

Fourth Example of Type II_1 Factor

東北大 教養 斎 藤 俊四郎

§1. 序. この講演では, WAI-MEE CHING の最近の論文, NON-ISOMORPHIC, NON-HYPERFINITE FACTORS の前半の部分を紹介する. 可分ヒルベルト空間上の II_1 -型 von Neumann factor で (代数的に) 同型でないものは, いままでに3つ知られている. 群 G の正則表現から構成される II_1 -型 factor を, $A(G)$ と表わせば,

(1) $G = \mathbb{T}$, i.e. 自然数全体の $\mathbb{T}$ の有限置換全体の作る群のとき, $A(\mathbb{T})$ は hyperfinite II_1 -型 factor である.

(2) $G = \mathfrak{S}_2$, i.e. 生成元が2つの自由群のとき, $A(\mathfrak{S}_2)$ は non-hyperfinite II_1 -型 factor で, 性質 (1) を持たない.

(3) $G = \mathbb{T} \times \mathfrak{S}_2$ のとき, $A(\mathbb{T} \times \mathfrak{S}_2)$ は non-hyperfinite II_1 -型 factor で, 性質 (1) をもつ.

の3つが既知のものがある. この論文では, von Neumann 代数の組合せを用いて, 上の (1), (2), (3) と同型でない7番

目の non-hyperfinite Π_1 - Π_∞ factor を構成する.

§2. 接合積. 以下 R は可分ヒルベルト空間 H 上の von Neumann 代数で, $\|t\| \leq 1$ の巡回かつ分離ベクトル $x_0 \in H$ をもつとする. G は R の $*$ -自己同型写像群で, $\|t^g x_0\| = \|t x_0\|$ かつ任意の $t \in R$ について $t^g = t$ となるものとする. したがって, t^g は $g \in G$ による $t \in R$ の像である. このとき, G は H 上の忠実な G -値表現 $g \rightarrow \mathcal{U}_g$ ($g \in G$) をもつ,

$$\mathcal{U}_g t = t^g \mathcal{U}_g \quad (t \in R)$$

をみたす. いま, R , x_0 は上の如くとし, G' は G の $*$ -自己同型写像群で, $\|t^{g'} x_0\| = \|t x_0\|$ ($t \in R, g' \in G'$) をみたすものとし, $\phi \in G$ から G' の上への準同型写像とする. G' は, 上述の如き G -値表現 $g' \rightarrow \mathcal{U}_{g'}$ を持つから, $g \in G$ に対して, $\mathcal{U}_g = \mathcal{U}_{g'}$, $t^g = t^{g'}$ ($t \in R$), $g' = \phi(g) \in G'$ と定義する. $\mathcal{H} = \sum_{g \in G} \oplus \mathcal{H}_g$, $\mathcal{H}_g = \mathcal{H}_g$ ($g \in G$) とするとき, G 上の R -値関数 $t: g \rightarrow t(g)$ かつ任意の $x = (x_g) \in \mathcal{H}$ について,

$$(L_t x)_g = \sum_{h \in G} t(h) \mathcal{U}_h x_{gh}, \quad g \in G$$

が $\mathcal{H}$ 上に $\sum$ unconditionally convergent のとき, R -関数という. したがって G 上の R -関数 t に対して,

$$\sum_{g \in G} \|(L_t x)_g\|^2 \leq K^2 \|x\|^2, \quad x = (x_g) \in \mathcal{H}$$

をみたす定数 K が存在するとき, H 上の有界線型作用素 L_t ,

$$L_t : x = (x_g) \in H \rightarrow ((L_t x)_g) \in H$$

を R -shifter と呼ぶ.

定義. R -shifter 全体の集合を $R \otimes_\phi G$ とし, R の (ϕ, G) による接合積と呼ぶ.

定理. $R \otimes_\phi G$ は von Neumann 代数であり, δ_e は $\delta_e(e) = 1$, $\delta_e(g) = 0$ ($g \neq e$) とす. $x_0 \otimes \delta_e \in H$ は $R \otimes_\phi G$ の直交基底を分離ベクトルである.

