

搜索資源の制約条件と効果が線形式で表される 一般的搜索割当ゲーム

防衛大学校・情報工学科 宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

目標と呼ばれる搜索の対象物と、目標を見つけようとする搜索者が参加する搜索問題に関するこれまでの研究は、目標側の目標存在、目標移動に関する情報が既知とされ、搜索者側の搜索資源配分や搜索法のみを最適にしようとする搜索者側の一方的な最適化問題が大半であった。このような一方的な問題から、目標を意思決定者として扱うことにより、搜索者と目標という2人のプレイヤーによる双方向的な問題を議論するのが搜索ゲームと呼ばれる研究テーマである。搜索ゲームに関するほとんどの研究では、目標は相変わらず搜索空間上を移動すると考え、搜索者の戦略を搜索資源の配分にとるか、目標と同じく搜索空間上での移動にとるかで、搜索ゲームは Search allocatio game (SAG) と Search-and-evasion game (SAEG) の2つに分類される [3]。SAEG の代表的な研究としては、搜索者の総移動コストを支払とし、相手プレイヤーの位置情報を知って次の移動位置を決定する多段階ゲームを論じた Washburn [7] の研究がある。また、各時間でのプレイヤーの位置から決まる個々の利得の総搜索時間での総利得を支払とした1段階のゲームを論じているのが、Eagle and Washburn [2] である。

SAG の研究は少ないが、モデルとしては、静止目標から移動目標を対象とする研究へとシフトしている。その後、目標移動に関する現実的な制約条件が SAG に導入されるようになったことで、モデルがより精緻に、解法はより複雑になってきており、その典型例として、目標のエネルギー制約を取り入れた連続空間上でのモデルが Hohzaki and Washburn [6]、離散空間上でのモデルが Hohzaki et al. [5] であり、両者の関係を明らかにしたのが Hohzaki [4] である。一方、搜索者の使用する搜索資源に目を向けると、その制約に関しては総量制約のみを課すケースが多く、また資源が目標探知に及ぼす効果に関しても、時間的な持続性や速距離への影響等といった多くの搜索資源が有する現実的な属性を無視し、搜索資源投入時、投入地点のみの限定効果を前提とした研究がほとんどである。このような搜索資源の効果、制約に関する特性を抽出すると、これらは線形式としての特徴を有しており、これをモデルに取り込むことで、様々な搜索資源特性に適用できる SAG の一般解法が期待できる。この論文では、搜索資源に線形制約を考え、搜索資源が線形な累積効力を持つ搜索割当ゲーム (SAG) を定式化し、プレイヤーの最適戦略を導出するための一般解法を提案する。

次の節では、イメージし易いように具体的なモデルをまず述べ、次に我々が研究対象とする一般モデルを記述する。第3節では、一般化されたモデルの SAG に対するゲームの解法が線形計画問題に帰着することを示す。第4節では、3節で提案した解法の欠点に鑑み、それに代わる解法を提案する。4節では、現実的な2次元平面上での SAG の最適解について分析する。

2 問題のモデルと定式化

ここでは、搜索者と目標が2人のプレイヤーとして参加し、ある搜索空間上で戦略をもつ搜索ゲームを一般的に論じる。しかし、以下ではその具体的な問題設定を与え、取り扱う搜索ゲーム

の具体的なモデルを記述することにしよう。時間と地理空間から成る搜索空間において、搜索者は目標を発見すべく手持ちの搜索資源を搜索地理空間に投入するが、その搜索資源の効力には時間的な持続性と地理的な遠隔作用性がある。一方、目標は地理空間上を時間とともに移動することにより、搜索者から逃避しようと図る。

- (A1) 搜索空間を、離散地理空間 $K = \{1, \dots, K\}$ と離散時間空間 $T = \{1, \dots, T\}$ から成る集合 $K \times T$ とする。
- (A2) 目標は時間とともに移動するパスを通り、その1つのパス ω を $\{\omega(t), t \in T\}$ と表現する。ただし、 $\omega(t) \in K$ は時点 t でのパスの通過地点を示す。また、目標の取り得る実行可能パス全体を Ω とする。
- (A3) 搜索者のとる戦略は搜索資源投入計画 $\varphi = \{\varphi(i, t), i \in K, t \in T\}$ で表される。ただし、 $\varphi(i, t) \in R$ は時点 t において地点 i へ投入する非負の搜索資源量である。この搜索資源は投入時点 t 以降 t_c の期間効果が持続する。また、投入地点 i から離れた地域 $A(i) \subseteq K$ に対しても効果が及ぶものの、その効果は地点に依存して減衰し、地点 $j \in A(i)$ での減衰率を $\beta(i, j)$ で表す。一般的には $i \in A(i)$ であり $\beta(i, i) = 1$ であるが、他の $j \in A(i)$ に対しては $\beta(i, j) \leq 1$ である。搜索資源の投入を開始できる搜索開始時点は τ であるとし、搜索可能時点集合を $\hat{T} = \{\tau, \tau + 1, \dots, T\}$ で表す。また、投入資源量に対する制約として次を考える。

$$(a) \text{ 各時点における総量制約: } \sum_{i \in K} \varphi(i, t) \leq \Phi(t), t \in \hat{T} \quad (1)$$

$$(b) \text{ 全時点における総量制約: } \sum_{t=\tau}^T \sum_{i \in K} \varphi(i, t) \leq M \quad (2)$$

- (A4) 目標のパス ω と搜索者の資源投入戦略 φ により、目標パス上に効果を及ぼす搜索資源の重み付き総量 $g(\varphi, \omega)$ に対し指数関数 $1 - \exp(-g(\varphi, \omega))$ で表される目標探知確率が得られ、目標を探知した場合のみ搜索者は利得 1 を得、目標は 1 を失う。また、地点 i に投入した単位搜索資源の効果を示す重みを α_i とする。

