

超距離空間上のマルコフ過程の収束と射影マルコフ性

鈴木康平

KOHEI SUZUKI

京都大学 理学研究科

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY*

1 超距離空間とは

距離空間 (S, ρ) が超距離空間であるとは、距離関数 ρ が以下の不等式を満たす時である。

$$\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\} \quad (\forall x, y, z \in S). \quad (1)$$

典型的な例として、 p -進数体 $\mathbb{Q}_p$ に p -進ノルム $\|\cdot\|_p$ を付与した空間 $(\mathbb{Q}_p, \|\cdot\|_p)$ が挙げられる ($\mathbb{Q}_p$ については、例えば、Koblitz [Kob84] を参照せよ)。確率過程論を超距離空間上で展開するためには、以下の 2 つの性質が重要である。

- (i) 小さなジャンプの積み重ねでは遠くまで行けない (超距離性)。
- (ii) 連続な道を作れない (完全不連結)。

(i) は不等式 (1) から直ちに導かれる帰結である。例えば、 $\mathbb{Z}^d$ 上のシンプルランダムウォークのように、ジャンプ幅が 1 で固定されているようなプロセスは、超距離空間上ではいつまでもたっても半径 1 の円盤の外に脱出出来ない。(ii) は、「超距離空間ならば完全不連結集合」から導かれる。このため超距離空間上ではは純粋ジャンプ過程のみを考えることになる。

このような空間で、良い確率過程を構成しようと 1980 年代後半から研究され始め、Albeverio–Karwowski [AK94] らは、 $\mathbb{Q}_p$ 上で Lévy 過程のクラスを構成し、その生成作用素やディリクレ形式の性質を研究した。その後、Kochubei [Koc97], Kaneko–Kochubei [KK07] で $\mathbb{Q}_p$ 上の確率微分方程式が研究され、Albeverio–Karwowski–Zhao [AKZ99] によって、 $\mathbb{Q}_p$ 上で熱核の挙動などが研究された。さらに、Yasuda [Yas96] によって、 $\mathbb{Q}_p$ を含む一般の局所体上で加法過程の性質が研究された。最近では、Albeverio–Karwowski [AK08],

*kohei0604@math.kyoto-u.ac.jp

Bendikov–Grigor’yan–Pittet [BGP12], Kigami [Kig12] らによって、 $\mathbb{Q}_p$ が持つ木の構造を一般化した、局所有限な木の終点集合上でマルコフ過程の構成とその熱核の評価について、詳細に研究された。以上の研究の中で、超距離空間上の確率過程の様相が、通常のユークリッド空間上の確率過程とは異なることが確認されている。例えば、[Kig12] では、off-diagonal での熱核の下からの評価が、ユークリッド空間上で得られるジャンプ過程とは異なる型の評価になることが確認されている。

2 主結果

我々はまず、超距離空間上のマルコフ過程の収束の様子を研究した。もう少し正確に述べれば、 S を超距離空間とし、 S を半径が固定されたボールの可算個で分割して、その分割に対する商空間を S^k とする ($k \in \mathbb{Z}$ は半径から決まる)。ディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から与えられた S 上のハント過程 X に対して、平均化ディリクレ形式 $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ を定義して、これに従う S^k 上のハント過程を X^k とする。この時、 $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ が $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ にモスコ収束する十分条件と、 X^k が X に弱収束する十分条件を得た。商空間に乗せたマルコフ連鎖によって元の空間のマルコフ過程が近似出来るという、超距離空間特有の様子が現れている。

次に「射影マルコフ性」と呼ばれる超距離空間特有の興味深い現象について研究した。射影マルコフ性とは、商空間をとっても X のマルコフ性が保たれるという性質である。我々は、 S 上のマルコフ過程がいつ射影マルコフ性をもつかという十分条件を得て、さらに射影されたマルコフ過程が実は平均化ディリクレ形式から従っているという結果を得た。

以上の結果の系として、 S 上のマルコフ過程の興味深い性質を得る事が出来た。それは、 S 上のマルコフ過程 X は、 S^k 上の consistent なマルコフ連鎖の列の極限として得られるということである。ここで consistent の意味は、 S^{k+1} 上のマルコフ連鎖 X^{k+1} を S^k に射影すると X^k と法則同等となっているという意味である。言い換えれば、 X^k は k が増加するにつれて、細かいジャンプの情報だけがが増えて行き、 $k \rightarrow \infty$ で X のジャンプの情報をすべて復元するということである。

それでは、設定と主定理についてより詳しく述べる事にする。 (S, ρ) を超距離空間、 μ を S 上の測度で、これらは以下の条件を満たすとする。

(U.0) (S, ρ) は局所コンパクトな完備超距離空間。

(U.1) 任意の閉球はコンパクト。

(U.2) ある整数値関数 $r : S \times S \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ と狭義減少関数 $\phi : \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ただし $\phi(\infty) = 0$) が存在して、以下を満たす:

$$\rho(x, y) = \phi(r(x, y)) \quad (\forall x, y \in S).$$

(U.3) μ は S 上のラドン測度で、任意の閉球 $B(x, r) := \{y \in S : \rho(x, y) \leq r\}$ に対して、 $0 < \mu(B(x, r)) < \infty$.

