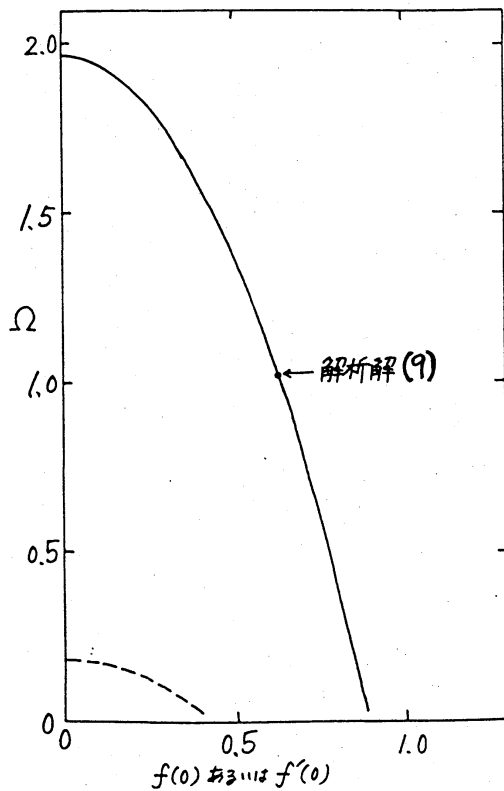


図 11 $\lambda = -0.3$ に対する TC。横軸は、対称なモード（実線）に対しては $f(0)$, 反対称なモード（破線）に対しては $f'(0)$ 。縦軸は (6) における Ω 。