この問題設定をモデル A と称す。搜索者の搜索資源投入戦略 φ と目標のパス選択 $\omega \in \Omega$ により、前提 (A3), (A4) より、目標パス ω 上に累積される搜索資源の重み付き総量 $g(\varphi, \omega)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} g(\varphi, \omega) &= \sum_{t \in \hat{T}} \alpha_{\omega(t)} \sum_{\xi=\max\{\tau, t-t_c\}}^t \sum_{j \in A^*(\omega(t))} \beta(j, \omega(t)) \varphi(j, \xi) \\ &= \sum_{\xi=\tau}^T \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c, T\}} \sum_{j \in A^*(\omega(t))} \alpha_{\omega(t)} \beta(j, \omega(t)) \varphi(j, \xi) \\ &= \sum_{\xi=\tau}^T \sum_{j \in K} \sum_{t=\xi}^{\min\{\xi+t_c, T\}} \delta_{j \in A^*(\omega(t))} \alpha_{\omega(t)} \beta(j, \omega(t)) \varphi(j, \xi) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、地点 i へ影響を及ぼす資源の投入地点を $A^*(i) \equiv \{j \mid i \in A(j)\}$ で表す。また、 $\delta_{j \in A^*(\omega(t))}$ は条件 $j \in A^*(\omega(t))$ が成立していれば 1 を、そうでなければ 0 をとる記号である。前提 (A4) から、 $g(\varphi, \omega)$ の指数関数で与えられる次式が支払関数 $R(\varphi, \omega)$ となる。

$$R(\varphi, \omega) = 1 - \exp \left(- \sum_{t \in \hat{T}} \alpha_{\omega(t)} \sum_{\xi=\max\{\tau, t-t_c\}}^t \sum_{j \in A^*(\omega(t))} \beta(j, \omega(t)) \varphi(j, \xi) \right) \quad (4)$$

上の例では、時間持続性や遠隔作用性のある搜索資源による搜索割当ゲームを議論したが、式 (3) のように戦略 φ の線形式が支払関数に含まれたり、また、搜索資源量の自然な量的制約 (1), (2)

式も φ に対する線形条件であり、一般的には搜索資源に対する線形式を含むゲームとして議論できそうである。ここでは、そのような一般化したモデルを取扱い、その一般解法を議論しよう。

次のような搜索者と目標が参加する2人ゼロ和ゲームを考える。上述した例で仮定したように、搜索資源の投入や目標の移動は地理的な搜索空間上及び時間空間上で行われると考えるのが自然であるものの、ここでは抽象的な離散搜索空間 X を考える。

- (B1) 目標は移動戦略をとり、目標のとる純粋戦略は、搜索空間 X の部分集合として定義されるパスの有限集合 Ω から1つのパスを選択することである。
- (B2) 搜索者は搜索資源の投入戦略をとり、その純粋戦略を X 上で定義した連続変数の集合 $\varphi = \{\varphi(x), x \in X\} \subseteq R^X$ で表す。この資源投入には L 個の線形な制約条件式 $a_k \cdot \varphi \leq \Phi_k$, $k \in L \equiv \{1, \dots, L\}$, $\varphi \geq 0$ が課せられている。 $a_k \cdot \varphi$ は、次元 $|X|$ の2つのベクトル a_k と φ の内積を表す。
- (B3) 搜索者の戦略 φ と目標の戦略 $\omega \in \Omega$ により支払 $R(\varphi, \omega)$ が定まり、それは $R(\varphi, \omega) = f(b_\omega \cdot \varphi)$ で与えられる。関数 $f(y)$ は $y \in R$ に対し単調増加な凹関数である。 $b_\omega \in R^X$ は X 上で設定され、パス ω に依存するパラメータで、 $b_\omega(x)$ は支払に対する搜索資源投入 $\varphi(x)$ の有効性を示す。
搜索者は支払をできるだけ大きくするように行動するマキシマイザー、目標はそれを小さくするようなミニマイザーとして行動する。

上記モデルの具体例として、搜索資源に時間持続性や地理遠隔性がなく、投入した時点、投入した地点でだけ効力のある場合の単純なモデルも盛んに議論されてきた。前提 (A1)–(A4) のモデル A も上記一般化モデルの具体例の1つであるが、Dambreville and Le Cadre [1] には、搜索資源に関する面白い特性が線形制約により表される例が扱われている。その1つが資源の再生である。前提 (A1) の搜索空間 $K \times K$ 上で利用可能な資源量が1時点おきに自然再生するが、太陽電池のように容量 Φ を越えないというのであれば、資源配分戦略 $\varphi(i, t)$ の制約は、 $\sum_{i \in K} \varphi(i, t) + \sum_{i \in K} \varphi(i, t+1) \leq \Phi$, $t = 1, 2, 3, \dots$ により表現されるというものである。

3 ゲームの解

ここでは、前節の前提 (B1)–(B3) の一般的な前提の下で2人ゼロ和の搜索ゲームを解くことにしよう。まず、目標に関しては混合戦略 $\pi = \{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$ を取り入れる。 $\pi(\omega)$ はパス ω を選択する確率を示す。 π の実行可能領域は次式で与えられる。

$$\Pi = \{\pi(\omega) \mid \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1, \pi(\omega) \geq 0, \omega \in \Omega\} \quad (5)$$

搜索者の純粋戦略 φ と目標の混合戦略 π による期待支払は $R(\varphi, \pi) = \sum_{\omega} \pi(\omega) R(\varphi, \omega)$ と書け、 π に関して線形式、 φ に関しては凹関数となっており、そのミニマックス値とマックスミニ値が一致することはすでに知られているため、以後我々は目標の混合戦略、搜索者の純粋戦略の範囲内で均衡解を導出することにする。また、搜索者の戦略 φ の実行可能領域は次式で表される。ただし、 $L \equiv \{1, \dots, L\}$ とおいた。

$$\Psi = \{\varphi \mid a_k \cdot \varphi \leq \Phi_k, k \in L, \varphi(x) \geq 0, x \in X\} \quad (6)$$

ゲームの値を求めるためのマックスミニ問題は、(5) 式と関数 $f(\cdot)$ が単調増加関数であることを考慮すると、以下のように変形できる。

$$\max_{\varphi \in \Psi} \min_{\pi \in \Pi} R(\varphi, \pi) = \max_{\varphi \in \Psi} \min_{\omega \in \Omega} R(\varphi, \omega) = \max_{\varphi \in \Psi} \min_{\omega \in \Omega} f(b_\omega \cdot \varphi) = f(\max_{\varphi \in \Psi} \min_{\omega \in \Omega} b_\omega \cdot \varphi)$$