以後 B_x^k で $B(x, \phi(k))$ を表すことにする。ここで、以下のように、 S 上の同値関係 $\sim^k$ を定義する:

$$x \sim^k y \quad \text{if} \quad x \in B_y^k. \quad (2)$$

そして商空間を $S^k := S / \sim^k$ とし、 $[x]_k$ で x を含む同値類を表すことにする。 S^k を条件 $[x]_k \mapsto I^k([x]_k) \in B_x^k$ を満たす埋め込み I^k によって S の部分集合とみなす。さらに S^k 上の測度を $\mu^k(i) := \mu(B_i^k)$ とし、 $\pi^k : S \rightarrow S^k$ を $x \mapsto \pi^k(x) = [x]_k$ とする。すなわち写像 π^k は同値関係 $\sim^k$ の canonical な写像である。

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を以下のディリクレ形式とする:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v) &= \frac{1}{2} \int_{S \times S \setminus d} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) J(x, y) \mu(dx) \mu(dy), \\ \mathcal{F} &= \overline{D_0}^{\mathcal{E}_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 D_0 は閉球上の指示関数の有限線形和全体の集合、 d は $S \times S$ 上の対角線集合、 $J(x, y)$ は、 $S \times S \setminus d$ 上の非負値ボレル可測関数で以下を満たすとする:

(A.1) (Local integrability) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ と $i \in S^k$ に対して、

$$\int_{B_i^k \times (B_i^k)^c} J(x, y) \mu(dx) \mu(dy) < \infty. \quad (4)$$

(A.2) (Symmetricity) 任意の $(x, y) \in S \times S \setminus d$ に対して、

$$J(x, y) = J(y, x). \quad (5)$$

条件(A.1)と(A.2)から、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は正則ディリクレ形式であることが従い、 $X := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \{\mathbb{P}_x\}_{x \in S})$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から従うハント過程とする。

マルコフ過程の収束についての結果について述べる。 $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ を以下のディリクレ形式とする:

$$\mathcal{E}^k(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{i, j \in S^k} (u(i) - u(j))(v(i) - v(j)) J^k(i, j) \mu^k(i) \mu^k(j), \quad (6)$$

$$\mathcal{F}^k = \overline{C_0^k}^{\mathcal{E}_1^k}, \quad (7)$$

ここで、 C_0^k は有限集合をサポートとして持つ S^k 上の関数とし、 J^k を以下のように定義される $S^k \times S^k$ 上の関数とする:

$$J^k(i, j) := \begin{cases} \frac{1}{\mu^k(i) \mu^k(j)} \int_{B_i^k \times B_j^k} J(x, y) \mu(dx) \mu(dy) & (i \neq j), \\ 0 & (i = j). \end{cases} \quad (8)$$

$(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ をレベル k の平均化ディリクレ形式と呼ぶことにする。条件 (A.1), (A.2) の下で、 $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ は正則ディリクレ形式となる。 $X^k := (\Omega, \mathcal{M}^k, \mathcal{M}_t^k, X_t^k, \{\mathbb{P}_i^k\}_{i \in S^k})$ を $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ から従うハント過程とする。

この時、以下の定理が従う:

Theorem 2.1. 条件 (A.1) と (A.2) を仮定する。この時、 $k \rightarrow \infty$ で、 $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ にモスコ収束する。

ここで、モスコ収束の定義は例えば、Chen-Kim-Kumagai [CKK12, Definition 8.1] を参照せよ。この定理は、条件 (A.1), (A.2) しか仮定していないため、非常に広いクラスの対称ハント過程を含む。

X^k が X に弱収束するかについて考える。固定された k に対して、以下の条件を考える:

(BC) $_k$ (Ball-wise constance of level k) $i, j \in S^k$ ($i \neq j$) に対して、

$$J|_{B_i^k \times B_j^k} \equiv C_{ij}^k, \quad (9)$$

ここで、 C_{ij}^k は i, j, k のみに依存する定数である。

(BC) $_\infty$ 条件 (BC) $_k$ が任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して成立する。

例えば、[Kig12, Definition 3.6] で定義されているジャンプ密度関数 J_Γ は (BC) $_\infty$ を満たす。超距離空間のように完全不連結空間では、局所定数関数が多く存在する。そのため、(BC) $_\infty$ のような条件を満たす関数は豊富に存在するということを注意しておく。次に、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の保存性を保証するために、以下の条件を考える:

