

Generalized recursion theory.

立教大理 高橋元男

§1. 公理系 RBG とその syntax.

Bernays - Gödel の公理系 BG を弱めた RBG を次のように定義する:

A, B, D 群の公理はそのままとし C 群の公理から, 中集合の公理 と無限の公理を除き, 空集合の存在公理をつけ加える.

(Cls, $\mathcal{M}$ の代りに Class, Set を用いる以外は, Gödel の monograph の notation に概ね従う.)

定理 1. (類の存在定理.) $\varphi(x; X_1, \dots, X_n)$ を任意の formula ($x, X_1, \dots, X_n$ のみを自由変数とする) とすれば

$$\vdash \forall X_1 \dots \forall X_n \exists! Y \forall x [x \in Y \equiv \varphi(x; X_1, \dots, X_n)].$$

これは Gödel の monograph の通りである.

定理 2. (帰納法の原理.) $\varphi(x, X; y_1, \dots, y_m, X_1, \dots, X_n)$

を Σ_1 (bounded formula (集合についての bounded quantifier 以外の quantifier を含まない式) の前に (unbounded) existential quantifier をつけた形) の式) で, X は $t \in X$ の形に φ の positive parts にのみ現われる, とする. このとき

$$\begin{aligned} & \vdash \forall y_1 \dots \forall y_m \forall Y_1 \dots \forall Y_n \exists! X [\forall x [x \in X \\ & \quad \equiv \varphi(x, X; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)] \wedge \\ & \quad \forall Z [\forall x [\varphi(x, Z; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n) \supset x \in Z] \supset Y \subseteq Z]]. \end{aligned}$$

証明の outline. φ を定理の仮定をみたすものとするば,

$$\begin{aligned} (1). \quad X_1 \subseteq X_2 \wedge \varphi(x, X_1; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n) \\ \supset \varphi(x, X_2; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n). \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} (2). \quad \varphi(x, X; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n) \\ \supset \exists Z [Z \subseteq X \wedge \varphi(x, Z; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)] \end{aligned}$$

が証明される. 以下 [] 参照.

注) 上の X を

$$\begin{aligned} x \in X &\equiv \varphi(x, X; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n), \\ X &\equiv \{x \mid \varphi(x, X; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)\} \end{aligned}$$

等と書き, φ によって帰納的に定義された類と呼ぶ. また以下においては, もっと省略した書き方もする.

§2. Formal Recursion Theory.

先ず, 類 W を帰納的に (即ち 定理 2 を用いて) 次の様に定義する:

$$D.1. \quad W \stackrel{\text{ind}}{=} \{ \langle \langle 0, a \rangle, x \rangle \mid x \in a \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 1, 0 \rangle, \langle xy \rangle \rangle \mid x \in y \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 1, 1 \rangle, \langle xy \rangle \rangle \mid x \notin y \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 2, a, b \rangle, x \rangle \mid \langle ax \rangle \in W \wedge \langle bx \rangle \in W \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 3, a, b \rangle, x \rangle \mid \langle ax \rangle \in W \vee \langle bx \rangle \in W \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 4, a \rangle, \langle xy \rangle \rangle \mid \forall t \in x [\langle a, \langle ty \rangle \rangle \in W] \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 5, a \rangle, x \rangle \mid \exists y [\langle a, \langle yx \rangle \rangle \in W] \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 6, a \rangle, \langle xy \rangle \rangle \mid \langle ay \rangle \in W \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 7, a \rangle, \langle xy \rangle \rangle \mid \langle a, \langle yx \rangle \rangle \in W \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 8, a \rangle, \langle xyz \rangle \rangle \mid \langle a, \langle xzy \rangle \rangle \in W \}$$

$$\cup \{ \langle \langle 9, a \rangle, \langle xyz \rangle \rangle \mid \langle a, \langle yzx \rangle \rangle \in W \}.$$

$$D.2. \quad A_a = \{ x \mid \langle ax \rangle \in A \}.$$

$$D.3. \quad RE(A) \equiv \exists a [A = W_a], \quad (A \text{ is recursively enumerable})$$

$$RC(A) \equiv RE(A) \wedge RE(-A), \quad (A \text{ is recursive})$$

$$PRF(A) \equiv \mathcal{U}_n(A) \wedge RE(A), \quad (A \text{ is partial recursive function})$$

$$RF(A) \equiv PRF(A) \wedge \mathcal{D}(A) = V,$$

$$(A \text{ is recursive function})$$

$$\text{PRF}_n(A) \equiv \text{PRF}(A) \wedge \mathcal{D}(A) \subseteq V^n,$$

(A は n 変数の partial recursive function),

$$\text{RF}_n(A) \equiv \text{PRF}(A) \wedge \mathcal{D}(A) = V^n$$

(A は n 変数の recursive function).