最終式の関数 $f(\cdot)$ の中にある問題は次の線形計画法を解くことと同値である。

$$G^S : \max_{\varphi} \eta$$

$$s.t. \quad b_{\omega} \cdot \varphi \geq \eta, \quad \omega \in \Omega \quad (7)$$

$$a_k \cdot \varphi \leq \Phi_k, \quad k \in L \quad (8)$$

$$\varphi(x) \geq 0, \quad x \in X$$

この問題を解けば搜索者の最適戦略 $\varphi^* = \{\varphi^*(x), x \in X\}$ が求められ、最適値 η^* を用いて元の期待利得に関するマックスミニ値が $f(\eta^*)$ で得られることになる。問題 (G^S) は期待利得を $R(\varphi, \pi) = \sum_{\omega} \pi(\omega) b_{\omega} \cdot \varphi$ と考えた場合のマックスミニ問題そのものであるから、以後の議論では、期待利得が変数 π と φ に対し双線形なこの式で与えられると仮定することにしよう。

ここで、制約式 (7) 式に対し双対変数 $\mu(\omega)$ を、(8) 式に対し ν_k をとると、問題 (G^S) の双対問題は次のようになる。

$$D^S : \min_{\mu(\omega), \nu_k} \sum_{k \in L} \Phi_k \nu_k$$

$$s.t. \quad \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = 1 \quad (9)$$

$$\mu(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega \quad (10)$$

$$-\sum_{\omega \in \Omega} b_{\omega}(x) \mu(\omega) + \sum_{k \in L} a_k(x) \nu_k \geq 0, \quad x \in X$$

$$\nu_k \geq 0, \quad k \in L$$

条件式 (9), (10) はパスの制約条件と全く同じであるが、実は最適な双対変数 $\mu(\omega)$ が最適なパス選択確率 $\pi^*(\omega)$ を与えることが次のように証明できる。

まず、期待支払のマックス値を求める問題は

$$\max_{\varphi} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) b_{\omega} \cdot \varphi \quad s.t. \quad a_k \cdot \varphi \leq \Phi_k, \quad k \in L, \quad \varphi(x) \geq 0, \quad x \in X$$

となり、その双対問題は次式で与えられる。

$$D^T : \min_{\epsilon_k} \sum_{k \in L} \Phi_k \epsilon_k, \quad s.t. \quad \sum_{k \in L} a_k(x) \epsilon_k \geq \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) b_{\omega}(x), \quad x \in X, \quad \epsilon_k \geq 0, \quad k \in L$$

上式をさらに $\pi(\omega)$ について最小化し、ミニマックス値を求める問題は次のようになる。

$$G^T : \min_{\pi(\omega), \epsilon_k} \sum_{k \in L} \Phi_k \epsilon_k$$

$$s.t. \quad \sum_{k \in L} a_k(x) \epsilon_k - \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) b_{\omega}(x) \geq 0, \quad x \in X \quad (11)$$

$$\epsilon_k \geq 0, \quad k \in L \quad (12)$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1 \quad (13)$$

$$\pi(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega \quad (14)$$

この問題 (G^T) と (D^S) と比較すれば、変数 $\pi(\omega)$ と $\mu(\omega)$, ϵ_k と ν_k が実は同じであることが分かる。以上をまとめると、最適戦略の解法に関する次の定理が言える。

定理 1 問題 (G^S) を解くことにより搜索者の最適純粋戦略 $\varphi^*(x)$ が求まり、そのとき制約式 (7) 式的双対変数が目標の最適混合戦略 $\pi^*(\omega)$ を与える。逆に、問題 (G^T) を解けばその最適解 $\pi^*(\omega)$ が目標の最適混合戦略を与え、(11) 式的双対変数が搜索者の最適戦略 $\varphi^*(x)$ を与える。

ゲームの値は、上記の線形計画問題の最適値 η^* に対し $f(\eta^*)$ を計算すればよい。

4 パスの制約条件を陽に考慮した定式化

3節で設定した一般化問題の前提 (B1) においても、さらには具体的な搜索資源特性を考えたモデル A の前提 (A2) においても、目標のとするパスの具体的な制約条件は陽には設定されていない。実際、問題 G^S , G^T では、実行可能パス群 Ω の中身を具体的に記述していないが故に、様々なパスの条件をもつ問題にすぐに応用できる長所がある。しかし、この集合 Ω のサイズを考えると、上記の定式化による解法が必ずしも現実的と言えない場合もある。例えば、前提 (A1) の搜索空間 $K \times T$ において、パスの制約条件が全く課されていない場合には、ベキ数 $|K|^{T-1}$ の数のパスを考慮する必要がある、大きなサイズの搜索空間では線形計画法による解法でさえ現実的に可能だとは言えない。

以上のことから、ここではパス選択に代わる目標戦略を用いた定式化を模索するが、取りあえずパスの制約条件を具体的に設定しよう。その最も一般的な方法は、パスを時間と地理空間から成る搜索空間上で定義し、その上で制約条件を設定することである。また、地理的位置の他に目標は様々な属性を取り得るとして、属性空間を設定することには応用のための柔軟性がある。ここでは搜索空間を $X = K \times T$ とし、前提 (B1)–(B3) を拡張する形で、以下のような状態空間やパスの実行可能条件、支払に関する具体的な仮定を置く。また支払関数として線形式のみを扱うが、このことは凹で単調増加な支払関数を取り扱う問題と同等であることはすでに述べた。