(A.3) 任意の $i \in S^k$ と $x \in S$ に対して、

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \int_{(B_i^k)^c} J(x, y) \mu(dy) = 0. \quad (10)$$

(A.4) 任意の $x \in S$ に対して、

$$\limsup_{k \rightarrow -\infty} \sup_{y \in (B_x^k)^c} J(x, y) \mu(B_x^k) = 0. \quad (11)$$

X^k の緊密性を保証するために、以下の条件を考える:

(A.5) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ と $x \in S$ に対して、

$$\sup_{y \in (B_x^k)^c} J(x, y) \mu(B_x^k) < \infty. \quad (12)$$

ここで、 $0 < T < \infty$ とし、 $\mathbb{D}_S[0, T]$ を右連続左極限を持つ $[0, T]$ から S への関数全体の集合にスコロホド位相を入れた位相空間とする (スコロホド位相については、例えば、Either–Kurts [EK86] を参照せよ)。弱収束と言うときは、 $\mathbb{D}_S[0, T]$ での法則収束を意味することにする。さらに、 $C_0(S)$ を S 上のコンパクト台を持つ連続関数の集合とし、 $C_0^+(S) := \{f \in C_0(S) : f \geq 0\}$ とする。ここで、 $\psi \in C_0^+(S)$ に対して、 $\psi^k \in C_0^+(S^k)$ を以下で定義する:

$$\psi^k(i) = \frac{1}{\mu^k(i)} \int_{B_i^k} \psi(x) \mu(dx). \quad (13)$$

この時、以下の定理が成り立つ:

Theorem 2.2. 条件 (A.1)–(A.5) と $(BC)_\infty$ を仮定する。この時、任意の $\psi \in C_0^+(S)$ と $0 < T < \infty$ に対して、初期分布 $\psi^k \mu^k$ の X^k は、初期分布 $\psi \mu$ の X に $k \rightarrow \infty$ で弱収束する。

Theorem 2.2 は、例えば、[Kig12, Definition 3.1] で構成されたハント過程のクラスの中で保存性を満たすクラスに適用出来る。実際にはもう少し広いクラスで適用出来、その具体例も構成する事が出来た。Theorem 2.2 の証明の方針は以下である。まず、Theorem 2.1 と X の保存性から、 X^k が X に有限次元分布収束することが従う。そして、 $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ にライオン–ツェン分解を用いて X^k の緊密性を示す。証明のアイデアは [CKK12] と同じである。ライオン–ツェン分解を用いている事から、初期分布は参照測度 μ に対して絶対連続なものに制限されている点に注意しておく。

次に、射影マルコフ性について述べる。超距離空間上のマルコフ過程 X の多くは、以下のような性質を満たしている:

$(\text{pMp})_k$ ($\mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x$) (q.e. $x \in S$) の下で、 $\pi^k \circ X$ がまたマルコフ過程となる。

この性質を「レベル k の射影マルコフ性」と呼ぶことにする。写像 π^k がマルコフ性を保つということである。このようにマルコフ性を保つ写像は、「マルコフ関数」と呼ばれており、例えば Pitman–Rogers [PR81] とその参考文献に詳細を委ねる。商空間の canonical な写像がマルコフ関数になるという性質は、例えば、 $\mathbb{R}$ 上のブラウン運動 B などには見られない特徴的な性質である。例えば、 $\mathbb{R}$ を半開区間列 $\{[a_n, a_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ (ただし、 $a_{n+1} - a_n = 1$) で分割して、 $\mathbb{R}^1$ をこの分割に対する商空間とし、 π^1 をこの商空間に対する canonical な写像とする。この時、 $\pi^1 \circ B$ はマルコフ過程とならない。このように、射影マルコフ性は通常のユークリッド空間では成り立たないような性質である。しかし、超距離空間上で構成されている多くのマルコフ過程は射影マルコフ性を満たす事が確認されている。

それでは、超距離空間上のマルコフ過程はいつ射影マルコフ性を持つだろうか？ また射影されたマルコフ過程 $\pi^k \circ X$ はどのようなディリクレ形式から従うだろうか？ 最初の問いに対する答えは、条件 $(BC)_k$ であり、2つ目の問いに対する答えは、レベル k の平均化ディリクレ形式であるということが分かった。以下に述べる。

Theorem 2.3. 条件 (A.1), (A.2), $(BC)_k$ を仮定する。この時, X はレベル k の射影マルコフ性を持つ。さらに, $\pi^k \circ X$ はレベル k の平均化ディリクレ形式 $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ から従うハント過程となる。ここで, $J^k(i, j) = C_{ij}^k$ であり C_{ij}^k は条件 $(BC)_k$ で与えられたものである。

