

特異積分作用素について

阪大 基礎工 小 泉 澄之

§ 1. 特異積分作用素-(I)

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ は n 次元ユークリッド空間の点, または,
 $0 = (0, 0, \dots, 0)$ から $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ へのベクトルを, $|x|$ はその
 長さ $(\sum \xi_k^2)^{\frac{1}{2}}$ を表わすものとする.

$k(x)$ は次数 $-n$ の同次函数, すなわち

$$(1.1) \quad k(\lambda x) = \lambda^{-n} k(x), \quad \forall x; \lambda > 0$$

を満たし, さらに, 次の性質

$$(1.2) \quad \int_{\Sigma} k(x) d\sigma = 0; \quad (1.3) \quad \int_{\Sigma} |k(x)|^p d\sigma < \infty$$

が成立しているものとする. ここに, $p > 1$ で, Σ は単位球:

$|x| = 1$, $d\sigma$ は Σ 上の面積要素とする.

$f \in L^r$ ($r > 1$) ならば

$$(1.4) \quad \tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y) f(y) dy$$

とおく

$$(1.5) \quad \tilde{f}_\varepsilon(x) \rightarrow \tilde{f}(x), \quad \text{a.e. (pointwise)}$$

$$(1.6) \quad \tilde{f}_\varepsilon(x) \rightarrow \tilde{f}(x), \quad \text{in mean}$$

および

$$(1.7) \quad \|\tilde{f}\|_r \leq A_{r,p} \left[\int_{\Sigma} |k(x)|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_r$$

が成立する。この結果は、次の形式の特異積分作用素

$$(1.8) \quad K(f) = \alpha f + \tilde{f}, \quad \alpha \text{ は complex const.}$$

α 間における積 (composition) の可能性を保証している。

条件 (1.2) は $\tilde{f}$ の存在のための必要条件である。それは、 $f(x)$ を $|x| \leq 1$ の上の特性函数とすれば、

$$K(x) = \Omega(x')/|x|^n, \quad x' = x/|x|$$

だから

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x-y| < 1} k(x-y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{r^{n-1}}{r^n} dr \int_{\Sigma} \Omega(y') d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma} \Omega(y') d\sigma \end{aligned}$$

から明白である。

例 1. Hilbert 変換. $n=1$ のとき, $k(x) = \Omega(x')/|x|^2$

(1.2) を満たす $\Omega(x')$ は $\text{sign}|x|$ に限る。従って、このときは

Hilbert 変換が得られる。すなわち

$$(1.9) \quad Hf = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

例 2. Riesz 変換. $n \geq 2$ のとき, $k(x) = x_k/|x|^{n+1}$ とおくと (1.2) を満足する. このとき

$$(1.10) \quad R_k f = \int \frac{x_k - y_k}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

は Riesz 変換と呼ばれる.

(1.1), (1.2) および (1.3) が成立しているとき, $f^* \in L_2 \subset L_1$, $k_{\varepsilon, \eta}(x) = k(x)$, $\varepsilon < |x| < \eta$; $= 0$, $|x| < \varepsilon$, $|x| > \eta$. とおいて, $\tilde{f}_{\varepsilon, \eta} = k_{\varepsilon, \eta} * f$ のフーリエ変換を考える. Faltung rule によって, $\hat{\tilde{f}}_{\varepsilon, \eta} = \hat{k}_{\varepsilon, \eta} \cdot \hat{f}$. このとき, $|x| = r$, $|y| = \rho$, $(x, y) = r\rho \cos \varphi$ とおくと, $dy = \rho^{n-1} d\rho d\sigma$, $k(x) = \Omega(x)/|x|^n$ だから

$$\begin{aligned} \hat{k}_{\varepsilon, \eta}(x) &= \int_{\Sigma} d\sigma \int_{\varepsilon}^{\eta} \rho^{-1} \Omega(y') e^{-2\pi i r \rho \cos \varphi} d\rho \\ &= \int_{\Sigma} \Omega(y') d\sigma \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i \rho \cos \varphi}}{\rho} d\rho \end{aligned}$$

$g(\rho) = 1$, $\rho \leq 1$; $= 0$, $\rho > 1$ とおいて, (1.2) を用いると

$$\hat{k}_{\varepsilon, \eta}(x) = \int_{\Sigma} \Omega(y') d\sigma \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i \rho \cos \varphi} - g(\rho)}{\rho} d\rho$$