- (C1) 搜索空間として、搜索時間 $T = \{1, \dots, T\}$ とその時点 $t \in T$ に依存して変わる地理空間としてのセル群 K_t を持つ。
- (C2) 目標の純粋戦略は、搜索空間上を移動する実行可能パス群 Ω から 1 つのパスを選択することである。目標がパス $\omega \in \Omega$ をとった場合、時点 t における位置は $\omega(t) \in K_t$ であり、またある離散的な属性空間 S_t 中でのいずれかの属性 $s \in S_t$ に目標はあるものとする。時点 t 、位置 i 、属性 s の状態から次時点 $t+1$ において移動できる位置群は $B(i, t, s)$ に制約され、さらに、位置 $j \in B(i, t, s)$ への移動により属性 s は次の時点 $t+1$ で $\Gamma(i, t, s, j)$ に変化する。
- (C3) 搜索者の戦略は搜索空間上への搜索資源の投入であり、その純粋戦略を $\varphi = \{\varphi(i, t), i \in K_t, t \in T\}$ で表す。 $\varphi(i, t)$ は時点 t に位置 i に投入する搜索資源量である。この資源投入には、 L 個の線形な制約条件式 $a_l \cdot \varphi \leq \Phi_l$, $l \in L \equiv \{1, \dots, L\}$ と非負制約 $\varphi \geq 0$ が課せられている。ただし、 $a_l \cdot \varphi$ は、内積 $\sum_{t \in T} \sum_{i \in K_t} a_l(i, t) \varphi(i, t)$ を表す。
- (C4) 搜索者の戦略 φ と目標の戦略 ω により、支払 $R(\varphi, \omega) = b_\omega \cdot \varphi$ が生じる。ベクトル b_ω の要素 $b_\omega(i, t)$ は、時点 t を起点にする時間区間 $T(t) \subseteq T$ の時点 $\xi \in T(t)$ での目標位置 $\omega(\xi)$ が、位置 i と時点 ξ によって定まる地理的範囲 $A(i, \xi)$ 内にある場合の値 $c(i, \omega(\xi), \xi)$ の総和で表されるとする。すなわち、 $b_\omega(i, t) = \sum_{\xi \in T(t)} \delta_{\omega(\xi) \in A(i, \xi)} c(i, \omega(\xi), \xi)$ 。ただし、 $\delta_{\omega(\xi) \in A(i, \xi)}$ は条件 $\omega(\xi) \in A(i, \xi)$ が成立すれば 1 を、そうでなければ 0 をとる記号である。また、時間区間 $T(t)$ はその基点 t を含み $t \in T(t)$ である。地理領域 $A(i, \xi)$ もその基点 i を含み $i \in A(i, \xi)$ であり、さらに $A(i, \xi) \subseteq K_\xi$ のように設定されるものとする。
搜索者はこの支払を大きくしようとするマキシマイザー、目標は小さくしようとするミニマイザーである。

我々はすでにゲームの値を求める定式化を 3 節で行っており、議論を問題 (G^T) から始める。まず、条件 (11) 式の第 2 項を具体的に展開すると、次式ようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) b_\omega(i, t) &= \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{\xi \in T(t)} \delta_{\omega(\xi) \in A(i, \xi)} c(i, \omega(\xi), \xi) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{\xi \in T(t)} \sum_{k \in A(i, \xi)} \delta_{k\omega(\xi)} c(i, k, \xi) = \sum_{\xi \in T(t)} \sum_{k \in A(i, \xi)} \left(\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \delta_{k\omega(\xi)} \right) c(i, k, \xi) \quad (15) \end{aligned}$$

上式における $\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \delta_{k\omega(\xi)}$ は、時点 ξ において地点 k に集まるパスの確率の総和であるから、目標の存在確率に他ならない。これを手がかりに、次の変数を目標の新たな戦略として採用しよう。

目標の状態は、時点 t と位置 i 及び属性 s の3つ組 (i, t, s) により表現できる。 $q(i, t, s)$ を状態 (i, t, s) にある目標の存在確率とし、 $v(i, j, t, s)$ を状態 (i, t, s) にあり、かつ次時点 $t+1$ で位置 j に移動する遷移確率とする。これを用いれば、 $\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \delta_{k\omega(\xi)} = \sum_{s \in S_\xi} q(k, \xi, s)$ と書ける。また、パスに対する条件式 (13), (14) 式を、目標存在確率、遷移確率による表現に書き直すことにより、新しい目標戦略による定式化が次のようにできる。

$$C^T : \min_{q, v, \epsilon_k} \sum_{l \in L} \Phi_l \epsilon_l$$

$$s.t. \quad \sum_{l \in L} a_l(i, t) \epsilon_k - \sum_{\xi \in T(t)} \sum_{k \in A(i, \xi)} \sum_{s \in S_\xi} q(k, \xi, s) c(i, k, \xi) \geq 0, \quad i \in K_t, t \in T \quad (16)$$

$$\epsilon_l \geq 0, \quad l \in L$$

$$q(i, t, s) = \sum_{j \in B(i, t, s)} v(i, j, t, s), \quad i \in K_t, s \in S_t, t = 1, \dots, T-1 \quad (17)$$

$$q(i, t, s) = \sum_{j \in B^*(i, t, s)} v(j, i, t-1, \Gamma^*(j, i, t, s)), \quad i \in K_t, s \in S_t, t = 2, \dots, T \quad (18)$$

$$\sum_{i \in K_t} \sum_{s \in S_t} q(i, t, s) = 1, \quad t \in T \quad (19)$$

$$v(i, j, t, s) \geq 0, \quad i \in K_t, s \in S_t, j \in B(i, t, s), t = 1, \dots, T-1 \quad (20)$$

ただし、 $\Gamma^*(j, i, t, s)$ は等式 $s = \Gamma(j, t-1, u, i)$ を u について解いて得られる式であり、時点 $t-1$ での位置 j から移動し状態 (i, t, s) に遷移できるための時点 $t-1$ での属性を意味する。 $B^*(i, t, s)$ は $B(\cdot)$ の逆関数として次のように定義され、状態 (i, t, s) に遷移可能な前の時点 $t-1$ での移動元となることのできる地点集合である。

$$B^*(i, t, s) \equiv \{j \in K_{t-1} \mid i \in B(j, t-1, \Gamma^*(j, i, t, s))\}$$

条件 (17) は状態 (i, t, s) から出る確率の流れ、条件 (18) は状態 (i, t, s) へ入る確率の流れに関する保存則であり、式 (19) は時点 t での目標は常に地理的範囲 K_t 及び属性 S_t のどこかにあることの保障を与える。もちろん、遷移確率は、(20) 式で示しているように非負でなければならない。

