

$SL(2, 2^n)$ の quiver と relation (標数 2 の代数的閉体上)

On quiver and relations for $SL(2, 2^n)$ in characteristic 2

千葉大学自然科学研究科 3 年 越田 均 (Hitoshi Koshita)

Abstract

Let $G = SL(2, 2^n)$ and FG be the group algebra of G over an algebraically closed field F of characteristic 2. Then FG is the algebra of wild representation type except for a few case $n = 1, 2$. In [4], the basic algebra of FG is described by a certain quiver with relations. Part of the fact in the case $n = 3$ is introduced here.

体上有限次元の多元環には basic algebra があって、それらは Morita 同値になります。また、その basic algebra は quiver と relation で表されることが知られています。一方、体上有限次元の多元環は有限 type と無限 type に、無限 type はさらに tame type と wild type に分かれます。有限 type と tame type についての quiver と relation はよくわかっていますが [3], wild type についてはあまり知られていません。いま $G = SL(2, 2^n)$, F を標数 2 の代数的閉体とします。 G の Sylow 2-部分群が位数 2^n の基本可換群であることから、群環 FG は、 n が 1 のときは有限 type, n が 2 のときは tame type, n が 3 以上のときは wild type になります [2, 4.4].

群環 FG は 2 つのブロックに分かれます。それを $FG = B_0 \oplus B_1$, ただし B_0 が主ブロックとします。 B_1 は Steinberg module という射影的な単純加群を含んでいます。したがって B_1 は単純多元環ですから、その basic algebra は F と同型です。その F を quiver と relation で表すと、quiver は点が 1 つで矢はありません。よって relation もありません。これから主ブロック B_0 についてその basic algebra の quiver と relation を考えようとおもいます。

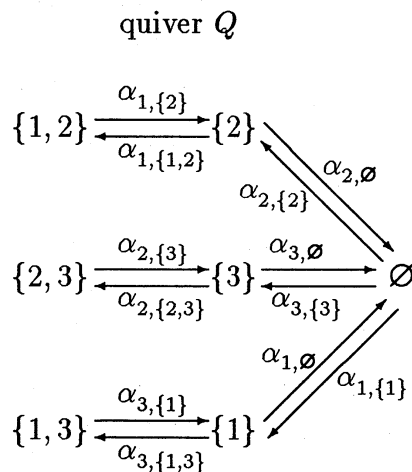
Λ を B_0 の basic algebra, また Q は FG の Ext-quiver ([2, Definition 4.1.6]) すなわち単純 FG -加群の同型類の個数だけの点を持ち、単純 FG -加群 S_1 に対応する点から単純 FG -加群 S_2 に対応する点への矢の本数が $\dim_F \text{Ext}_{FG}^1(S_1, S_2)$ になっているような quiver とします。 [1] により Q がわかります。 Λ の Ext-quiver もおなじ Q になります。 FQ を Q の F 上の path algebra (quiver algebra) とします。そのとき、 $\Lambda \cong \frac{FQ}{X}$ となります [2, 4.1]. ただし、 X は FQ のイデアルです。 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_\nu = y_\nu$ がもとめようとしている relation であることは $\{x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_\nu - y_\nu\}$ がイデアル X を生成することとおなじです。 $n = 2$ の場合は [3, p.295] によりわかります。 n が一般の自然数の場合、特に $n \geq 3$ のとき、ある relation が [4] によりわかります。ここでは $n = 3$ として [4] の一部を紹介したいとおもいます。

まず、文献 [1] から引用します。 $N = \{1, 2, 3\}$ とします。各 $i \in N$ について V_i を、 $\{x_i, y_i\}$ を基とする 2 次元 F -空間とし、さらに G の元 $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ の右作用を

$$\begin{cases} x_i \cdot g = g_{11}^{2^{i-1}} x_i + g_{12}^{2^{i-1}} y_i, \\ y_i \cdot g = g_{21}^{2^{i-1}} x_i + g_{22}^{2^{i-1}} y_i \end{cases}$$

のように定義します. 各 V_i はすべて self-dual な右 FG -加群になります. これらは単純 FG -加群ですが, さらにすべての単純 FG -加群 (の同型類の代表系) は次のようにしてえられます. $\emptyset \neq I \subset N$ のとき $V_I = \bigotimes_{i \in I} V_i$ とします. また $V_\emptyset = F$ (自明な FG -加群) とします. そうすると V_I ($I \subset N$) が単純 FG -加群の完全代表系になります. 特に V_N が Steinberg module になります. つぎに, 各 $I \subset N$ に対し P_I を V_I の射影被覆とします. すると, $P_I \cong V_{N-I} \otimes V_N$ ($\emptyset \neq I \subset N$), また $P_\emptyset \oplus P_N \cong V_N \otimes V_N$ となります. さらに, C_{HI} を P_I の組成剰余群列における V_H の重複度とします. [1, Theorem 2] より, C_{HI} は右の表のようになることがわかります. さて, N の元 i に対し, $i = 3$ のときは $i+1 = 1$ とします. また $I \subset N$ と $i \in N$ に対し, $i \notin I$ のとき $I + \{i\} = I \cup \{i\}$, 一方, $i \in I$ のとき $I + \{i\} = I - \{i\} = \{j \in I; j \neq i\}$ と $I + \{i\}$ を定義します. そしてつぎのような quiver Q と relation を考えます.