定理. $R \otimes_\phi G$ は次の (a), (b) をみたせば factor である.

(a) G は R の中心上エルゴード的.

(b) 各 $g \in G$, $g \neq e$ は次の (i), (ii), (iii) のいっつかをみたす.

(i) $\{h^{-1}gh : h \in G\}$ は G の無限部分集合 (この条件をみたす群を ICC-群と呼ぶ).

(ii) R は可換 von Neumann 代数で, $g' = \phi(g)$ は R 上 free

(iii) R は有限型又は III 型の factor で, $g' = \phi(g)$ は外部自己同型写像.

定理. $R \otimes_\phi G$ は factor のとき,

(i) $R \otimes_\phi G$ が有限型 $\Leftrightarrow R$ は G' -不変な有限トレースをもつ.

(ii) R が III 型 $\Rightarrow R \otimes_\phi G$ も III 型.

次に第2の接合積 $R_2 = (R \otimes_{\mathbb{K}} G) \otimes_{\mathbb{K}} \Delta$ を考える. R_2 に属する作用素 T は $T = (t(g, \lambda))_{g \in G, \lambda \in \Delta}$ 又は $(t(g, \lambda))$ と書くことにする. どのような T に対しても, $t(g, \lambda) = 0$ for $g \neq e$ なるものがある. $(t(e, \lambda))_{\lambda \in \Delta}$ と書く. このとき $\psi(\Delta)$ から $\bar{R}$ に移す ($\bar{R}$ は $R \otimes H \otimes l^2(G) = \mathcal{H}$ 上の ampliation) なるが,

$$R_1 = \{ (t(e, \lambda))_{\lambda \in \Delta} \}$$

は R_2 の von Neumann 部分代数で, 次の補助定理が成立する.

補助定理. $\xi = \xi_0 \otimes \delta_e \otimes \delta_e \in H \otimes l^2(G) \otimes l^2(\Delta)$ とあるとき, R_2 上の正值線形汎関数 $f(S) = (S\xi, \xi)$ ($S \in R_2$) に対して

$$f(ST) = f(TS), \quad S \in R_1, T \in R_2$$

をみたすとき, バナッハ空間 R_2 からバナッハ空間 R_1 への $\| \cdot \| \leq 1$ の射影 P が存在して, 任意の $T = (t(g, \lambda)) \in R_2$ に対して

$$P(T) = (t(e, \lambda)) \in R_1$$

をみたす.

§3. 第4の Factor の構成. 重なる無限個の生成元の系 $\Phi = \{a_0, b_0, a_1, b_1, \dots\}$ を持つ自由群とし, τ_i は a_i, b_i について置換して他は動かさない重なる置換, Δ は τ_i ($i=1, 2, \dots$) の生成する群とする. 各 $\pi \in \Delta$ は自然な仕方での重なる自己同型写像 $g \rightarrow g^\pi$ ($g \in \Phi$) をみたす. このとき, $A(\Phi)$ の各

元 $(t(g))_{g \in \mathfrak{G}}$ に對して,

$$(t(g))^\pi = (t(g^\pi)) \quad (\pi \in \Delta)$$

と定義すれば, Δ は $A(\mathfrak{G})$ の $\ast$ -外部自己同型写像群となる.

従つて, $A(\mathfrak{G}) \otimes \Delta$ は II_1 -型 factor である.

定義. II_1 -型 factor R が性質 (I) を持つとは, 任意有限個の $T_1, T_2, \dots, T_n \in R$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ に對して, $\mathcal{U}$ となり作用素 $U \in R$ が存在して,

$$\text{tr}(U) = 0, \quad \|U^* T_k U - T_k\| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

をみたすときである.

定義. von Neumann 代数 R が性質 (C) をもつとは, 各 $T \in R$ に對して $\text{strong} \lim_n U_n^* T U_n = T$ をみたす $\mathcal{U}$ となり作用素の列 $\{U_n\}$ ($U_n \in R$) があたえられるときには, お互に可換な作用素の列 $\{V_n\}$ ($V_n \in R$) が存在して, $\text{strong} \lim_n (U_n - V_n) = 0$ となることをいふ.

