

CP-invariance and nonlinear sigma models

藤井 一幸

横浜市立大学・文理学部・数学教室

QCD の CP-invariance が nonlinear sigma models に古典論及び量子論においてどのような影響を及ぼすのか？ これを 2 次元の chiral model と 3 次元の Grassmann model に限定して調べる。我々の考える nonlinear sigma models では、力学変数(写像)の domain で回転不変性(rotational invariance)を仮定する

(I) Chiral model in two dimensions

2 次元の chiral model を考えよう。action S は

$$S : \text{Map}(S^2, SU(N)) \longrightarrow \mathbb{R} ;$$

$$S(g) = \frac{1}{4f^2} \int_{S^2} \text{tr} dg^{-1} \wedge * dg \quad (a)$$

で与えられる。ここに f は coupling constant である。この運動方程式は

$$\frac{1}{2f^2} d(*g^{-1}dg) = 0 \quad (i)$$

で与えられる。この方程式は 次の2つの $\mathbb{Z}_2$ -symmetry

$$P(\text{parity}) : (x_0, x_1) \longrightarrow (x_0, -x_1)$$

$$C(\text{charge}) : g \longrightarrow g^{-1}$$

のもとで独立に不変である。QCD はこれに異を唱える。

CP-不変性の原理 (QCD からの要請)

理論は CP 変換 ($\because C$ と P の合成), 即ち

$$CP : g(x_0, x_1) \longrightarrow g(x_0, -x_1)^{-1}$$

のみで不変であるべし。

この原理を最小限のコストでみたすために運動方程式 (i) を

$$\frac{1}{2f^2} d(*g^{-1}dg) + \frac{k}{4\pi} g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg = 0 \quad (ii)$$

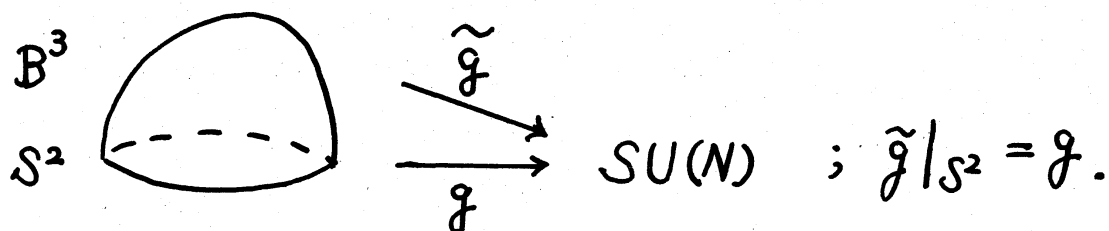
と補正する。 k は後に決められる定数 (実数) である。では (ii) を運動方程式としても action は何か? この解答は Witten [1] によって与えられた。

$$S(g; \tilde{g}) = \frac{1}{4f^2} \int_{S^2} \text{tr} \, dg^{-1} \wedge * dg + \frac{k}{12\pi} \int_{B^3} \text{tr} \, (\tilde{g}^{-1} d\tilde{g})^{\wedge 3}, \quad (b)$$

但し, $\tilde{g}$ は

$$\tilde{g} \in \text{Map}(B^3, SU(N)) \quad \& \quad \tilde{g}|_{\partial B^3 = S^2} = g$$

となるもの (下図)。



g の lift $\tilde{g}$ は unique ではないので, (b) は single-valued ではない。しかし Feynmann 積分では

$$e^{iS(g; \tilde{g})} \text{ が single-valued}$$

が要請されるだけである。

Theorem ([1])

$$e^{iS(g; \tilde{g})} \text{ が single-valued} \implies k \in \mathbb{Z}.$$

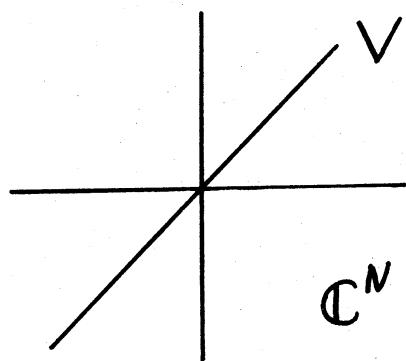
即ち, k が 位相的に量子化される。

(II) Grassmann model in three dimensions
3次元の Grassmann model を考えよう。

$\mathbb{C}^N$ の中の j 次元部分空間全体のつくる Grassmann manifold $G_{j,N}(\mathbb{C})$ ($0 \leq j \leq N$) を projection operators で表現する。

$$G_{j,N}(\mathbb{C}) = \{ P \in M(N; \mathbb{C}) \mid P^2 = P, P^\dagger = P, \text{tr} P = j \}$$

$$\cong U(N) / U(j) \times U(N-j).$$



$V \longleftrightarrow \exists! P_V : \text{projection on } V$

そして

$$G_{*,N} = \bigcup_{j=0}^N G_{j,N}(\mathbb{C})$$

と置く。3次元の Grassmann model の action は

$$S : \text{Map}(S^3, G_{*,N}) \longrightarrow \mathbb{R} ;$$

$$S(P) = \frac{1}{4f^2} \int_{S^3} \text{tr} dP \wedge *dP \quad (c)$$

で与えられる。ここに f は coupling constant である。この運動方程式は

$$\frac{1}{2f^2} [P, d(*dP)] = 0 \quad (iii)$$

で与えられる。この方程式は次の2つの Z_2 -symmetry

$$P (\text{parity}) : (x_0, x_1, x_2) \longrightarrow (x_0, x_1, -x_2)$$

$$C (\text{charge}) : P \longrightarrow 1 - P$$

のもとで独立に不変である。QCD はこれに異を唱える。

CP-不変性の原理 (QCD からの要請)