この問題 (C^T) により、ゲームの値、移動の制約条件を満足する目標の最適戦略が、存在確率、遷移確率の形で求められる。さて、最適な探索者戦略を求めることに関しては、3節の問題 (G^S) の適用は困難である。したがって、ここでは別のアプローチによる定式化を試みる。まず、前提 (C4) を考慮し (15) 式を参考にして、期待支払 $\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) b_\omega \cdot \varphi$ を目標存在確率により展開すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) b_\omega \cdot \varphi &= \sum_{t \in T} \sum_{i \in K_t} \left(\sum_{\xi \in T(t)} \sum_{k \in A(i, \xi)} \sum_{s \in S_\xi} q(k, \xi, s) c(i, k, \xi) \right) \varphi(i, t) \\ &= \sum_{\xi \in T} \sum_{k \in K_\xi} \sum_{s \in S_\xi} \left(\sum_{t \in T^*(\xi)} \sum_{i \in A^*(k, \xi)} c(i, k, \xi) \varphi(i, t) \right) q(k, \xi, s) \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 $T^*(\xi) \equiv \{t \in T \mid \xi \in T(t)\}$, $A^*(k, \xi) \equiv \{i \in K_\xi \mid k \in A(i, \xi)\}$ で定義される。ここで、 $w(k, \xi, s)$ を状態 (k, ξ, s) から出発した目標が、この時点 ξ 以降最適にパスを選択することで実現できる最小期待支払としよう。いま目標は状態 (k, ξ, s) において $q(k, \xi, s) = 1$ であるから、時点 ξ で発生する期待支払は $\sum_{t \in T^*(\xi)} \sum_{i \in A^*(k, \xi)} c(i, k, \xi) \varphi(i, t)$ であることが (21) 式から分かる。もし、目標が次時点 $\xi+1$ で位置 j に移動すれば、それ以降の最小期待支払は定義より $w(j, \xi+1, \Gamma(k, \xi, s, j))$

で与えられるから、動的計画法による再帰式が次のように得られる。

$$w(k, \xi, s) = \min_{j \in B(k, \xi, s)} \left\{ \sum_{t \in T^*(\xi)} \sum_{i \in A^*(k, \xi)} c(i, k, \xi) \varphi(i, t) + w(j, \xi + 1, \Gamma(k, \xi, s, j)) \right\},$$

$$k \in K_\xi, s \in S_\xi, \xi = 1, \dots, T-1 \quad (22)$$

ただし、最終時点 $t = T$ における $w(\cdot)$ の値は次式により計算できる。

$$w(k, T, s) = \sum_{t \in T^*(T)} \sum_{i \in A^*(k, T)} c(i, k, T) \varphi(i, t) \quad (23)$$

したがって、目標の最適純粋戦略による全搜索時間での最小期待支払は $\min_{i \in K_1, s \in S_1} w(i, 1, s)$ であり、搜索者はこれを最大にするように搜索資源の投入を行おうとする。結局、期待支払のマックスミニ値は次の線形計画問題により求められるが、これを解くことにより搜索者の最適搜索資源配分 φ^* も得られる。

$$\begin{aligned} C^S : \quad & \max_{\varphi, \rho} \rho \\ \text{s.t.} \quad & \rho \leq w(k, 1, s), \quad k \in K_1, s \in S_1 \\ & w(k, \xi, s) \leq \sum_{t \in T^*(\xi)} \sum_{i \in A^*(k, \xi)} c(i, k, \xi) \varphi(i, t) + w(j, \xi + 1, \Gamma(k, \xi, s, j)), \\ & \quad k \in K_\xi, j \in B(k, \xi, s), s \in S_\xi, \xi = 1, \dots, T-1 \\ & w(k, T, s) = \sum_{t \in T^*(T)} \sum_{i \in A^*(k, T)} c(i, k, T) \varphi(i, t), \quad k \in K_T, s \in S_T \\ & \sum_{t \in T} \sum_{i \in K_t} a_l(i, t) \varphi(i, t) \leq \Phi_l, \quad l \in L \\ & \varphi(i, t) \geq 0, \quad i \in K_t, t \in T \end{aligned}$$

最後に、問題 (C^T) と (C^S) は双対の関係にあり、期待支払のミニマックス値とマックスミニ値は一致し、これがゲームの値となることを指摘しておく。ただし、双対性についての証明は省略する。

5 数値例

ここでは、効力に持続性と遠隔作用性のある搜索資源を考慮したモデル A に、目標パスの実行可能性や属性に関する前提 (C1)~(C4) を加味した数値例を設定してみた。図 1 のように、37 個の正六角形のセルから成る地理空間 K と、8 時点から成る時間空間 $T = \{1, \dots, 8\}$ 上での搜索ゲームを考える。目標は初期時点 $t = 1$ にセル 1 から出発するため、前提 (C1) での地理的セル群 K_t は、時点 1 に対しては $K_1 = \{1\}$ であり、他の時点 t では $K_t = K$ である。

セル 8, 17, 21, 30, 31 には障害物があり、目標はここに滞在できず、また近くに投入された搜索資源の効力を阻害する。前提 (A3) で仮定した地点 i に投入した搜索資源の効果の波及範囲 $A(i)$ は、常に 2 隣接セルまでとする。例えば、地点 7 に投入した資源は、隣のセル 2, 6, 12, 13, 3 及び 1, 5, 11, 18, 19, 20, 14, 4 に波及する。