そこで,

$$\left| \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i p \cos \varphi} - g(p)}{p} dp \right| \leq \log \frac{1}{|\cos \varphi|} + C$$

だから, $\eta \rightarrow \infty$, 次に $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, $\hat{k}_{\varepsilon, \eta}(x)$ は $\hat{k}(x)$ に有界収束である. 従って

$$\|\hat{k}_{\varepsilon, \eta}(x) \hat{f}(x) - \hat{k}(x) \hat{f}(x)\|_2 \rightarrow 0$$

故に, $\hat{f}$ のフーリエ変換を $\hat{\hat{f}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{\hat{f}}_{\varepsilon, \eta}$ と定義すると,

$$(1.11) \quad \hat{\hat{f}}(x) = \hat{k}(x) \cdot \hat{f}(x)$$

が得られる. 従って, 作用素 $K(\hat{f})$ のフーリエ変換は

$$(1.12) \quad \hat{K}(\hat{f}) = (\alpha + \hat{k}) \cdot \hat{f}$$

である. ここで

$$(1.13) \quad \alpha + \hat{k} = \sigma(K)$$

と書いて, これを作用素 K の symbol と呼ぶ. 従って,

$$(1.14) \quad \hat{K}(\hat{f}) = \sigma(K) \hat{f}$$

および

$$(1.15) \quad K(\hat{f})(x) = \int \sigma(K) \hat{f} e^{2\pi i(x, y)} dy$$

を得る. (1.15) を pseudo-differential operator と呼んでいる.

次に, 特異積分作用素のクラスを二つ, 次のように定める.

(I). 族 $\mathcal{A}$. $k(x)$ は (1.1), (1.2) を満たし, $x \neq 0$ のとき, C^∞

に属するものとする。このような核 $k(x)$ から生成された作用素 K の作る族を $\mathcal{A}$ で表わす。

(II) 族 $\mathcal{A}_p$ ($p > 1$)。 $k(x)$ は (1.1), (1.2) および (1.3) を満足するものとする。このような核 $k(x)$ から生成された作用素 K の作る族を $\mathcal{A}_p$ で表わす。 (1.7) から判るように

$$(1.16) \quad \|K\|_p = |\alpha| + \left[\int_{\Sigma} |k(x)|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}}$$

で、作用素 K のノルムと定義する。

定理 1. $\mathcal{A}$ は (I) で定義された作用素の族とする。

(i) 族 $\mathcal{A}$ は作用素の和および積について閉じている。

(ii) 作用素 $K \in \mathcal{A}$ の symbol $\sigma(K) = \alpha + \hat{k}$ は $x \neq 0$ で C^∞ に属する、次数 0 の同次函数である。そして、 K, H が $\mathcal{A}$ に属するとき、

$$\sigma(K+H) = \sigma(K) + \sigma(H), \quad \sigma(K \cdot H) = \sigma(K) \cdot \sigma(H).$$

(iii) 逆に $x \neq 0$ で C^∞ に属する次数 0 の同次函数は、 $\mathcal{A}$ に属するある作用素の symbol になっている。従って、 $\mathcal{A}$ に属するある作用素が $\mathcal{A}$ の中で逆元をもつための必要十分条件はその symbol が零点をもたないことである。

$$(iv) \quad \rho(\hat{k}) = \sum_{|\alpha| \leq n+1} \sup_{|x| \geq 1} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \hat{k}(x) \right|$$

ただし、

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 各 α_k は 0 または正の整数で、

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ならば

$$(1.17) \quad \sup_{|x|=1} |k(x)| \leq A \rho(\hat{k}).$$

ここに, A は k に関係しない定数である.

証明. 次の記号を用いる.

$$f \cdot g = \int f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f * g = \int f(x-y) g(y) dy$$

$$g^\lambda(x) = \lambda^n g(\lambda x), \quad g_\lambda(x) = \begin{cases} g(x), & |x| \geq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}$$

$\hat{f}$ は f のフーリエ変換, 族 $\mathcal{S}$ は急減少函数を作る族とする.

