

## ある種の実アーベル体の 岩澤 $\lambda$ -不変量について

横浜市立大・市村文男 (Humio Ichimura)

東大数理科学・隅田浩樹 (Hiroki Sumida)

### §1 Introduction

$k$  を有理数体  $\mathbb{Q}$  上の有限次拡大体、 $p$  を素数、 $K$  を  $k$  の  $\mathbb{Z}_p$ -拡大とする。 $k_n$  を  $K/k$  の  $n$  番目の中間体、 $A_n$  を  $k_n$  のイデア  
ル類群の  $p$ -part とする。 $A_n$  の位数に関して、次の定理が知ら  
れている。

定理 (岩澤 [I2]).  $\lambda = \lambda_p(K/k)$ ,  $\mu = \mu_p(K/k)$  (いずれも  $0$  以  
上の整数),  $\nu = \nu_p(K/k)$  (整数) の  $3$  つの不変量が存在して、  
十分大きな  $n$  に対し

$$\#A_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成立する。

最も基本的な  $\mathbb{Z}_p$ -拡大として、円分  $\mathbb{Z}_p$ -拡大  $k_\infty$  がある。簡単のため、 $\lambda_p(k) = \lambda_p(k_\infty/k)$ 、 $\mu_p(k) = \mu_p(k_\infty/k) = 0$  と書くことにする。この時、全ての  $(k, p)$  の組に対して、 $\mu_p(k) = 0$  となることが予想されている。実際、 $k$  が  $\mathbb{Q}$  上アーベル拡大であるときには、この予想は Ferrero 氏-Washington 氏によって証明されている ([FW])。

一方、 $\lambda$ -不変量に関しては、次の予想がある。

GREENBERG 予想  $(p, k)$ .  $k$  が総実であるとき、全ての素数  $p$  に対し、 $\lambda_p(k) = 0$  であろう。

この予想は、1973 年 [I2, p.316] において岩澤氏により問題として挙げられ、更に、Greenberg 氏 [Gr] や Candiotti 氏 [C] らにより、各  $k, p$  に対する予想の (必要) 十分条件が与えられ、実際に予想が成立する自明でない例が示された。さらにその後、福田氏、小松氏、和田氏、田谷氏らがこの予想の明確な判定条件を与え、それを用いて判別式の“小さい”多くの実 2 次体  $k$  で  $\lambda_3(k) = 0$  であることを確かめられていた。しかし、これらの判定法は  $k_n$  の単数群  $E_n$  の言葉で記述されていて、高次の単数群を必要とする場合は、計算上困難であった。例えば、 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{254})$ 、 $\mathbb{Q}(\sqrt{473})$  では、少なくとも  $E_5(!)$  のデータが必要 (福田氏による) であり、予想の成立が確かめられていなかった。

小論では、ある種の  $\mathbb{Q}$  上の実アーベル体に対する予想の必

要十分条件を、円単数、 $p$  進  $L$  関数、更にある条件を満たす素数達を用いて、簡明な形で与える。この条件は、各  $k, p$  に対する予想が成立するかどうかを確かめる上でも有効である。実際、この判定条件を用いて、先に述べた 2 つの例を含め、実 2 次体  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ 、 $1 < m < 10^4$  に対して、 $\lambda_3(k) = 0$  を全て確かめることができた。

なおほぼ同時期に、Kraft 氏-Schoof 氏 [KS]、栗原氏 [K] らにより、同様に有効な判定条件が独立に与えられ、それを用いて  $\lambda_p(k) = 0$  となる新しい例が得られている。

## §2 定理

$k/\mathbb{Q}$ : 実アーベル体、 $p$ : 奇素数、 $k_n: k_\infty/k$  の  $n$  番目の中間体、 $A_n: k_n$  のイデアル類群の  $p$ -part、 $A_\infty = \varprojlim A_n$  (射影極限はノルム写像による) とする。以下、技術的な理由 (有理整数内の計算で済ませられる) により、次の仮定をする。

(仮定)  $\Delta = \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$  の exponent は  $p-1$  を割る。