注目すべき点は, $(\mathcal{E}^k, \mathcal{F}^k)$ でのジャンプ密度関数が $J^k(i, j) = C_{ij}^k$ となっている点である。つまり, $\pi^k \circ X$ は X の持つ距離 $\phi(k)$ より小さいジャンプの情報をまったく持っていない。このように $\pi^k \circ X$ が小さいジャンプの影響を全く受けていないのは, 小さいジャンプの積み重ねで遠くまで行けない超距離性からの帰結である。例えば, 小さいジャンプの積み重ねで, あるボールから別のボールへ移る事が出来るユークリッド空間では, $\pi^k \circ X$ は小さいジャンプの影響を受ける事になるため, このような現象は起こらない。

Theorem 2.2 と Theorem 2.3 の系として, 以下を得る:

Corollary 2.1. 条件 (A.1)–(A.5) と $(BC)_\infty$ を仮定する。この時, 任意の $\psi \in C_0^+(S)$ と $0 < T < \infty$ に対して, $\pi^k \circ X$ は, 初期分布 $\psi\mu$ の X に $k \rightarrow \infty$ で弱収束する。

Corollary 2.1 は, 超距離空間 S 上のマルコフ過程 X は, S^* 上の consistent なマルコフ連鎖 $\pi^k \circ X$ の列の $k \rightarrow \infty$ の極限となっていることを示している。ここで, consistent の意味は $\pi^k \circ \pi^{k+1} \circ X \stackrel{d}{=} \pi^k \circ X$ という意味である。Theorem 2.3 から π^k という作用は, X の距離 $\phi(k)$ より小さいジャンプの情報を消すという役割をもっており, $k \rightarrow \infty$ で, $\pi^k \circ X$ は消えた X のジャンプの情報を復元するということである。

参 考 文 献

- [AK94] S. Albeverio and W. Karwowski. A random walk on p -adics – the generator and its spectrum. *Stochastic Process. Appl.* **53** (1994), 1–22
- [AK08] S. Albeverio and W. Karwowski. Jump processes on leaves of multibranching trees. *J. Math. Phys.* **49** (2008), 093503, 20pp.
- [AKZ99] S. Albeverio, W. Karwowski, and X. Zhao. Asymptotics and spectral results for random walks on p -adics. *Stochastic Process. Appl.* **83** (1999), 39–59.
- [Bau01] Bauer, H. *Measure and Integration Theory*. Walter de Gruyter, Berlin, 2001.
- [BC08] K. Burdzy and Z.-Q. Chen. Discrete approximations to reflected Brownian motion. *Ann. Probab.* **36** (2008), 698–727.
- [BGP12] A. Bendikov, A. Grigor'yan and Ch. Pittet. On a class of Markov semigroups on discrete ultra-metric spaces. *Potential Analysis* **37** (2012) Nr 2 125–169
- [CFKZ09] Z.-Q. Chen, P. J. Fitzsimmons, K. Kuwae and T.-S. Zhang. Stochastic calculus for symmetric Markov processes. *Ann. Probab.* **36** (2008), 931–970.
- [CKK12] Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai. Discrete Approximation of Symmetric Jump Processes on Metric Measure Spaces. *Probab. Theory Relat. Fields*, to appear.

- [EK86] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [FOT10] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda. *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*. Walter de Gruyter, Berlin, 2010.
- [JS87] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 1987.
- [Kig12] J. Kigami. Transitions on a noncompact Cantor set and random walks on its defining tree. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, to appear.
- [KK07] H. Kaneko and A.N.Kochubei. Weak solutions of stochastic differential equations over the field of p -adic numbers, *Tohoku Math. J.* **59** (2007), 547–564
- [Kob84] N. Koblitz. *p -adic numbers, p -adic analysis and zeta-functions*. Springer, New York, 2nd ed., 1984.
- [Koc97] A.N.Kochubei. Stochastic integrals and stochastic differential equations over the field of p -adic numbers, *Potential Anal.* **6** (1997), 105–125.
- [KS03] K. Kuwae and T. Shioya. Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry. *Comm. Anal. Geom.* **11** (2003), 599–673.
- [Mosco94] U. Mosco. Composite media and asymptotic Dirichlet forms. *J. Funct. Anal.* **123** (1994), 368–421.
- [PR81] J. Pittman and L. C. G. Rogers. Markov functions. *Ann. Proba*, Vol.9, 1981, pp. 573–582.
- [Sch99] B. Schmuland. Positivity preserving forms have the Fatou property. *Potential Analysis* **10**: 373–378, 1999.
- [Yas96] K. Yasuda. Additive processes on local fields. *J.Math.Sci.Univ.Tokyo* **3** (1996), 629–654.
- [Yas06] K. Yasuda. Semi-stable processes on local fields. *Tohoku Math. J.* **58** (2006), 419–431.