$f(x)$ が $|x|$ だけの函数のとき, f は radial であるという. $f_\lambda \in \mathcal{S}$ が radial ならば $\hat{f}_\lambda \in \mathcal{S}$ もまた radial である.

$f \cdot g = 0$, $\forall$ radial $g \in \mathcal{S}$, a のとき, f を corradial であるという. $f \cdot g = \hat{f} \cdot \hat{g}$ から f が corradial ならば $\hat{f}$ もまた corradial である.

k が同次函数であるとき, 条件 (1.2) の成立と k が corradial であることは同値である. これは, h を radial

として,

$$k \cdot h = \int k(x) \overline{h(x)} dx = \int_0^\infty \frac{\overline{h(|x|)}}{|x|^n} dr \int_{\Sigma} h(x') d\sigma$$

から明白である.

定理の証明は、与えられた次数の同次函数の表現に基づいて
 いる。 $g(x)$ は族 $\mathcal{S}$ に属し、corradial とする。このとき、 $g(0)$
 $= 0$,

$$(1.18) \quad k(x) = \int_0^\infty g(\lambda x) \lambda^{-n-1+r} d\lambda = \int_0^1 \{g(\lambda x) - g(0)\} \lambda^{r-1} d\lambda + \int_1^\infty g(\lambda x) \lambda^{r-1} d\lambda$$

は、 $r > -1$ で絶対収束し、 $k(x)$ は次数 $-r$ の corradial な同
 次函数で、 $x \neq 0$ で族 C^∞ に属する。逆に、 $k(x)$ を次数 $-r$
 の corradial な同次函数で、 $x \neq 0$ で C^∞ に属するならば、
 $g(x) = k(x) p(|x|)$ とおくと、ただ $p(t) \in C^\infty$, $t=0$ お
 よび ∞ の近傍で 0 に等しく

$$(1.19) \quad \int_0^\infty \lambda^{-1} p(\lambda) d\lambda = 1$$

を満たす函数とする。この $g(x)$ は明らかに族 $\mathcal{S}$ に属し、corradial
 で、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(\lambda x) \lambda^{-n-1+r} d\lambda &= \int_0^\infty k(\lambda x) p(|\lambda x|) \lambda^{-1+r} d\lambda \\ &= k(x) \int_0^\infty p(|\lambda x|) \lambda^{-1} d\lambda = k(x) \int_0^\infty \lambda^{-1} p(\lambda) d\lambda = k(x) \end{aligned}$$

から判る。

$p(u)$ は radial, C^∞ に属し、 $p(0) = 1$, $p(x) = 0$, $|x| \geq 1$.
 また、 $f(x)$ は C^∞ に属する任意の函数とする。 ~~今太き~~

λ に対して, $k_\lambda \cdot p = 0$ である. そして

$$\begin{aligned}\hat{f} \cdot \hat{k} &\equiv \int \hat{f}(x) \overline{\hat{k}(x)} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int \hat{f}(x) \overline{k_\lambda(x)} dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int [\hat{f}(x) - \hat{f}(0)] \overline{k_\lambda(x)} dx = \int [\hat{f}(x) - \hat{f}(0)p(x)] \overline{k(x)} dx\end{aligned}$$

$[\hat{f}(x) - \hat{f}(0)p(x)]_{x=0} = 0$ であるから, (1.17) で $r=n$ とおいた式を代入して

$$\begin{aligned}\hat{f} \cdot \hat{k} &= \int [\hat{f}(x) - \hat{f}(0)p(x)] dx \int_0^\infty \lambda^{-1} \overline{g^\lambda(x)} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda^{-1} d\lambda \int [\hat{f}(x) - \hat{f}(0)p(x)] \overline{g^\lambda(x)} dx\end{aligned}$$

g^λ は corradial, p は radial であるから $g^\lambda \cdot p = 0$, したがって

$$\begin{aligned}\hat{g}^\lambda(x) &= \int \lambda^n g(\lambda y) e^{-2\pi i(x, y)} dy = \int g(y) e^{-2\pi i(\frac{x}{\lambda}, y)} dy \\ &= \lambda^n [\lambda^{-n} \hat{g}(\lambda^{-1}x)] = \lambda^n \hat{g}^{\lambda^{-1}}(x).\end{aligned}$$