$\begin{smallmatrix} H \\ \backslash I \end{smallmatrix}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\emptyset$	8	4	4	4	2	2	2
$\{1\}$	4	4	2	2	2	0	1
$\{2\}$	4	2	4	2	1	2	0
$\{3\}$	4	2	2	4	0	1	2
$\{1,3\}$	2	2	1	0	2	0	0
$\{1,2\}$	2	0	2	1	0	2	0
$\{2,3\}$	2	1	0	2	0	0	2



relations

$$\begin{aligned}
 &\alpha_{i,\emptyset} \alpha_{i,\{i\}} = 0, \\
 &\alpha_{i,\{i+1\}} \alpha_{i,\{i,i+1\}} = 0, \\
 &\alpha_{i+1,\emptyset} \alpha_{i,\{i\}} \alpha_{i,\emptyset} = \alpha_{i,\{i,i+1\}} \alpha_{i,\{i+1\}} \alpha_{i+1,\emptyset}, \\
 &\alpha_{i+1,\{i+1\}} \alpha_{i,\{i,i+1\}} \alpha_{i,\{i+1\}} = \alpha_{i,\{i\}} \alpha_{i,\emptyset} \alpha_{i+1,\{i+1\}}, \\
 &\alpha_{i,\{i+1\}} \alpha_{i+1,\emptyset} \alpha_{i,\{i\}} = 0, \\
 &\alpha_{i,\emptyset} \alpha_{i+1,\{i+1\}} \alpha_{i,\{i,i+1\}} = 0, \\
 &\quad (i = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

この quiver Q は N の真部分集合をそのまま点とみなし, また $i-1 \notin I \subset N$ のときに始点が $I + \{i\}$ で終点が I の $\alpha_{i,I}$ と表される矢があるように定義されています. さて, $x = y$ という relation は FQ の元 $x - y$ と考えて, 上の 18 個の relation で生成される FQ のイデアルを X とします. そのとき [4, Definition 5 と Proposition 2] より, ある F -多元環全準同型 $\Phi: FQ \rightarrow \Lambda$ を $X \subset \text{Ker } \Phi$ すなわち上の 18 個の relation がすべて $\text{Ker } \Phi$ に属するように定義することができます.

Q では始点が H で終点が I の path は一般に $(H | \alpha_{i_a, I_{a-1}}, \alpha_{i_{a-1}, I_{a-2}}, \dots, \alpha_{i_1, I_0} | I)$ のように表されますが, そのとき quiver Q の定義から $I_0 = I$, $H = I_{a-1} + \{i_a\}$, かつ, すべて

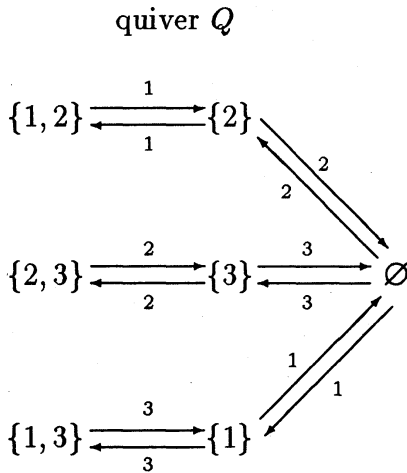
の $b = 1, 2, \dots, a-1$ について $I_b = I_{b-1} + \{i_b\}$ でなければなりません. つまり, 上のように path を表すとき, それは H か I のいずれか一方と $i_a, i_{a-1}, \dots, i_1$ によってきまってしまう. そこで上とおなじ path を $(H|i_a, i_{a-1}, \dots, i_1|I)$ のように表すことにします.

つぎに, N の 2 つの真部分集合 H, I に対し, Q の path の集合 $\Omega(H, I)$ を以下のように定義します.

