

ISOVARIANT MAPS BETWEEN REPRESENTATION SPACES

大阪大学大学院理学研究科・長崎 生光 (Ikumitsu Nagasaki)

Department of Mathematics, Graduate School of Science

Osaka University

1. 序

Borsuk-Ulam の定理は、変換群の立場からは次のように述べられる。

定理 1.1 (Borsuk-Ulam の定理). 位数 2 の巡回群 C_2 が球面 S^n , S^m に対心的に作用しているとする. このとき連続 C_2 同変写像 $f: S^n \rightarrow S^m$ が存在するならば, $n \leq m$ が成り立つ.

Borsuk-Ulam の定理は様々な拡張が知られているが, A. G. Wasserman [5] は上の C_2 同変写像 $f: S^n \rightarrow S^m$ が isovariant であることに注目し, Borsuk-Ulam の定理の isovariant version を考察した. その結果の一つは, 次のように述べられる.

定理 1.2 (Isovariant Borsuk-Ulam 定理). G をコンパクト・可解リー群とする. 表現空間の間の連続 G -isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ が存在するならば, 不等式

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つ.

Remark. 一般のコンパクト・リー群で上の不等式が成り立つかどうかは, 未解決問題である. しかし, 上より弱い形 (弱 Isovariant Borsuk-Ulam 定理) であれば一般に成り立つ. その詳細は [3] で論じられる.

上の定理は, 不動点集合の余次元の間の不等式が G -isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ の存在性の一つの障害であることを言っている. これ以外に何か障害があるのだろ

2000 *Mathematics Subject Classification*. 57S17, 55M20.

Key words and phrases. Borsuk-Ulam theorem, isovariant map, representation.

うか？この小論では、このような問題意識のもと、群 G が有限アーベル群の場合に、Isovariant Borsuk-Ulam 定理の逆を考察したい。

G -isovariant 写像の定義を思い出しておこう。 G 空間の間の G -isovariant 写像 $f: X \rightarrow Y$ とは、 $G_x = G_{f(x)} (\forall x \in X)$ が成り立つ G 同変写像のことである。 $(G_x$ は x のアイソトローピー群を表す。) 以後、写像はすべて連続性を仮定する。 G を有限可解群とし、 V, W を G の直交表現空間とする。(混乱のおそれがなければ直交表現空間を単に表現という。) $f: V \rightarrow W$ は G -isovariant 写像とする。容易にわかるように、任意の部分群の組 $H, K (H \triangleleft K)$ に対して、 $f^H: V^H \rightarrow W^H$ は自然に K/H -isovariant 写像と見なすことができる(補題 2.1 参照)。したがって、定理 1.2 から、次の不等式を得る。

$$(C_{V,W}): \dim V^H - \dim V^K \leq \dim W^H - \dim W^K \quad (\forall H \triangleleft \forall K).$$

Isovariant Borsuk-Ulam 定理の逆問題をここでは次のように定式化する。

問題 A. G は可解群とする。表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ をみたすならば、 G -isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ は存在するか？

この問題は完全には解決されていないが、ある種のアーベル群については、肯定的な解答をもつ。たとえば、§2 で次のことが示される。

定理 2.6. G はアーベル p 群とする。表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ をみたすならば、 G -isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ が存在する。

アーベル p 群以外でも問題 A が肯定的である群が存在する。ユニタリー表現の場合には河野 [2] によって示されたが、位数が $p^n q^m$ (p, q は異なる素数) の巡回群がそのような例であることを §3 で示す。

2. アーベル p 群の場合

はじめに isovariant 写像について基本的なことを述べておく。証明はいずれも容易である。 G は有限群とする。

補題 2.1. (1) G -isovariant 写像 $f: X \rightarrow Y$ の作用を部分群 H に制限して得られる写像 $\text{Res}_H f$ は H -isovariant である。

(2) H は正規部分群とする。 G -isovariant 写像 $f: X \rightarrow Y$ の H 不動点集合への制限写像 $f^H: X^H \rightarrow Y^H$ は G/H -isovariant である。

- (3) H は正規部分群とし, $g: X^H \rightarrow Y^H$ が G/H -isovariant とする. 射影 $G \rightarrow G/H$ により X^H, Y^H を G 空間とみたとき, g は G -isovariant 写像である.
- (4) $f: X_1 \rightarrow Y_1$ と $g: X_2 \rightarrow Y_2$ が G -isovariant ならば, $f \times g: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$, $f * g: X_1 * X_2 \rightarrow Y_1 * Y_2$ も G -isovariant である. ($*$ は結を表す.)