$p$  と  $k$  に対する Greenberg 予想を  $\Delta$  分解により精密に調べることにする。 $\chi$  を  $\Delta$  の 1 次の指標とすると、仮定から  $p$  進体  $\mathbb{Q}_p$ -値と見なすことができる。そこで  $\chi$  の巾等元を  $e_\chi \in \mathbb{Z}_p[\Delta]$  とし、 $A_\infty(\chi) = e_\chi A_\infty$  とおく。 $f_\chi$  を  $\chi$  の conductor、 $q = l.c.m(f_\chi, p)$ 、 $\mu_p$  を 1 の  $p$  乗根のなす群とし、 $\gamma_0$  を  $\text{Gal}(k_\infty(\mu_p)/k(\mu_p))$  の位相生成元で、任意の 1 の  $p^n$  乗根  $\zeta$  に対し  $\zeta^{\gamma_0} = \zeta^{1+q}$  となるも

のとする。 $A_\infty(\chi) \otimes \mathbb{Q}_p$ は、 $\mathbb{Q}_p$ 上有限次線形空間になることが知られている。そこで $\text{char } A_\infty(\chi)$ により、 $A_\infty(\chi) \otimes \mathbb{Q}_p$ における  $T = \gamma_0 - 1$  の作用に対する特性多項式を表し、 $\lambda_\chi$ を  $\text{char } A_\infty(\chi)$  の次数とする。 $(p, \chi)$  に対する Greenberg 予想とは、Ferrero-Washington の定理から次を意味する。

Greenberg 予想  $(p, \chi)$   $\lambda_\chi = 0$  即ち、 $\text{char } A_\infty(\chi) = 1$ 。

この予想を次の3つの場合に分けて考える。(A)  $\chi(p) \neq 1$  かつ  $\chi^{-1}\omega(p) \neq 1$ 、(B)  $\chi^{-1}\omega(p) = 1$ 、(C)  $\chi(p) = 1$ 。この場合分けは、それぞれ局所単数群の構造が異なっていることによる。

$\lambda_\chi$ 、 $\text{char } A_\infty(\chi)$  には、Mazur 氏-Wiles 氏 [MW] により証明された岩澤主予想から得られる上界が存在する。以下、その上界を説明する。 $g_\chi(T)$  を  $p$  進  $L$  関数  $L_p(s, \chi)$  に対応する形式的巾級数 ( $g_\chi((1+q)^{1-s} - 1) = L_p(s, \chi)$ ) とする。Ferrero-Washington の定理と  $p$  進 Weierstrass 準備定理から、 $g_\chi(T) = P_\chi(T)u_\chi(T)$  ( $P_\chi(T)$ : distinguished polynomial,  $u_\chi(T): \mathbb{Z}_p[[T]]$  の単数) と一意的に書ける。(B) の場合、 $L_p(s, \chi)$  は自明な零点を持つため、 $T - q$  は  $P_\chi(T)$  を割る。そこで、(A)(C) の場合、 $\tilde{P}_\chi(T) = P_\chi(T)$ 、(B) の場合、 $\tilde{P}_\chi(T) = P_\chi(T)/(T - q)$  とおく。Mazur-Wiles の定理 (と因子  $T - q$  に関する議論 ((B) の場合)) から、次の上界が得られる。

(上界)  $\lambda_\chi \leq \deg \tilde{P}_\chi(T), \quad \text{char } A_\infty(\chi) \mid \tilde{P}_\chi(T)。$

ここで、 $\tilde{P}_\chi(T) = \prod_{i=1}^r P_i(T)^{e_i} (e_i \geq 1)$  と素因子分解し、各  $i$ 、 $n$  に対して、自然数  $a_{i,n}$ 、多項式  $Y_{i,n}(T) \in \mathbb{Z}[T]$ 、円単数  $c_{i,n}$  を以下のように定義する。 $(k_n, p)$  に対する Leopoldt 予想が成立することから、 $a_{i,n} < \infty$  となる ([B])。)

定義 1.  $\omega_n(T) = (1+T)^{p^n} - 1$ ,  $\nu_n = \omega_n/\omega_0$  とおく。

$$p^{a_{i,n}} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p[[T]]/(\omega_n, P_i) \text{ の exponent } \cdots (A)(B) \\ \mathbb{Z}_p[[T]]/(\nu_n, P_i) \text{ の exponent } \cdots (C) \end{cases}.$$

$$P_i(T)Y_{i,n}(T) \equiv p^{a_{i,n}} \bmod \begin{cases} \omega_n \cdots (A)(B) \\ \nu_n \cdots (C) \end{cases}.$$