理論は CP 変換 (C と P の合成), 即ち,

$$CP : P(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow 1 - P(x_0, x_1, -x_2)$$

のみで不変であるべし。

この原理を最小限のコストでみたすために運動方程式 (iii) を

$$\frac{1}{2f^2} [P, d(*dP)] + \frac{-\theta}{\pi^2} dP \wedge dP \wedge dP = 0 \quad (iv)$$

と補正する。 θ は後に決められる定数 (実数) である。この方程式を運動方程式としても action

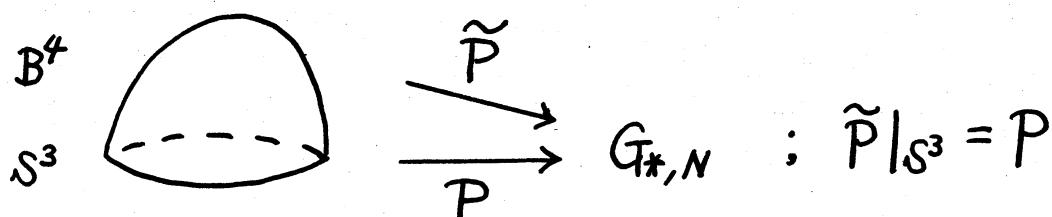
は

$$S(P; \tilde{P}) = \frac{1}{4f^2} \int_{S^3} \text{tr} dP \wedge * dP + \frac{-\theta}{4\pi^2} \int_{B^4} \text{tr} (\tilde{P} d\tilde{P} \wedge d\tilde{P})^{\wedge 2} \quad (d)$$

で与えられる ([2])。ここに $\tilde{P}$ は

$$\tilde{P} \in \text{Map}(B^4, G_{*,N}) \quad \& \quad \tilde{P}|_{\partial B^4 = S^3} = P$$

となるもの (下図)。



P の lift $\tilde{P}$ は unique ではないので, (d) は single-valued ではない。しかし Feynmann 積分では

$$e^{iS(P; \tilde{P})} \text{ が single-valued}$$

が要請されるだけである。

Theorem ([2], [3])

$$e^{iS(P; \tilde{P})} \text{ が single-valued}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad j=1, N-1 \text{ のとき } \theta \text{ は 任意の実数} \\ \quad \text{を取る (量子化されない).} \\ \text{(II)} \quad 2 \leq j \leq N-2 \text{ のとき } \theta \text{ は 量子化さ} \\ \quad \text{れる.,} \\ \quad \theta = \frac{\pi}{4} k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

(III) Some relation

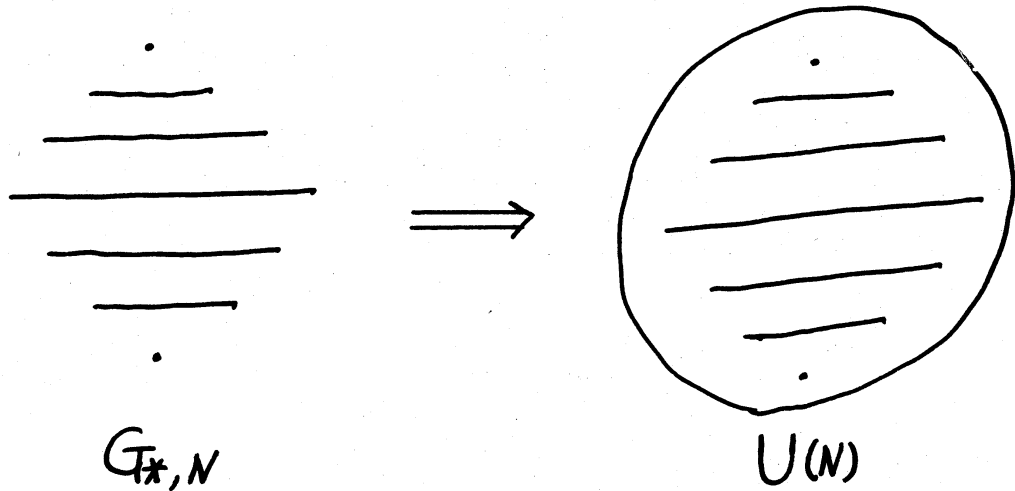
(I) で target space を $SU(N)$ の代りに $U(N)$ としても全く同様の結果が成り立つ。即ち, $g \in \text{Map}(S^2, U(N))$ である。この場合に charge 変換の fixed points を考えてみる。

Fixed points of charge

$$\begin{aligned} &= \{ g \in U(N) \mid g^{-1} = g \text{ \& } g^{\dagger} = g \} \\ &= \{ g \in U(N) \mid g^2 = \mathbb{1} \text{ \& } g^{\dagger} = g \} \\ &= \{ 2P - \mathbb{1} \mid P^2 = P, P^{\dagger} = P \} \\ &= \bigcup_{j=0}^N \{ 2P - \mathbb{1} \mid P^2 = P, P^{\dagger} = P, \text{tr} P = j \} \\ &\cong \bigcup_{j=0}^N G_{j,N} = G_{*,N}. \end{aligned}$$

即ち, (I) での charge 変換の fixed points が (II)

の model の target space になっている (下図)。



References

- [1] E. Witten : Non-abelian bosonization in two-dimensions, Commun. Math. Phys., 92 (1984), 455 - 472.
- [2] G. Ferretti & S. G. Rajeev : Current algebra in three dimensions, Phys. Rev. Lett., 69 (1992), 2033 - 2036.
- [3] K. Fujii : Ferretti-Rajeev term and homotopy theory, to appear in Commun. Math. Phys.