故に, $\lambda^{-1} = \mu$ とおいて

$$\begin{aligned}\hat{f} \cdot \hat{k} &= \int_0^\infty \lambda^{-1} d\lambda \int \hat{f}(x) \overline{g^\lambda(x)} dx = \int_0^\infty d\lambda \int \hat{f}(x) \overline{\hat{g}^\lambda(x)} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda^n d\lambda \int \hat{f}(x) \overline{\hat{g}^{\lambda^{-1}}(x)} dx = \int_0^\infty \mu^{-n-1} d\mu \int \hat{f}(x) \overline{\hat{g}^\mu(x)} dx \\ &= \int \hat{f}(x) dx \int \hat{g}^\mu(x) \mu^{-n-1} d\mu = \hat{f} \cdot \int \hat{g}^\mu(x) \mu^{-n-1} d\mu\end{aligned}$$

ここで、積分の順序の変更は、すべて絶対収束により保証される。そして、この関係式は C_0^∞ に属する任意の函数に対して成立している。故に

$$(1.20) \quad k(x) = \int g^\lambda(x) \lambda^{-1} d\lambda$$

$$(1.21) \quad \hat{k}(x) = \int \hat{g}^\lambda(x) \lambda^{-n-1} d\lambda$$

が導かれる。 $g \in \mathcal{S}$ から corradial かつ $\hat{g}$ も $\mathcal{S}$ に属し corradial である。よって、(1.18) から判るように $\hat{k}(x)$ は $x \neq 0$ で C^∞ に属する、次数 0 の corradial な同次函数である。

逆に (1.21) から (1.20) が導かれることは明かであろう。これで、定理 1 の (i), (ii) および (iii) が、すべて証明された。

次に (iv) を証明しよう。いま述べたことから、 $\hat{g}(y) = \hat{k}(y) p(|y|)$ 、ただし、 $p(t) \in C^\infty$ 、 $p(t) = 0$ 、 $0 \leq t < 1$ 、 $2 < t$ 、(1.19) を満足する。この $\hat{g}$ を用いて、(1.21) によって、 $\hat{k}$ を表現し、 $g = \hat{\hat{g}}$ を用いて、(1.20) によって、 k を表現する。 $\wedge$ はフーリエ逆変換を表わすものとする。このとき $|x| = 1$ に対して、

$$|k(x)| = \left| \int_0^\infty g(\lambda x) \lambda^{-1} d\lambda \right|$$

$$= \sup |g(y)| \int_0^1 \lambda^{n-1} d\lambda + \sup |g(y)| |y|^{n+1} \int_1^\infty \lambda^{-2} d\lambda$$

次に, $g(x) = \hat{g}'(x)$, $\wedge'$ は逆 $\gamma - 1$ 変換, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$\xi_k^{n+1} g(x) = (2\pi i)^{-n-1} \int \left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial \eta_k^{n+1}} \right) \hat{g}(y) e^{2\pi i(x, y)} dy$$

Hölder の不等式から $|x|^{n+1} \leq n^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum |\xi_i|^{n+1}$, より

$$|g(x)| |x|^{n+1} \leq (2\pi)^{-n-1} \cdot n^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum \int \left| \left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial \eta_k^{n+1}} \right) \hat{g}(y) \right| dy$$

$$|g(x)| \leq \int |\hat{g}(y)| dy.$$

次に, $\hat{g}(y) = \hat{k}(y) P(|y|)$, $P(|y|) = 0$, $|y| < 1$, $2 < |y|$

故に, $|g(x)| + |x|^{n+1} |g(x)| \leq A \sum_{|x| \leq n+1} \sup_{|x| \leq 1} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \hat{k}(x) \right| = A \beta(\hat{k})$

従って, $\sup_{|x|=1} |k(x)| \leq A \beta(\hat{k}).$

文 献

- [1] A. P. Calderón - A. Zygmund : Algebras of certain singular operators, Amer. Journ. Math. 78 (1956) 310-321
- [2] A. P. Calderón - A. Zygmund : Singular integral operators and differential equations, Amer. Journ. Math. 79 (1957) 90-92
- [3] A. P. Calderón : Algebras of Singular integral operators Proc. Symposia in Pure Math., vol X. (1967) 18-55.