定義 2.  $\mathbf{e}_{i,n} \in \mathbb{Z}[\Delta]$  s.t.  $\mathbf{e}_{i,n} \equiv e_\chi \bmod p^{a_{i,n}}$  かつ係数和が零。 $f_n : k_n$  の conductor、 $\zeta_{f_n} : 1$  の原始  $f_n$  乗根、 $t : p$  上の  $k$  の素イデアルによる剰余体の位数とおく。

$$c_{i,n} = N_{\mathbb{Q}(\mu_{f_n})/k_n} (1 - \zeta_{f_n})^{(t-1)\mathbf{e}_{i,n}}.$$

定理. 記号および設定は、以上の通りとする。

$$P_i(T) \nmid \text{char } A_\infty(\chi) \iff (c_{i,n})^{Y_{i,n}(T)} \notin (k_n)^{\times p^{a_{i,n}}} \\ \exists n \geq 0.$$

特に全ての  $i$  で右辺が成立すれば、 $\lambda_\chi = 0$  である。

系.

$$P_i(T) \nmid \text{char } A_\infty(\chi) \iff (c_{i,n})^{Y_{i,n}(T)} \bmod \mathfrak{L} \notin (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\times p^{a_{i,n}}} \\ \exists n \geq 0.$$

$\mathfrak{L}$  は  $\mathbb{Q}(\mu_{f_n})$  の 1 次の素イデアル、 $l = \mathfrak{L} \cap \mathbb{Q}$ 。

注意. (A)(B) の場合、 $n = 0$  では定理の右辺は  $v_p(\#A_0(\chi)) < v_p(P_i(0))$  と同値である。(C) の場合、 $n = 0$  では定理の右辺は成立しない。

定理、系の右辺をそれぞれ

$$(H_{i,n}) \quad (c_{i,n})^{Y_{i,n}(T)} \notin (k_n^\times)^{p^{a_{i,n}}},$$

$$(H_{i,n,l}) \quad (c_{i,n})^{Y_{i,n}(T)} \bmod \mathfrak{L} \notin ((\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times)^{p^{a_{i,n}}} \quad \text{for some } \mathfrak{L} \mid l$$

とおく。 $(H_{i,n})$  が成立するとき、 $(H_{i,n+1})$  も成立することが示される。

円単数  $c_{i,n}$ , 多項式  $Y_{i,n}(T)$ , 自然数  $a_{i,n}$  は、実際に計算可能な明確な元であることに注意する。そのため系の右辺は、素数  $l(f_n$  を法として 1 と合同) と有限体  $F_l$  の原始根を求めることにより各  $l$  ごとに整数計算でその正否を確かめられる有効な判定条件となっている。

### §3 数値例

定理 (または系) の判定条件を用いて、 $p = 3$ 、実 2 次体  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  ( $1 < m < 10^4$ 、 $m$ :square-free) の Greenberg 予

想を調べた。個数は、それぞれ (A)3041 (B)762 (C)2279 である。

実 2 次体  $k$  に対して、それぞれ次のような手順で予想の成立を確かめた。(A)(B) の場合、まず  $n = 0$ 、各  $i$  に対して、注意で述べた  $v_p(\#A_0(\chi)) < v_p(P_i(0))$  が成立するかどうかを調べる。ある  $i$  で成立しなかった場合、あるいは (C) の場合、 $n = 1$  で  $l \equiv 1 \pmod{l.c.m.(p^{a_{i,n}}, f_n)}$  となる最初の 7 個の素数  $l$  のいずれかで §2 の  $(H_{i,n,l})$  が成立するかどうかを調べる。成立しなかった場合、さらに  $n = 2$ 、残った  $i$  で... と続けていく。

この手順によって全ての  $i$  について定理 (または系) の右辺の成立が確認される最小の  $n$  を  $n_0 = n_0(k)$  とする。(A)(B)(C) それぞれの場合に、 $n_0 = 0, 1, 2, 3, \dots$  となる体の  $m$  の値を  $\tilde{P}_\chi(T)$  が既約であるか可約であるかに分けて表にまとめた。ただし、(A)(B)(resp. (C)) の場合、 $\tilde{P}_\chi(T)$  が既約かつ  $n_0 = 0$  (resp. 1) となるものについては、個数を # の後に記している。また、 $(\lambda^*)$  は  $\deg \tilde{P}_\chi(T)$  を表している。