このとき, 次の諸定理が証明できる. $A(\mathfrak{G}) \otimes \Delta$ は § 1 の述べた既知の II_1 -型 factors $A(\Pi)$, $A(\mathfrak{G}_2)$, $A(\Pi \times \mathfrak{G}_2)$ と同型である. 第 4 の II_1 -型 factor である.

定理. $A(\mathfrak{G}) \otimes \Delta$ は性質 (I) をもつ.

証明. $T_1, T_2, \dots, T_n \in A(\mathfrak{G}) \otimes \Delta$ と正数 $\varepsilon > 0$ があたえられるとある. $T_1', T_2', \dots, T_n' \in A(\mathfrak{G}) \otimes \Delta$ が台が $\mathfrak{G} \times \Delta$ の有限部分集合 $S \times S'$ となるものとする.

$$[\|T_k - T_k'\|] < \varepsilon/2 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

ε みたすものとする。S' は重なる有限部分集合であるから、S' の要素にあらわされる重なる要素 a_j 又は b_j のうちで番号 j の最大のものを q とすると、 Δ が可換群なることに注意すれば、 $U = \tilde{U}_{q+1} \in A(\Phi) \otimes \Delta$ 且 $UT_k' = T_k'U$ ($k=1, 2, \dots, n$) である、 $\text{tr}(U) = (U\delta_e \otimes \delta_e, \delta_e \otimes \delta_e) = 0$ である。

$$\begin{aligned} \therefore [\|U^*T_kU - T_k\|] &\leq [\|U^*(T_k - T_k')U\|] + [\|T_k' - T_k\|] \\ &< \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

定理. $A(\Phi) \otimes \Delta$ は性質 (C) をもつ。

証明. $\{U_n\}$ ($U_n \in A(\Phi) \otimes \Delta$) を $\varepsilon = 1/n$ 作用素の列で

$$\text{strong} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* T U_n = T, \quad T \in A(\Phi) \otimes \Delta$$

をみたすものとする。 $A(\Phi) \otimes \Delta = (R \otimes \Phi) \otimes \Delta$ (ここで R は複素数体、 Φ は $\Phi \rightarrow \{e\}$ の準同型射) に補助定理を用いければ、 $A(\Phi) \otimes \Delta$ 上の部分代数 $R_1 = \{(x(e, \lambda))_{\lambda \in \Delta}\}$ の上への、 U_n の射影 P が存在する。 $V_n = P(U_n)$ とおけば Δ が可換群なることより $\{V_n\}$ はお互に可換で、 $\text{strong} \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - V_n) = 0$ をみたす。

定理. $A(\Pi)$, $A(\Pi \times \Phi)$ は性質 (C) をもたない。

証明. $g_i \in \Pi$ を i と $i+1$ を置換し他は動かさないのである。

と、 $U_n = \tilde{U}_{g_n}$ ($n=1, 2, \dots$) 且

$$\text{strong} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* T U_n = T, \quad T \in A(\Pi)$$

をみたす. 11 3 $A(\Pi)$ の性質 (C) を持つとすると, 相互に可換な作用素の列 $\{V_n\}$ ($V_n \in A(\Pi)$) が存在して $\text{stronglim}(U_n - V_n) = 0$ をみたす. したがって $g_i g_{i+1} \neq g_{i+1} g_i$ ($i=1, 2, \dots$) であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \|\delta_{(g_i g_{i+1})^{-1}} - \delta_{(g_{i+1} g_i)^{-1}}\| = \|(U_i U_{i+1} - U_{i+1} U_i) \delta_e\| \\ &= \| [U_i U_{i+1} - U_{i+1} U_i] \| \\ &\leq \| [(U_i - V_i) U_{i+1}] \| + \| [V_i (U_{i+1} - V_{i+1})] \| + \| [(V_{i+1} - U_{i+1}) V_i] \| \\ &\quad + \| [U_{i+1} (V_i - U_i)] \| \leq 2 \| [U_i - V_i] \| + 2 \| V_i \| \| [U_{i+1} - V_{i+1}] \| \\ &\rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

これは矛盾.