任意の G 表現 V に対して, V_G により V^G の直交補表現を表そう. また $S(V)$ は V の単位球面を表す.

補題 2.2. V, W を G 表現とする. 次の命題は互いに同値である.

- (1) G -isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ が存在する.
- (2) G -isovariant 写像 $f: V_G \rightarrow W_G$ が存在する.
- (3) G -isovariant 写像 $f: S(V) \rightarrow S(W)$ が存在する.
- (4) G -isovariant 写像 $f: S(V_G) \rightarrow S(W_G)$ が存在する.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): $i: V_G \rightarrow V$ を包含写像, $p: W \rightarrow W_G$ を射影とする. 包含写像 i は明らかに G -isovariant ある. また G が W^G 上自明に作用することから p も G -isovariant であることがわかる. したがって合成写像 $p \circ f \circ i: V_G \rightarrow W_G$ は G -isovariant となる.

(2) $\Rightarrow$ (4): $(V_G)^G = (W_G)^G = 0$ かつ $f^{-1}(0) = \{0\}$ であるので, G -isovariant 写像 $g: S(V_G) \rightarrow S(W_G)$ が $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$ によって定義できる.

(4) $\Rightarrow$ (3): $g: S(V_G) \rightarrow S(W_G)$ を任意の連続写像とする. G は自明に作用しているので g は G -isovariant である. このとき $f * g: S(V) \cong S(V_G) * S(V^G) \rightarrow S(W_G) * S(W^G) \cong S(W)$ は G -isovariant 写像となる. (3) $\Rightarrow$ (1): $f: S(V) \rightarrow S(W)$ の開錐をとることにより G -isovariant 写像 $\tilde{f}: V \rightarrow W$ が得られる.

以後この節では, G は有限アーベル群とする. 表現論からよく知られた事実を思い出しておこう. V は G 表現とし, $V \cong V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$ を既約分解とする. G はアーベル群なので, 各 V_i は (実) 1 または 2 次元である. 任意の部分群 H に対して, $V(H) = \bigoplus_{i: \text{Ker } V_i = H} V_i$ とおく. ここで $\text{Ker } V_i$ は表現準同型 $\rho_{V_i}: G \rightarrow O(n)$ ($n = 1$ or 2) の核である. 核が自明のとき, その表現は忠実であるという. つぎのことはよく知られている.

補題 2.3. V は G の既約表現とする. $K = \text{Ker } V$ とおく.

- (1) G/K は巡回群である.

- (2) $V^K (= V)$ は忠実な既約 G/K 表現である. 逆に U が忠実な既約 G/K 表現ならば, 射影 $G \rightarrow G/K$ を通して U は核 K をもつ既約 G 表現とみなされる. したがって, 核 K をもつ既約 G 表現と忠実な既約 G/K 表現の間に 1 対 1 対応がある.

補題 2.3 からわかるようにアーベル群の表現は本質的に巡回群の表現に帰着される. そこで位数 n の巡回群 C_n の既約表現について思い出しておこう. C_n の生成元を g とする. ユニタリー表現 $U_i (= \mathbb{C})$ が g の作用を $gz = \xi^i z$ ($z \in \mathbb{C}$) とすることにより定義される. ここで $\xi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ である. この U_i ($0 \leq i \leq n-1$) が C_n のすべての (互いに異なる) 既約なユニタリー表現である. 基礎体を $\mathbb{R}$ に制限すると, 直交表現が得られる. (ただし, 既約になるとは限らない.) この直交表現も同じ記号 U_i で表すことにする. $1 \leq i \leq [(n-1)/2]$ ならば, U_i は直交表現としても既約であり互いに異なる. また直交表現として $U_i \cong U_{n-i}$ である. $U_0, U_{n/2}$ (後者は n が偶数の場合) は直交表現として既約ではない. 実際 $U_0 \cong 2\mathbb{R} := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $U_{n/2} \cong 2\mathbb{R}^- := \mathbb{R}^- \oplus \mathbb{R}^-$ となってる. ここで $\mathbb{R}$ は自明な 1 次元表現, $\mathbb{R}^-$ は非自明な 1 次元表現をあらわす (i.e., g は $\mathbb{R}^-$ 上 $gx = -x$ で作用する). また, $\text{Ker } U_i \cong C_{(i,n)}$ であることに注意しておこう. 特に U_i が忠実になるのは i と n が互いに素であることが必要十分である.