Table A1: Irreducible case.

| $[n_0]$ | $(\lambda^*)$ $m$ |              |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|-------------------|--------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $[0]$   | (0)<br>(4)        | #1966<br>#14 | (1)  | #587 | (2)  | #189 | (3)  | #56  |      |
| $[1]$   | (1)               | 659          | 761  | 786  | 839  | 894  | 1091 | 1101 | 1191 |
|         | 1229              | 1373         | 1523 | 1787 | 1847 | 1907 | 1929 | 2118 | 2207 |
|         | 2213              | 2298         | 2459 | 2505 | 2543 | 2703 | 2993 | 3035 | 3054 |
|         | 3062              | 3221         | 3261 | 3281 | 3602 | 3719 | 3873 | 4106 | 4193 |
|         | 4649              | 4670         | 4706 | 4755 | 4886 | 4934 | 4994 | 5099 | 5102 |
|         | 5261              | 5333         | 5621 | 5637 | 5738 | 5799 | 6053 | 6311 | 6623 |
|         | 6686              | 6782         | 6807 | 6809 | 7058 | 7226 | 7259 | 7262 | 7319 |
|         | 7374              | 7473         | 7673 | 7721 | 7743 | 7994 | 8051 | 8255 | 8267 |
|         | 8373              | 8426         | 8447 | 8519 | 8597 | 9149 | 9215 | 9218 | 9219 |
|         | 9278              | 9293         | 9413 | 9419 | 9467 | 9551 | 9902 | (2)  | 1211 |
|         | 2831              | 2981         | 3071 | 3173 | 3287 | 3482 | 3590 | 4001 | 4355 |
|         | 4367              | 4853         | 4982 | 5042 | 5255 | 5798 | 5918 | 5930 | 6401 |
|         | 6770              | 6887         | 7055 | 7235 | 7694 | 8057 | 8306 | 8603 | 8769 |
|         | 8789              | 9086         | 9479 | 9710 | 9833 | 9869 | 9905 | (3)  | 1406 |
|         | 3803              | 4841         | 8274 | 8285 | 9155 | (4)  | 2177 | 4970 | 7014 |
|         | 7019              | 8999         | 9830 | (6)  | 5331 |      |      |      |      |
| $[2]$   | (1)               | 443          | 1758 | 3594 | 4098 | 4215 | 4238 | 4481 | 4511 |
|         | 4907              | 5619         | 5898 | 6366 | 7643 | 7709 | 7883 | 8363 | 8418 |
|         | 8837              | 9507         | (2)  | 5529 | 6995 | 8742 | (3)  | 3305 | 5063 |
|         | (4)               | 1937         |      |      |      |      |      |      |      |
| $[3]$   | (1)               | 785          | 899  | 2429 | 2510 | 3158 | 3569 | 4286 | 7598 |
|         | 7601              | 8282         | 9995 | (3)  | 8711 |      |      |      |      |
| $[4]$   | (1)               | 2666         | 3047 | 3846 | 5081 | 5297 | 7658 | 9590 |      |
| $[5]$   | (1)               | 254          | 473  | 1646 | 6798 | 6806 | 7671 |      |      |
| $[6]$   | (1)               | 9606         |      |      |      |      |      |      |      |

Table A2: Reducible case.

| $[n_0]$ | $(\lambda^*)$ |      |      |      | $m$  |      |      |      |      |  |
|---------|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|
| $[0]$   | (2)           | 2507 | 3918 | 3989 | 4197 | 5021 | 5606 | 6563 | 8310 |  |
|         | 8465          | 8555 | 8994 | 9165 | 9326 | 9777 | (3)  | 878  | 2658 |  |
|         | 4241          | 4427 | 4526 | 4661 | 4737 | 5690 | 5993 | 6141 | 6254 |  |
|         | 7367          | 9854 | (4)  | 7097 | 8870 |      |      |      |      |  |
| $[1]$   | (2)           | 4778 | 9659 | 9323 | (3)  | 2099 | 3023 | 4409 | 9998 |  |
|         | (4)           | 4151 |      |      |      |      |      |      |      |  |
| $[2]$   | (2)           | 2918 | 9578 | 9813 | (3)  | 2021 |      |      |      |  |
| $[3]$   | (2)           | 8339 |      |      |      |      |      |      |      |  |
| $[4]$   | (3)           | 9926 |      |      |      |      |      |      |      |  |