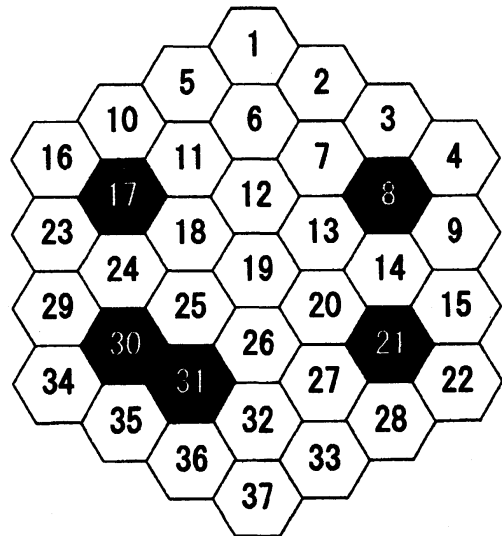


図 1. 搜索の地理空間

しかし、障害物の後ろに位置するセル9には効果は及ばない。また、前提(A3)の仮定にある資源の減衰率 $\beta(i, j)$ (前提(C4)のあるパラメータ $c(i, j, t)$) は、投入セルそのものに対しては $\beta(i, i) = 1$ であるが、隣接セル j に対しては $\beta(i, j) = 0.5$ 、2隣接セル j には $\beta(i, j) = 0.3$ であることとする。ただし、障害物による影響があり、障害物の後ろには効力が及ばず、また2隣接セルの位置にあっても障害物によりお互いの全景が部分的に隠れるような位置関係であれば、 $\beta(i, j) = 0.1$ の効果しかない。上述したセル7からの減衰率を例に挙げれば、それ自身のセル7と隣接セル2, 6, 12, 13, 3に対しては、上述した設定どおり、それぞれの減衰率は1と0.5であるものの、2隣接セル1, 5, 11, 18, 19, 20, 14, 4のうち、セル14, 4に対しては $\beta(\cdot) = 0.1$ であり、それ以外のセルに対しては0.3である。また、時点 t に投入した搜索資源は次の時点まで効力が持続し、前提(A3)における持続時間は $t_c = 1$ であるとする。搜索資源の投入制約としては、投入開始が時点 $\tau = 2$ からであり、各時点における資源総量に関する制約式(1)において $\Phi(1) = 0, \Phi(2) = \dots = \Phi(8) = 1$ と設定するが、(2)式は制約としない。

前提(C2)にある目標の属性として、所有エネルギー e を考える。目標の現在セルからは、次の時点で2隣接セルの距離内にあるセルまで移動可能である。障害セル8, 17, 21, 30, 31を目標が通過することは可能であるが、そこに移動して滞在することはできない。隣接セルへの移動により所有エネルギーは1だけ減りエネルギー属性は $e-1$ に変化し、2隣接セルへの移動では4だけ減少してエネルギーは $e-4$ となるが、当然のことながら、現在所有するエネルギー e より多くの移動エネルギーを必要とするセルへは移動できない。ただし、同じセルに居る場合にはエネルギー消費は無く、所有エネルギーがゼロになった場合は、現在セルに滞在する以外ない。時点1における目標の初期エネルギーは9であるとするから、前提(C2)の属性空間 S_t は、初期時点では $S_1 = \{9\}$ であり、他の時点 t においては $S_t = \{0, \dots, 9\}$ である。時間 t 、セル i 、エネルギー e の状態にある目標は、上述した2隣接セルまでの移動可能性とエネルギー制約によって規定される次時点での移動可能セル群 $B(i, t, e)$ をもつが、セル $j \in B(i, t, e)$ への移動による属性変化 $\Gamma(i, t, e, j)$ 、すなわちエネルギー変化は、上述したとおり移動距離に応じて0, 1, 4の減少のいずれかとなる。

以上のパラメータ設定の下で問題 (C^T) または (C^S) を解き、搜索者の最適搜索資源配分 $\{\varphi(i, t), i \in K, t \in T\}$ と目標の最適状態確率 $\{q(i, t, e), i \in K, t \in T, e \in S_t\}$ を求めた。最適搜索資源配分 $\varphi(i, t)$ を、横に時点を縦にセルを表示した表1に記載した。また理解を容易にするため、最適解には $q(i, t) \equiv \sum_{e \in S_t} q(i, t, e)$ の計算処理を施し、時刻 t 、セル i における目標のこの最適存在確率 $q(i, t)$ を表3に示した。

ここで、ゲームの期待支払を表す(21)式を次のように変形しよう。

$$\begin{aligned} \text{期待利得} &= \sum_{\xi \in T} \sum_{k \in K_\xi} \left(\sum_{t \in T^*(\xi)} \sum_{i \in A^*(k, \xi)} c(i, k, \xi) \varphi(i, t) \right) \sum_{s \in S_\xi} q(k, \xi, s) \\ &= \sum_{\xi \in T} \sum_{k \in K_\xi} \left(\sum_{t \in T^*(\xi)} \sum_{i \in A^*(k, \xi)} c(i, k, \xi) \varphi(i, t) \right) q(k, \xi) \end{aligned} \quad (24)$$

時点 ξ 、セル k における搜索資源の累積量 $\sum_{t \in T^*(\xi)} \sum_{i \in A^*(k, \xi)} c(i, k, \xi) \varphi(i, t)$ は、期待支払における目標存在確率 $q(k, \xi)$ の重み係数となり、目標が自らの存在確率を成形する際の重要な指針を与える。表1と表3の間にある表2に、各時点、各セルにおけるこの累積量を表示した。目標の時々刻々の移動にはエネルギー制約その他の制約があり、目標の最適存在確率がこの重み係数に完全に最適に対応することは困難であるから、移動制約と重み係数への対応との間でどのように均衡がとられ、その結果どのような存在確率が目標の最適戦略となるのかを分析することは重要である。

表1の搜索資源の最適配分には、以下のような特徴がある。ただし、セル1から拡散的に移動する目標に関して次のことを念頭におく必要がある。初期エネルギー9からの移動エネルギーの消費を考えると、2隣接セル間の移動1回と隣接セルへの移動を4回繰り返すことにより、エネルギー8を消費し、最も早くて時点6にはセル37までの全領域に目標は到達可能である。