isovariant 写像の存在について, つぎのことは基本的である.

補題 2.4. V と W は同じ核をもつ既約 C_n 表現とする. そのとき C_n -isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ が存在する.

証明. V, U が自明表現のときは明らかである. 非自明の場合, 補題 2.1, 2.3 より V と W は忠実としてよい. したがって $n \neq 2$ のときは, $V = U_i, W = U_j$ (i, j は n と素), $n = 2$ のときは, $V = W = \mathbb{R}^-$ としてよい. 前者の場合, C_n -isovariant 写像がつぎのようにして構成できる. 正整数 k で $ik \equiv 1 \pmod{n}$ となるものをとる. 写像 $f: U_i \rightarrow U_j$ を $f(z) = z^{kj}$ として定義する. このとき f は isovariant である. 実際, C_n 同変写像であることと $f^{-1}(0) = \{0\}$ であることは容易にわかる. C_n は $U_i - \{0\}$ と $U_j - \{0\}$ 上に自由に作用しているので, f は isovariant である. 後者の場合は恒等写像をとればよい.

G がアーベル群のとき, $\mathcal{D}$ を G/H が巡回群となる部分群 H 全体の集合とする. 補題 2.3 (1) より $V = \bigoplus_{H \in \mathcal{D}} V(H)$ となる. (ただし $V(H) = 0$ となることもありうる.)

補題 2.4 からつぎのことがわかる.

命題 2.5. G はアーベル群とし, V, W は G 表現とする. 各 $H \in \mathcal{D} - \{G\}$ について, $\dim V(H) \leq \dim W(H)$ が成り立てば, G -isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ が存在する.

証明. 補題 2.1 (4) より, $V(H)$ と $W(H)$ の間に G -isovariant 写像が存在することを示せば十分である. さらに, $V(H), W(H)$ は核 H をもつ既約表現の直和であるので, 補題 2.1 (3), 2.3 より, G が巡回群 C_n で $H = 1$ の場合を考えれば十分である. このとき $\dim V(1) \leq \dim W(1)$ であるので, 補題 2.4 を用いると $V(1)$ から $W(1)$ への間の C_n -isovariant 写像が構成できる.

次に序で述べた次の結果を証明しよう.

定理 2.6. G はアーベル p 群とする. 表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ をみたすならば, G -isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ が存在する.

証明. 命題 2.5 より, $\dim V(H) \leq \dim W(H) (\forall H \in \mathcal{D} - \{G\})$ を示せばよい.

まず任意の $H \in \mathcal{D} - \{G\}$ に対して, H を真に含む最小の部分群 K が存在する. 実際 K_1, K_2 を H を真に含む極小の部分群とすると, K_i/H ($i = 1, 2$) は巡回 p 群 G/H の部分群であるので, $K_1 \leq K_2$ または $K_1 \geq K_2$ が成り立つ. したがって極小性から $K_1 = K_2$ となる.

$V = \bigoplus_{H \in \mathcal{D}} V(H)$, $W = \bigoplus_{H \in \mathcal{D}} W(H)$ が条件 $(C_{V,W})$ をみたすとする. $H \in \mathcal{D} - \{G\}$ とし, K を H を真に含む最小の部分群とする. このとき $V^H = \bigoplus_{H \leq L} V(L)$ である. K の最小性から $V^K = \bigoplus_{K \leq L} V(L) = \bigoplus_{H < L} V(L)$ が成り立つ. したがって

$$\dim V^H - \dim V^K = \dim V(H)$$

を得る. 同様に

$$\dim W^H - \dim W^K = \dim W(H)$$

が成り立つ. ゆえに条件 $(C_{V,W})$ より $\dim V(H) \leq \dim W(H)$ が成り立つ.