Table B1: Irreducible case.

| $[n_0]$ | $(\lambda^*)$ |      |      |      | $m$  |      |      |      |      |
|---------|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| [0]     | (0)           | #497 | (1)  | #149 | (2)  | #48  | (3)  | #5   |      |
|         | (4)           | #3   | (5)  | #3   | (6)  | #1   | (7)  | #1   |      |
| [1]     | (1)           | 321  | 1086 | 1509 | 1527 | 1806 | 2139 | 3579 | 4011 |
|         | 4065          | 4362 | 5901 | 6162 | 6243 | 6594 | 6639 | 6819 | 6927 |
|         | 7566          | 8277 | 8403 | 9897 | (2)  | 906  | 4434 | 5595 | 5991 |
|         | 7107          | 8655 | (3)  | 3138 | 7665 | 8538 | 8637 | (4)  | 4641 |
| [2]     | (1)           | 3957 | 7053 | 8115 | 9087 | 9294 | 9618 |      |      |
| [3]     | (1)           | 4749 | 5613 | 6414 |      |      |      |      |      |

Table B2: Reducible case.

| $[n_0]$ | $(\lambda^*)$ |      |     |      | $m$  |      |      |     |      |
|---------|---------------|------|-----|------|------|------|------|-----|------|
| [0]     | (2)           | 123  | 915 | 1518 | 4794 | 5829 | 7467 | (3) | 1095 |
|         | 7197          | 7719 | (4) | 7179 | 8727 |      |      |     |      |
| [1]     | (2)           | 8745 | (3) | 7242 | (4)  | 1599 |      |     |      |



#### §4 定理の説明

簡単のため、(A) の場合に限って説明する。 $k_\infty$  の最大  $p$ -分岐アーベル  $p$ -拡大を  $M$  とすると、岩澤主予想によって、 $\text{Gal}(M/k_\infty)$  の  $\chi$ -part の特性多項式は  $P_\chi(T)$  となる。ここで、類体論から、この拡大における惰性群の合成と ( $p$  上の素点の局所単数群)/(単数群の閉包) の構造が結び付けられる。一方、岩澤 ([I1])、Gillard ([Gi]) によって、(局所単数群)/(円単数群) の  $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(k_\infty/k)]]$ -加群の構造が岩澤多項式を用いて表されている。この結果を用いて、円単数  $c_{i,n}$  と多項式  $Y_{i,n}(T)$  により、(局所単数群)/(単数群) の  $\chi$ -part の特性多項式が  $P_i(T)^{e_i}$  で割り切れる条件を表したのが §2 の  $(H_{i,n})$  たちである。なお系は、Chebotarev の密度定理を用いて得られる。

(B)(C) の場合にも同様な方針で、判定条件を得ることができる。

## REFERENCES

- [B] A. Brumer, *On the units of algebraic number fields*, Mathematika **14** (1967), 121–124.
- [C] A. Candiotti, *Computations of Iwasawa invariants and  $K_2$* , Compositio Math. **29** (1974), 89–111.
- [FW] B. Ferrero and L. Washington, *The Iwasawa invariant  $\mu_p$  vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math. **109** (1979), 377–395.
- [Gi] R. Gillard, *Unités cyclotomiques, unités semi locales et  $\mathbb{Z}_l$ -extensions II*, Ann. Inst. Fourier **29** (1979), 1–15.
- [Gr] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98** (1976), 263–284.
- [I1] K. Iwasawa, *On some modules in the theory of cyclotomic fields*, J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 42–82.
- [I2] K. Iwasawa, *On  $\mathbb{Z}_l$ -extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. **98** (1973), 246–326.
- [KS] J.S.Kraft and R. Schoof, *Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields*, Compositio Math. **97** (1995), 135–155.
- [K] M. Kurihara, *The Iwasawa  $\lambda$  invariants of real abelian fields and the cyclotomic elements*, preprint (1995).
- [MW] B. Mazur and A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of  $\mathbb{Q}$* , Invent. Math. **76** (1984), 179–330.