$$\begin{aligned}
 \Omega(\{i, i+1\}, \{i, i+1\}) &= \{(\{i, i+1\}|\{i, i+1\}), (\{i, i+1\}|i, i+1, i+2, i+2, i+1, i|\{i, i+1\})\}, \\
 \Omega(\{i\}, \{i\}) &= \{(\{i\}|\{i\}), (\{i\}|i, i+1, i+1, i|\{i\}), (\{i\}|i+2, i+2|\{i\}), \\
 &\quad (\{i\}|i, i+1, i+1, i+2, i+2|\{i\})\}, \\
 \Omega(\emptyset, \emptyset) &= \{(\emptyset|\emptyset), (\emptyset|1, 1|\emptyset), (\emptyset|2, 2|\emptyset), (\emptyset|3, 3|\emptyset), (\emptyset|1, 1, 2, 2|\emptyset), (\emptyset|1, 1, 3, 3|\emptyset), (\emptyset|2, 2, 3, 3|\emptyset), \\
 &\quad (\emptyset|1, 1, 2, 2, 3, 3|\emptyset)\}, \\
 \Omega(\{i, i+1\}, \{i+2\}) &= \{(\{i, i+1\}|i, i+1, i+2|\{i+2\})\}, \\
 \Omega(\{i+2\}, \{i, i+1\}) &= \{(\{i+2\}|i+2, i+1, i|\{i, i+1\})\}, \\
 \Omega(\{i, i+1\}, \{i+1\}) &= \{(\{i, i+1\}|i|\{i+1\}), (\{i, i+1\}|i, i+1, i+2, i+2, i+1|\{i+1\})\}, \\
 \Omega(\{i+1\}, \{i, i+1\}) &= \{(\{i+1\}|i|\{i, i+1\}), (\{i+1\}|i+1, i+2, i+2, i+1, i|\{i, i+1\})\}, \\
 \Omega(\{i\}, \{i+1\}) &= \{(\{i\}|i, i+1|\{i+1\}), (\{i\}|i, i+2, i+2, i+1|\{i+1\})\}, \\
 \Omega(\{i+1\}, \{i\}) &= \{(\{i+1\}|i+1, i|\{i\}), (\{i+1\}|i+1, i+2, i+2, i|\{i\})\}, \\
 \Omega(\{i, i+1\}, \emptyset) &= \{(\{i, i+1\}|i, i+1|\emptyset), (\{i, i+1\}|i, i+1, i+2, i+2|\emptyset)\}, \\
 \Omega(\emptyset, \{i, i+1\}) &= \{(\emptyset|i+1, i|\{i, i+1\}), (\emptyset|i+2, i+2, i+1, i|\{i, i+1\})\}, \\
 \Omega(\{i\}, \emptyset) &= \{(\{i\}|i|\emptyset), (\{i\}|i, i+1, i+1|\emptyset), (\{i\}|i, i+2, i+2|\emptyset), (\{i\}|i, i+1, i+1, i+2, i+2|\emptyset)\}, \\
 \Omega(\emptyset, \{i\}) &= \{(\emptyset|i|\{i\}), (\emptyset|i+1, i+1, i|\{i\}), (\emptyset|i+2, i+2, i|\{i\}), (\emptyset|i+2, i+2, i+1, i+1, i|\{i\})\}, \\
 &\quad (i = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

このなかにはないときは $\Omega(H, I) = \emptyset$ とします. $|\Omega(H, I)| = C_{HI}$ となっています.

さて, FQ の元 z_1, z_2 に対し, $z_1 - z_2 \in X$ のときに $z_1 \equiv z_2$ とかいて, FQ の同値関係 $\equiv$ を定義します. path の省略した表し方にあわせて quiver も省略して表し, relation は同値関係 $\equiv$ を用いてかくと次のようになります.



relations

$$\begin{aligned}
 (\{i\}|i, i|\{i\}) &\equiv 0, \\
 (\{i, i+1\}|i, i|\{i, i+1\}) &\equiv 0, \\
 (\{i+1\}|i+1, i|\emptyset) &\equiv (\{i+1\}|i, i, i+1|\emptyset), \\
 (\emptyset|i+1, i, i|\{i+1\}) &\equiv (\emptyset|i, i, i+1|\{i+1\}), \\
 (\{i, i+1\}|i, i+1, i|\{i\}) &\equiv 0, \\
 (\{i\}|i, i+1, i|\{i, i+1\}) &\equiv 0, \\
 &\quad (i = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

そして, 始点が H で終点が I のどんな path も 0 と同値になるか, あるいは $\Omega(H, I)$ に属する path のどれかと同値になることを確かめることができます. (この事実は [4,

Proposition 3] に対応しています.) これによって,

$$\dim_F \frac{FQ}{X} \leq \sum_{H,I \subsetneq N} C_{HI}$$

がわかります. 一方,

$$\sum_{H,I \subsetneq N} C_{HI} = \dim_F \Lambda = \dim_F \frac{FQ}{\text{Ker } \Phi} < \infty$$

ですから, $X \subset \text{Ker } \Phi$ により, $X = \text{Ker } \Phi$ であることがわかります.

参考文献

- [1] J.L. Alperin, Projective modules for $SL(2, 2^n)$, J. Pure Appl. Algebra, 15 (1979), 219–234.
- [2] D.J. Benson, Representations and cohomology I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 30 (Cambridge University Press, 1991).
- [3] K. Erdmann, Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Notes in Mathematics 1428 (Springer, Berlin, 1990).
- [4] H. Koshita, Quiver and relations for $SL(2, 2^n)$ in characteristic 2, J. Pure Appl. Algebra (to appear).