Remark. 上の証明では, $(C_{V,W})$ より弱い条件:

$(C'_{V,W}) : \dim V^H - \dim W^H \leq \dim W^H - \dim W^H$ ($H < K$, K/H が素数位数) のみ仮定すれば十分であるが, 容易にわかるように G がアーベル群のとき, 条件 $(C_{V,W})$ と $(C'_{V,W})$ は同値である.

3. 位数が $p^n q^m$ の巡回群の場合

一般には, 条件 $(C_{V,W})$ から $\dim V(H) \leq \dim W(H)$ は導けない. 例をあげよう. G は位数 pq の巡回群 C_{pq} (p, q は相異なる素数) とする. 前節の記号のもと, $V = U_1$, $W = U_p \oplus U_q$ とおく. このとき V, W は条件 $(C_{V,W})$ をみたすが, $\dim V(1) = \dim U_1 = 2 > \dim W(1) = 0$ となる. しかしこの例においても, isovariant 写像は存在する. 実際 $f : V \rightarrow W$ を $f(z) = (z^p, z^q)$ で定義すると f は C_{pq} -isovariant 写像になる ([4]).

G はアーベル群とする. $H \in \mathcal{D} - \{G\}$ に対して, U_H を G/H 表現 U_1 から誘導される核 H をもつ G 表現とする. 同様に $\mathbb{R}^-$ から誘導される表現を $\mathbb{R}_H^-$ で表す. U_H は $G/H \not\cong C_2$ のとき, 既約である. $G/H \cong C_2$ のときは, 直交表現として $U_H \cong \mathbb{R}_H^- \oplus \mathbb{R}_H^-$ と既約分解される. さて, 上で述べた例を位数が $p^n q^m$ のアーベル群の場合に一般化しよう. そのために W 列の概念を導入しておく.

定義. 部分群の列 $\{H_1, \dots, H_r; K_1, \dots, K_{r+1}\}$ ($r \geq 1$) が $\mathcal{D} - \{G\}$ で (長さ r の) W 列であるとは, 次の条件をみたすときをいう:

- (1) $H_i \not\leq H_j$ かつ $H_i \not\geq H_j$ ($i \neq j$),
- (2) $H_i < K_i$, $H_i < K_{i+1}$ で $K_i \cap K_{i+1} = H_i$ ($\forall i$),
- (3) K_i/H_i はすべて p ベキ, K_{i+1}/H_i はすべて q ベキ.

命題 3.1. G を位数 $p^n q^m$ のアーベル群とする. $\{H_1, \dots, H_r; K_1, \dots, K_{r+1}\}$ を W 列とする. そのとき, G -isovariant 写像:

$$f : U_{H_1} \oplus \dots \oplus U_{H_r} \rightarrow U_{K_1} \oplus \dots \oplus U_{K_{r+1}}$$

が存在する.

証明のために必要な補題をいくつか準備する.

補題 3.2. G を位数 $p^n q^m$ のアーベル群とする. $\{H_1, \dots, H_r; K_1, \dots, K_{r+1}\}$ は $\mathcal{D} - \{G\}$ の W 列とする. このとき以下が成り立つ.

- (1) $K_i \not\leq K_j$ かつ $K_i \not\geq K_j$ ($i \neq j$).

- (2) 任意の $H_{i_1}, \dots, H_{i_k}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$) に対して, $\bigcap_s H_{i_s} = H_{i_1} \cap H_{i_k}$. 任意の $K_{i_1}, \dots, K_{i_k}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r+1$) に対して, $\bigcap_s K_{i_s} = K_{i_1} \cap K_{i_k}$.
- (3) $H_i \cap H_j \in \mathcal{D}$ ($i < j$).
- (4) $K_i \cap K_j = H_i \cap H_{j-1}$ ($i < j$).

証明. (1): W の定義 (2) から明らかである.