- (1) 表1は、多くの部分の値がゼロとなっている疎な構造をもつ。また、同一のセルに注目すると、搜索資源の投入直後は投入が控えられ、再び投入が繰り返される“投入の周期性”が見られることが多く、搜索資源の持続時間 $t_c = 1$ が明らかに影響を及ぼしていることが分かる。このような疎な資源投入にもかかわらず、各点で有効な資源の累積量を計算した表2をみれば、時間の経過とともに広がる目標の存在領域を累積搜索資源の配分がうまくカバーしていることが分かる。
- (2) セル6は、早い時期に目標が通過する領域に対して資源効果を及ぼすための有効な資源投入セルであるため、時刻 $t = 2$ での資源投入がなされるが、それ以降ではその重要度はあまりない。
- (3) 投入量、投入時点等から、セル12は、中央部の広い領域に影響を及ぼし得る投入セルとして、全搜索期間を通じて重要性をもっている。
- (4) 地理空間の右半球には搜索資源の効果を阻害するセル8, 21があり、その右の領域にいる目標をカバーするためにセル9及び15への資源投入があるが、目標の移動時間が考慮され、時点3に始まる早い時期にはセル9が、時点5に始まる遅い時期にはセル15が重視される。
- (5) 障害セル21周辺の右下領域はセル12への資源投入ではカバーし切れず、目標が到達する時刻5以降セル22, 27が資源投入には重要となる。
- (6) 障害セル17周辺の左上部領域をカバーするもっとも重要なセルは16であると言えるが、セル10及び23が補助的な重要性をもっている。
- (7) 障害セル30, 31周辺で資源効果の波及しにくい広い領域をカバーするため、3つのセル32, 34, 35への資源投入が利用されるが、目標がここまで移動して来る時刻は遅く、時点6以降にその重要性が生じる。

以上のような搜索資源投入のタイミングから、各時点、各セルで有効となる累積搜索資源量の特徴を表2から挙げると次のようになる。

- (1) セル12への資源投入が極めて重要視されるため、全期間を通じてこのセルでの累積量は大きく、また周辺セル7, 11等への影響もある。
- (2) 上述した理由により、早い時刻2では上部領域での累積量は多いが、時刻3～5では上部障害セル8及び17の周辺セル9, 14, 16, 23, 24等での累積量が増加する。その間、他のセルで少量の資源累積量が記されているのは、表1の特徴(4)、(6)項目に記した投入の影響によるものであり、そのようなセルには目標は未だ到達していないことが表3から分かる。
- (3) 全領域に目標が到達する時点6以降では、すべてのセルにおける資源累積量はまんべんなく広がり、時刻6, 7, 8における累積量の最小値が0.063, 0.192, 0.212と大きくなっていることから分かるように、時間とともにより一様性が現れてくる。

最後に、表3に記された目標の最適存在確率に関する特徴を挙げよう。

- (1) 目標が全領域に拡散する時点6以降では存在確率の分布は広がり、その値はいずれにおいても0.08以下となる。しかし、特に下部領域に到達した目標にはエネルギーが余り残っておらず、その後の存在確率の再調整が難しいため、後半の時点でも全領域上での一様分布は十分には達成されない。
- (2) セル12は他の領域への拡散移動のための要衝のセルといえ、時点2では目標存在確率が多少あるものの、多量の搜索資源が投入されるセルであるため、それ以降では目標に回避されるセルとなる。また、セル6も早い時期での資源投入の重要セルである。上部中央領域には障害セルがなく、セル6, 12への資源投入が周辺セルに効力を及ぼすため、セル6, 12をはじめ、セル7, 13, 18での目標存在確率もほとんどゼロとなる。
- (3) 右領域のセル15, 22, 27への資源投入が始まる時点5からは、上記のセル6, 12への資源投入による重複効果もあるため、近隣のセル28, 14, 20, 26での目標存在確率はほとんどゼロとなる。
- (4) 表1の特徴(6), (7)でみたとおり、左領域での重要な資源投入セルは10, 16, 23であり、遅い時

点では 32, 34, 35 である。これらのセルへの資源投入とセル 12, 27 への資源投入の影響が合わさるため、近隣セル 24, 36 での目標存在確率にはゼロが多い。

- (5) 上の特徴 (3), (4) で記した資源投入に関する要衝セル 15, 22, 27, 10, 16, 23, 32, 34, 35 自身にも目標は存在する。これは、他のセルの投入資源からの波及効果が障害セルに遮られて少ないため、結果として有効な累積資源量がそれほど大きくないからであり、また、広い目標分布を得るためには、これらのセルを避けることが返って目標存在確率の偏在を招くからである。

以上、目標存在確率及び搜索資源配分の最適戦略には、持続性、遠隔作用性といった資源の特性と目標の移動制約、更には障害セル等の地理空間固有の環境が複雑に絡み合っていることがうかがえ、それらのバランスの上に最適解が決まることが分かる。

6 おわりに

この論文は、搜索割当ゲーム (SAG) と呼ばれる 2 人ゼロ和搜索ゲームを扱っている。搜索資源の線形累積効果を含んだ支払関数と線形制約をもつ一般的な SAG モデルを考え、汎用性のあるモデルを定式化した。その結果、搜索者に関してはその搜索資源配分の純粋戦略により、目標に関してはその移動の混合戦略によりゲームの解が得られることが分かった。論文では、2 人のプレイヤーの最適戦略を求める 2 つの線形計画問題を提案したが、さらに実用的な計算時間を考えたもう 1 つの線形計画問題による定式化も導いた。ここで取り扱ったモデルは極めて一般性が高く、その解法は、より現実的あるいは特殊な多くの搜索問題に応用されることが期待されるが、その一例についても論文の中で取り上げ、最適戦略に関する分析を試みた。

参考文献

- [1] F. Dambreville and J.P. Le Cadre, Detection of a Markovian target with optimization of the search efforts under generalized linear constraints, *Naval Research Logistics*, **49**, pp.117–142, 2002.
- [2] J.N. Eagle and A.R. Washburn, Cumulative search-evasion games, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495–510, 1991.
- [3] A.Y. Garnaev, *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag, Tokyo, 2000.
- [4] R. Hohzaki, Search allocation game, *European Journal of Operational Research*, **172**, pp.101–119, 2006.
- [5] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, Discrete search allocation game with energy constraints, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**, pp.93–108, 2002.
- [6] R. Hohzaki and A. Washburn, An approximation for a continuous datum search game with energy constraint, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **46**, pp.306–318, 2003.
- [7] A.R. Washburn, Search-evasion game in a fixed region, *Operations Research*, **28**, pp.1290–1298, 1980.