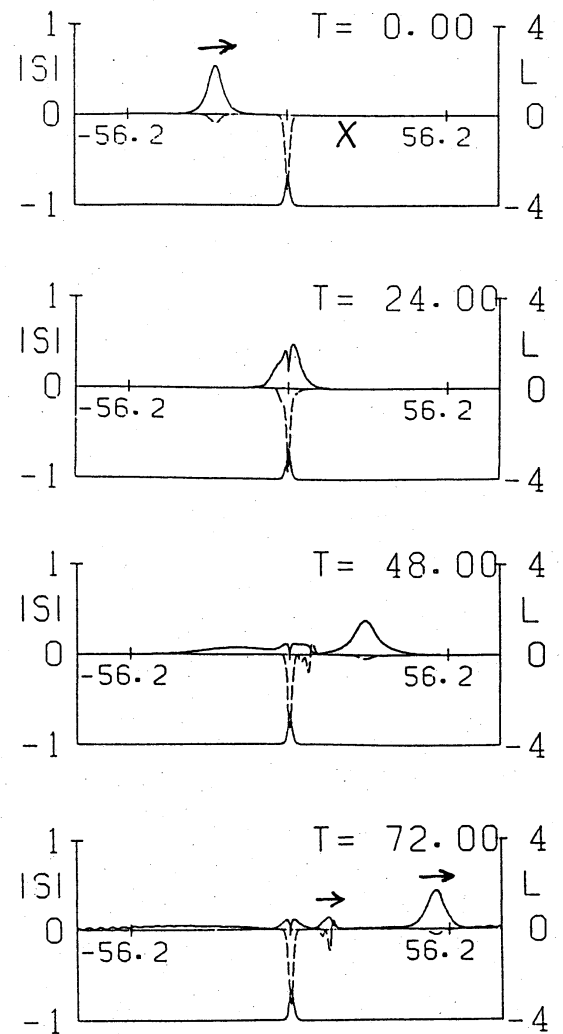


図 12 TL とソリトン ($\tilde{p} = 1.0$, $\tilde{q} = 0.45$) の相互作用。 $\lambda = -0.3$ 。

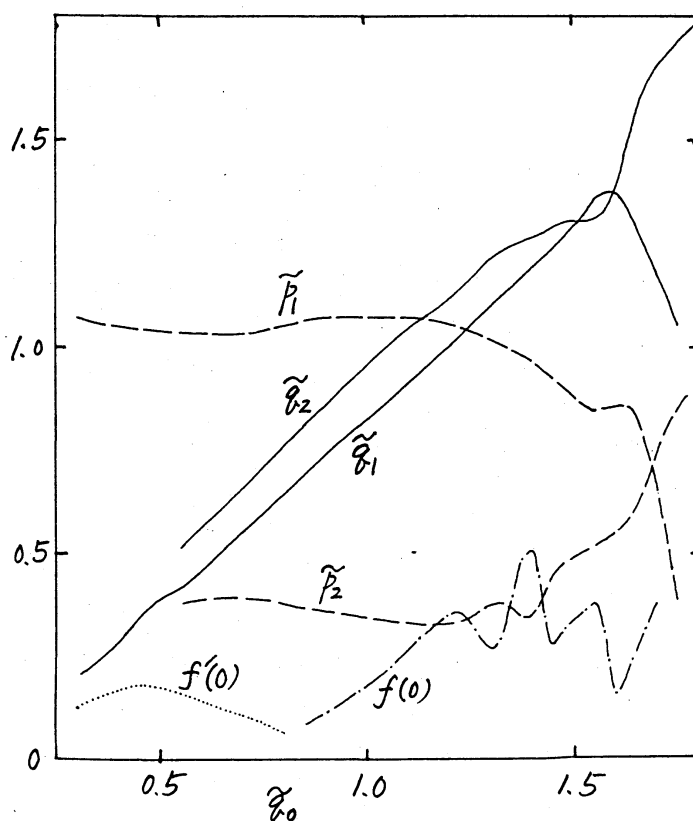


図 13 TL とソリトン ($\tilde{p} = 1.0$, $\tilde{q} = \tilde{q}_0$) の相互作用によって作られた 2 つのソリトンと TC を特徴づける量の $\tilde{q}_0$ 依存性。 $\tilde{p}_1, \tilde{q}_1$ ($\tilde{p}_2, \tilde{q}_2$) は速い (遅い) 方のソリトンのパラメータ。点線は反対称 TC の $f'(0)$ 、一点鎖線は対称 TC の $f(0)$ 。 $\lambda = -0.3$ 。

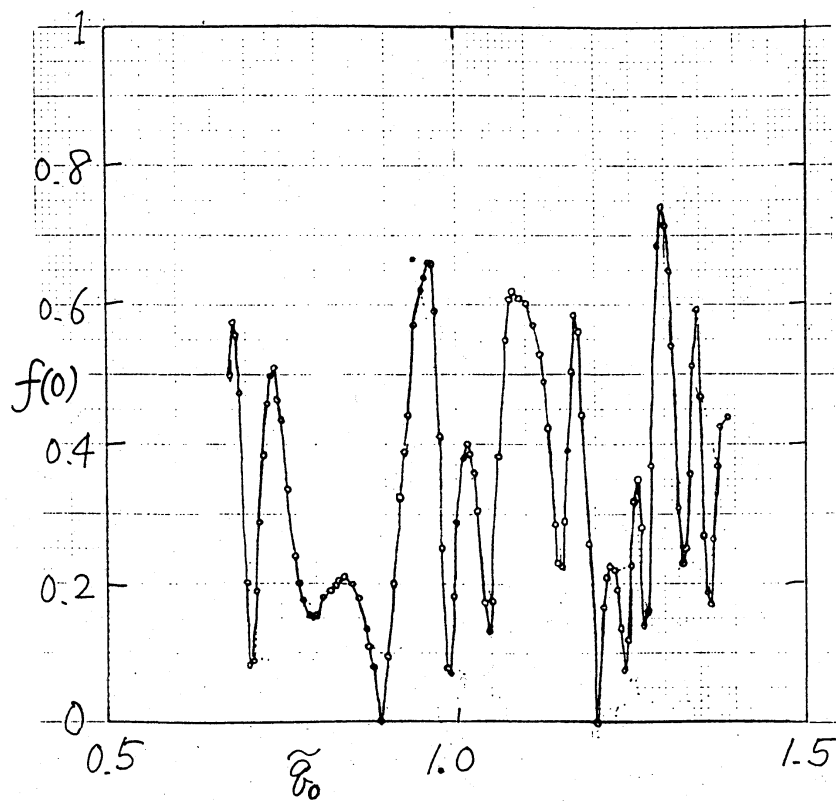


図 14 TC [解析解 (9)] とソリトン ($\tilde{p} = 1.0$, $\tilde{q} = \tilde{q}_0$) の相互作用によって作られる対称 TC の $f(0)$ 。 $\lambda = -0.3$ 。