(2): G_l で G のシロー l 群 ($l = p$ or q) を表す. $G = G_p \times G_q$ となる. G の部分群 H は $H_p \times H_q$ の形に表される. $H_i = H_{i,p} \times H_{i,q}$, $K_i = K_{i,p} \times K_{i,q}$ と表しておく. K_i/H_i は p ベキ, K_{i+1}/H_i は q ベキなので, $H_{i,p} < K_{i,p}$, $H_{i,q} = K_{i,q}$, $H_{i,p} = K_{i+1,p}$, $H_{i,q} < K_{i+1,q}$ が従う. ゆえに,

$$H_{i,p} > H_{i+1,p}, \quad H_{i,q} < H_{i+1,q}, \quad K_{i,p} > K_{i+1,p}, \quad K_{i,q} < K_{i+1,q}$$

がわかる. このことから容易に $\bigcap_s H_{i_s} = H_{i_1} \cap H_{i_k}$, $\bigcap_s K_{i_s} = K_{i_1} \cap K_{i_k}$ が従う.

(3): 上の包含関係から $H_i \cap H_j = H_{j,p} \times H_{i,q}$ となる. G/H_i と G/H_j は巡回群なので, $G_p/H_{j,p}$ と $G_q/H_{i,q}$ も巡回群である. したがって, $G/H_i \cap H_j \cong G_p/H_{j,p} \times G_q/H_{i,q}$ は巡回群となる.

(4): 同様にして, $K_i \cap K_j = K_{j,p} \times K_{i,q}$ かつ $H_i \cap H_{j-1} = H_{j-1,p} \times H_{i,q}$ が成り立つ. (2) の証明でみたように, $K_{j,p} = H_{j-1,p}$ および $K_{i,p} = H_{i,q}$ である. ゆえに, $K_i \cap K_j = H_i \cap H_{j-1}$ である.

補題 3.3. $V = U_{L_1} \oplus \dots \oplus U_{L_r}$ ($L_i \in \mathcal{D} - \{G\}$) とする. 任意の $z = (z_1, \dots, z_r) \in V$ でのアイソトロピー群 G_z は $G_z = \bigcap_{i: z_i \neq 0} L_i$ となる.

証明. $z_i \neq 0$ のとき $G_{z_i} = L_i$ であり, $z_i = 0$ のとき $G_{z_i} = G$ である. $G_z = \bigcap_i G_{z_i}$ なので結果が従う.

命題 3.1 を証明しよう.

命題 3.1 の証明. $a_i = |K_i/H_i|$, $b_i = |K_{i+1}/H_i|$ とおく. a_i と b_i ($1 \leq i \leq r$) は互いに素であることに注意する. 写像 f を

$$f(z_1, \dots, z_r) = (z_1^{a_1}, z_1^{b_1} + z_2^{a_2}, \dots, z_{r-1}^{b_{r-1}} + z_r^{a_r}, z_r^{b_r})$$

により定義する. この写像が isovariant であることを示す. 写像

$$h_k: U_H \rightarrow U_K; f(z) = z^k$$

($H < K$ in $\mathcal{D} - \{G\}$, $k = |K/H|$) は同変であることから f は同変写像である。
 $V = U_{H_1} \oplus \cdots \oplus U_{H_r}$, $W = U_{K_1} \oplus \cdots \oplus U_{K_{r+1}}$ とおく. $z = (z_1, \dots, z_r)$ を V の任意の元とする. $s = \min\{i | z_i \neq 0\}$, $t = \max\{i | z_i \neq 0\}$ とおく. このとき $f(z)$ は

$$f(z) = (0, \dots, 0, z_s^{a_s}, z_s^{b_s} + z_{s+1}^{a_{s+1}}, \dots, z_{t-1}^{b_{t-1}} + z_t^{a_t}, z_t^{b_t}, 0, \dots, 0)$$

となる. 補題 3.2 (2), 3.3 より, $G_z = H_s \cap H_t$ と $G_{f(z)} = \bigcap_{s \leq i \leq t+1} G_{z_i} = K_s \cap K_{t+1}$ がわかる. したがって補題 3.2 (4) より $G_z = G_{f(z)}$ となる. すなわち f は isovariant 写像である.

上で構成された f を基本 isovariant 写像と呼ぼう.