表 1. 探索者の最適探索資源配分

cells \ time	1	2	3	4	5	6	7	8
1		0	0	0.154	0	0.098	0	0.101
2		0	0	0.026	0	0.042	0	0.017
3		0.105	0	0	0.006	0.009	0	0.006
4		0	0.210	0.047	0.139	0	0.161	0
5		0	0	0.038	0	0.023	0.007	0.027
6		0.262	0	0	0	0	0	0
7		0	0	0	0	0	0	0
8		0	0	0	0	0	0	0
9		0	0.216	0.019	0.072	0	0.038	0
10		0.105	0	0	0.015	0.006	0.003	0
11		0	0	0	0	0	0	0
12		0.529	0.146	0.405	0	0.320	0.040	0.320
13		0	0	0	0	0	0	0
14		0	0	0	0	0	0	0
15		0	0	0	0.193	0	0.185	0
16		0	0.222	0	0.164	0	0.145	0
17		0	0	0	0	0	0	0
18		0	0	0	0	0	0	0
19		0	0	0	0	0	0	0
20		0	0	0.065	0	0	0	0
21		0	0	0	0	0	0	0
22		0	0	0	0	0.112	0	0.088
23		0	0.206	0.079	0	0.003	0.097	0
24		0	0	0	0	0	0	0
25		0	0	0.050	0	0	0	0
26		0	0	0.117	0	0	0.002	0.041
27		0	0	0	0.128	0.172	0.050	0.157
28		0	0	0	0	0	0	0
29		0	0	0	0.282	0	0.116	0
30		0	0	0	0	0	0	0
31		0	0	0	0	0	0	0
32		0	0	0	0	0.181	0	0.155
33		0	0	0	0	0	0	0
34		0	0	0	0	0.033	0	0.059
35		0	0	0	0	0	0.142	0.029
36		0	0	0	0	0	0	0
37		0	0	0	0	0	0.015	0
計		1	1	1	1	1	1	1

表 2. 最適搜索資源配分の累積量

cells \ time	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.352	0.396	0.351	0.314	0.237	0.247	0.237	
2	0.342	0.449	0.357	0.295	0.243	0.261	0.237	
3	0.342	0.512	0.377	0.289	0.239	0.252	0.237	
4	0.052	0.370	0.383	0.301	0.253	0.252	0.243	
5	0.342	0.452	0.355	0.301	0.241	0.247	0.243	
6	0.589	0.662	0.384	0.318	0.253	0.270	0.259	
7	0.448	0.542	0.391	0.314	0.239	0.260	0.248	
8	0	0	0	0	0	0	0	
9	0.010	0.331	0.383	0.301	0.273	0.245	0.238	
10	0.342	0.517	0.370	0.292	0.241	0.244	0.240	
11	0.448	0.543	0.386	0.314	0.241	0.256	0.248	
12	0.723	0.868	0.686	0.546	0.380	0.417	0.422	
13	0.353	0.448	0.389	0.399	0.329	0.320	0.320	
14	0.159	0.331	0.376	0.362	0.284	0.270	0.278	
15	0	0.171	0.201	0.301	0.326	0.308	0.296	
16	0.052	0.377	0.376	0.308	0.268	0.244	0.240	
17	0	0	0	0	0	0	0	
18	0.353	0.447	0.395	0.387	0.254	0.236	0.248	
19	0.343	0.416	0.391	0.318	0.215	0.236	0.248	
20	0.159	0.267	0.374	0.370	0.342	0.304	0.310	
21	0	0	0	0	0	0	0	
22	0	0.065	0.070	0.137	0.260	0.238	0.212	
23	0.010	0.328	0.411	0.319	0.239	0.242	0.246	
24	0.159	0.328	0.390	0.379	0.259	0.235	0.248	
25	0.159	0.264	0.379	0.340	0.234	0.236	0.248	
26	0.159	0.202	0.339	0.360	0.337	0.316	0.337	
27	0	0	0.106	0.234	0.402	0.329	0.320	
28	0	0	0.042	0.125	0.280	0.245	0.230	
29	0	0.170	0.214	0.376	0.350	0.241	0.255	
30	0	0	0	0	0	0	0	
31	0	0	0	0	0	0	0	
32	0	0	0.083	0.147	0.331	0.315	0.305	
33	0	0	0.055	0.119	0.274	0.243	0.228	
34	0	0.062	0.086	0.165	0.175	0.192	0.231	
35	0	0	0	0.028	0.063	0.192	0.231	
36	0	0	0.012	0.050	0.191	0.245	0.254	
37	0	0	0.035	0.074	0.181	0.215	0.218	
計	5.895	9.519	9.145	8.881	8.4313	8.354	8.356	

表 3. 目標の最適存在確率

cells \ time	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0.005	0.153	0.102	0	0.045	0.046	0.047
2	0	0.139	0	0.070	0.054	0.046	0.044	0.048
3	0	0.262	0	0.030	0.101	0.067	0.063	0.061
4	0	0	0.162	0.075	0.011	0.040	0.039	0.039
5	0	0.145	0	0.057	0.033	0.039	0.033	0.033
6	0	0.055	0	0	0.031	0	0	0
7	0	0.078	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0.070	0.053	0.089	0.046	0.051	0.050
10	0	0.282	0	0.054	0.094	0.057	0.060	0.060
11	0	0	0.032	0	0.010	0.020	0	0.001
12	0	0.034	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0.022	0	0	0	0	0
14	0	0	0.062	0.046	0	0	0	0
15	0	0	0	0.047	0.111	0.047	0.047	0.047
16	0	0	0.167	0.048	0.048	0.048	0.054	0.055
17	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0.032	0	0	0.028	0.021
19	0	0	0.055	0	0.016	0.057	0.040	0.042
20	0	0	0.078	0.037	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0.078	0.078	0.079
23	0	0	0.060	0.081	0.031	0.039	0.034	0.031
24	0	0	0.105	0.031	0	0	0	0.002
25	0	0	0	0.046	0.078	0.046	0.053	0.054
26	0	0	0.034	0.055	0	0	0	0
27	0	0	0	0.062	0.084	0.062	0.062	0.062
28	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0.039	0.120	0.039	0.044	0.039
30	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0.034	0.089	0.034	0.034	0.034
33	0	0	0	0	0	0.022	0	0
34	0	0	0	0	0	0.081	0.054	0.062
35	0	0	0	0	0	0.032	0.068	0.065
36	0	0	0	0	0	0.009	0	0
37	0	0	0	0	0	0.046	0.068	0.068
計	1	1	1	1	1	1	1	1