表現 V, W は条件 $(C_{V,W})$ をみたすものとする. V から W への isovariant 写像の存在性を考察するために, V, W をより簡単な状況に帰着させよう. まず補題 2.2 より $V^G = W^G = 0$ としてよい. $\alpha(H) = \dim W(H) - \dim V(H)$ とおく. $\alpha(H) \geq 0$ ならば, $V(H)$ から $W(H)$ の部分表現 W' ($\dim V(H) = \dim W'$) への isovariant 写像が存在する. このとき $\bar{V} := V - V(H)$, $\bar{W} := W - W'$ は条件 $(C_{\bar{V}, \bar{W}})$ をみたしている. したがって isovariant 写像 $\bar{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{W}$ の存在が言えれば, 写像の直和を考えることによって isovariant 写像 $f : V \rightarrow W$ の存在が言える. 同様に $\alpha(H) < 0$ であれば, $V(H)$ の部分表現 V' ($\dim V' = \dim W(H)$) から $W(H)$ への isovariant 写像が存在し, $\bar{V} := V - V'$, $\bar{W} := W - W(H)$ は条件 $(C_{\bar{V}, \bar{W}})$ をみたす. したがって, V, W として, 次の条件をみたすものを考えれば十分である.

- (D) 各 H に対して, (1) $V(H) = 0, W(H) \neq 0$, (2) $V(H) \neq 0, W(H) = 0$ または (3) $V(H) = 0, W(H) = 0$.

さらに, 補題 2.4 より

- (E) $G/H \neq C_2$ のとき, $V(H) = a_H U_H$, $W(H) = b_H U_H$ としてよい. ($G/H = C_2$ のときは, $V(H) = a_H \mathbb{R}_H^-$, $W(H) = b_H \mathbb{R}_H^-$ となる.)

$\mathcal{E}_+$ を $\alpha(H) > 0$ をみたす部分群 H 全体の集合, $\mathcal{E}_-$ は $\alpha(H) < 0$ をみたす部分群 H 全体の集合とする.

以後, 巡回群 $G = C_{p^n q^m}$ (p, q は異なる素数, $m, n \geq 1$) の場合を考えよう. この場合は, 問題 A は肯定的である. すなわち, 以下の結果が成り立つ.

定理 3.4. G は位数 $p^n q^m$ の巡回群とする. 表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ をみたすならば, G -isovariant 写像 $f : V \rightarrow W$ が存在する.

証明のためにいくつかの補題を準備する.

補題 3.5. 条件 $(C_{V,W})$, (D) の下, $\mathcal{E}_-$ での極大部分群 H に対して, H を含む部分群 $K, K' \in \mathcal{E}_+$ で, K/H は巡回 p 群, K'/H は巡回 q 群となるものが存在する.

証明. $L/H \cong C_l$ ($l = p, q$) となる部分群 L をとる. 条件 $(C_{V,W})$ と H の極大性から,

$$\dim V(H) = \dim V^H \leq \dim W^H - \dim W^L$$

が得られる. l とは異なる方の素数を l' とする.

$$S_{l'}(H) = \{M \geq H \mid |M/H| = l'^k (k \geq 0)\}$$

とおく. M が $S_{l'}(H)$ に属するのは, $M \geq H$ かつ $M \not\geq L$ であることが必要十分であることに注意すれば,

$$\dim W^H - \dim W^L = \sum_{M \in S_{l'}(H)} \dim W(M)$$

がとなることがわかる. したがって

$$\dim V(H) \leq \sum_{M \in S_{l'}(H)} \dim W(M).$$

$V(H) \neq 0$ なので, ある $M \in S_{l'}(H)$ について $W(M) \neq 0$ となる.

この補題から次のことがわかる.

系 3.6. 条件 $(C_{V,W})$, (D) の下,

- (1) $G/H \not\cong C_2$ ($\forall H \in \mathcal{E}_-$).
- (2) $V(H)$ は U_H の直和の場合に帰着される. ((E) 参照.)

また, 次のことにも注意しよう.

補題 3.7. 条件 $(C_{V,W})$, (D) の下, $W(H)$ は U_H の直和の場合に帰着される ($H \in \mathcal{E}_+$).

証明. $G/H \not\cong C_2$ のときは (E) からわかる. $G/H \cong C_2$ ($q = 2$) としよう. このとき $W(H) \cong b\mathbb{R}_H^-$ ($b = \dim W(H)$) となっている. b が偶数ならば, $U_H \cong 2\mathbb{R}_H^-$ なので $W(H) \cong \frac{b}{2}U_H$ となる. b が奇数のとき, $W' = W - \mathbb{R}_H^-$ ($\subset W$) とおく. このとき V, W' は条件 $(C_{V,W'})$ をみたす. 実際, 任意の $L < K$ に対して, 条件 $(C_{V,W})$ より

$$\dim V^L - \dim V^K \leq \dim W^L - \dim W^K$$

となる. $K \leq H$ または $L \not\leq H$ ならば, 容易に

$$\dim W^L - \dim W^K = \dim W'^L - \dim W'^K$$

であることがわかる. したがって, 条件 $(C_{V,W'})$ をみたす. $L \leq H$ かつ $K \not\leq H$ のとき, $\dim W^L - \dim W^K$ は奇数であり,

$$\dim W^L - \dim W^K = \dim W'^L - \dim W'^K + 1$$

が成り立っている. $\dim V^L - \dim V^K$ は系 3.6(2) より偶数になるので, $(C_{V,W})$ より

$$\dim V^L - \dim V^K < \dim W^L - \dim W^K$$

を得る. ゆえに

$$\dim V^L - \dim V^K \leq \dim W'^L - \dim W'^K$$

となり, このときも条件 $(C_{V,W'})$ をみたしている.

以上のことから, 条件 $(C_{V,W})$ をみたす表現 V, W として, 以下の形の場合を考察すれば十分であることがわかる.

$$V = \oplus_{H \in \mathcal{E}_-} V(H), \quad V(H) = a_H U_H,$$

$$W = \oplus_{H \in \mathcal{E}_+} W(H), \quad W(H) = b_H U_H.$$

このような V, W の組を簡約対と呼ぶことにする.

定理 3.4 を示そう.

定理 3.4 の証明. 今までの議論により, V, W は簡約対として考えればよい.

このとき isovariant 写像 f を命題 3.1 の基本 isovariant 写像の直和として構成しよう. $\dim V$ に関する帰納法で示す. $V = 0$ のときは明らか. 補題 3.5 より, W 列 $S = \{H_1, \dots, H_r; K_1, \dots, K_{r+1}\}$ で次の性質をみたすものがとれる.

- (1) $\{H_1, \dots, H_r\} \subset \mathcal{E}_-$ かつ $\{K_1, \dots, K_{r+1}\} \subset \mathcal{E}_+$,
- (2) 各 H_i は $\mathcal{E}_-$ で極大,
- (3) S は極大, すなわち, 性質 (1), (2) をみたし S を真に含む W 列は存在しない.

$V' := \oplus_i U_{H_i}$, $W' := \oplus_i U_{K_i}$ とおく. 命題 3.1 より isovariant 写像 $f' : V' \rightarrow W'$ が存在する. $\bar{V} = V - V'$, $\bar{W} = W - W'$ とおく. このとき $\bar{V}, \bar{W}$ は条件 $(C_{\bar{V}, \bar{W}})$ をみたす. このことは次の補題で示す. したがって isovariant 写像 $\bar{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{W}$ が帰納法の仮定より存在する. ゆえに isovariant 写像 $f := \bar{f} \oplus f'$ が存在する.

補題 3.8. $\bar{V}, \bar{W}$ は条件 $(C_{\bar{V}, \bar{W}})$ をみたす.

証明. $K/H \cong C_l$ ($l = p, q$) となる部分群 $H < K$ に対して, 条件 $(C_{\bar{V}, \bar{W}})$ の不等式を示せばよい (§2 の最後の Remark 参照). 同じことなので $l = p$ とする. $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_r\}$, $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_{r+1}\}$ とおく. $S_q(H) = \{L \leq G \mid L \geq H, |L/H| = q^k\}$ とおく. 以下のことは容易に確かめられる.

$$\begin{aligned} \dim V^H - \dim V^K &= \sum_{L \in S_q(H) \cap \mathcal{E}_-} \dim V(L), \\ \dim W^H - \dim W^K &= \sum_{L \in S_q(H) \cap \mathcal{E}_+} \dim V(L), \\ \dim V'^H - \dim V'^K &= \sum_{L \in S_q(H) \cap \mathcal{H}} \dim U_L, \\ \dim W'^H - \dim W'^K &= \sum_{L \in S_q(H) \cap \mathcal{K}} \dim U_L. \end{aligned}$$

条件 $(C_{V, W})$ より

$$\dim V^H - \dim V^K \leq \dim W^H - \dim W^K$$

が成り立っている. $C_{p^n q^m}$ の部分群の包含関係をみれば, 次のいずれかが成り立っていることがわかる.

- (1) ある i が存在して, $S_q(H) \cap \mathcal{H} = \{H_i\}$, $S_q(H) \cap \mathcal{K} = \{K_{i+1}\}$.
- (2) $S_q(H) \cap \mathcal{H} = \emptyset$, $S_q(H) \cap \mathcal{K} = \{K_1\}$.
- (3) $S_q(H) \cap \mathcal{H} = S_q(H) \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

(1) の場合,

$$\dim V'^H - \dim V'^K = \dim W'^H - \dim W'^K (= 2)$$

したがって

$$\dim \bar{V}^H - \dim \bar{V}^K \leq \dim \bar{W}^H - \dim \bar{W}^K$$

となる.

(2) の場合, $S_q(H) \cap \mathcal{E}_-$ は空集合である. 実際, ある $L \in S_q(H) \cap \mathcal{E}_-$ があったとする. 補題 3.5 を用いると, $S = \{H_1, \dots, H_r; K_1, \dots, K_{r+1}\}$ を含むより大きな W 列が存在することになり矛盾する. したがって, $\dim V^H - \dim V^K = 0$ が成り立つ. また $K_1 \in S_q(H) \cap \mathcal{E}_+$ より, $\dim W^H - \dim W^K \geq 2$ を得る. 一方,

$\dim V'^H - \dim V'^K = 0, \dim W'^H - \dim W'^K = 2$ であるから

$$(0 =) \dim \bar{V}^H - \dim \bar{V}^K \leq \dim \bar{W}^H - \dim \bar{W}^K$$

が従う.

(3) の場合, 明らかに

$$\dim V'^H - \dim V'^K = 0, \dim W'^H - \dim W'^K = 0$$

であるから

$$\dim \bar{V}^H - \dim \bar{V}^K \leq \dim \bar{W}^H - \dim \bar{W}^K$$

が従う. 以上で証明が終わる.

4. 最後に—その他の例と問題

補題 3.8 は, 非巡回群の場合には一般には成り立たない. したがって定理 3.4 において G が巡回群でないとき, 同様な証明法は通用しない. しかし, 問題 A の反例も現時点では見つかっていない.

問題 A が肯定的なその他のアーベル群の例として $C_p \times C_p \times C_q$ がある. この場合は, 一般の位置の議論を援用することにより証明できる. さらに非アーベル群でも問題 A が肯定的なものがある. その一例は位数 $2p^n$ の二面体群である (p は素数). この場合は, 本論で用いたのと同様の議論が通用する.

問題 A が未解決な群のうち最も簡単な群は $G = C_{pqr}$ (p, q, r は互いに異なる素数) であろう. たとえば $V = U_p \oplus U_q \oplus U_r, W = U_1 \oplus U_{pq} \oplus U_{qr} \oplus U_{rp}$ とすると V, W は条件 $(C_{V,W})$ をみたしている. このとき

問題. isovariant 写像 $f: V \rightarrow W$ は存在するだろうか?

REFERENCES

- [1] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1987.
- [2] S. Kono, *On the existence of isovariant maps between complex representations of a cyclic group*, Talk at Transformation group seminar, Osaka University 1999.
- [3] I. Nagasaki, *The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups*, preprint.
- [4] T. Takahara, *On the existence of isovariant maps for representations of a cyclic group.* (Japanese), Master thesis, Osaka University 1998.
- [5] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, *Topology Appl.* **38** (1991), 155–161.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY,
TOYONAKA 560-0043, OSAKA, JAPAN

E-mail address: nagasaki@math.sci.osaka-u.ac.jp