$$T1. \quad W_{\langle 0a \rangle} = a,$$

$$W_{\langle 1,0 \rangle} = E, \quad W_{\langle 1,1 \rangle} = \dot{E} = \{ \langle xy \rangle \mid x \neq y \},$$

$$W_{\langle 2,a,b \rangle} = W_a \cap W_b, \quad W_{\langle 3,a,b \rangle} = W_a \cup W_b,$$

$$W_{\langle 4a \rangle} = W_a^\pi \quad (A^\pi = \{ \langle xy \rangle \mid \forall t \in x [\langle ty \rangle \in A] \}),$$

$$W_{\langle 5a \rangle} = \mathcal{D}(W_a), \quad W_{\langle 6a \rangle} = V \times W_a,$$

$$W_{\langle 6+i, a \rangle} = \text{Conv}_i(W_a) \quad i=1, 2, 3.$$

は W の定義より明らか. さらに, これらを組合せると,

$$T2. \quad \mathcal{N}(W_a) = \mathcal{D}(W_a^{-1}) = W_{\langle 5,7,a \rangle},$$

$$a^c (= V - a) = \dot{E}'' \{a\} = \mathcal{N}(\dot{E} \cap (V \times \{a\}))$$

$$= W_{\langle 5,7,2, \langle 1,1 \rangle, 6, 0, \{a\} \rangle},$$

$$W_a'' W_b = \mathcal{N}(W_a \cap (V \times W_b))$$

$$= W_{\langle 5,7,2,a,6,b \rangle},$$

$$W_a \upharpoonright W_b = W_{\langle 2,a,6,b \rangle},$$

$$I = \{ \langle xy \rangle \mid \forall t \in x [t \in y] \wedge \forall t \in y [t \in x] \}$$

$$= E^\pi \cap E^{\pi,-1} = W_{\langle 2, \langle 4, 1, 0 \rangle, \langle 7, 4, 1, 0 \rangle \rangle}.$$

$$0 = E \cap \dot{E} = W_{\langle 2, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \rangle}, \quad V = 0^c.$$

$$W_a \times W_b = (V \times W_a)^{-1} \cap (V \times W_b)$$

$$= W_{\langle 2, \langle 6, 6 \rangle 7, 6, a \rangle}.$$

定理3. $\varphi(x, y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)$ を Σ_1 , $Y_1, \dots, Y_n$ について positive とすれば

$$\vdash \forall y_1 \dots \forall y_m \forall Y_1 \dots \forall Y_n \forall X [\forall x \in X [\varphi(x, y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)]$$

$$\equiv \varphi(x, y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)]$$

$$\supset [RE(Y_1) \wedge \dots \wedge RE(Y_n) \supset RE(X)]]$$

証明. もっと一般に $\varphi(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)$ を Σ_1 , positive ($Y_1, \dots, Y_n$ に関し) とするとき,

$$(*) RE(Y_1) \wedge \dots \wedge RE(Y_n)$$

$$\supset RE(\{ \langle x_1, \dots, x_l \rangle \mid \varphi(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n) \})$$

を証明する. これは φ の中の論理記号の数に関する帰納法による. (但し $\neg$ は prime formula に関わらずに用いられるとする).

Basis. φ は prime formula, 又はその否定とすると
 次の3つの場合に分れる. φ が

$$(1) x_i \in x_j \quad (2) x_i \in y_j \quad (3) y_i \in x_j \quad (4) y_i \in y_j \quad (5) x_i \in Y_j \quad (6) y_i \in Y_j$$

$$(1)' x_i \notin x_j \quad (2)' x_i \notin y_j \quad (3)' y_i \notin x_j \quad (4)' y_i \notin y_j.$$

このうち (3) (3)' は $\neg \exists t \in x_j \forall \Delta [\Delta \in y_i \equiv \Delta \in t]$ と書きなおせるから, prime の場合から除いてよい. 他の場合のうち (4), (4)', (6) は φ が $x_1, \dots, x_l$ を含まないから, φ が成り立つか, 成り立たないかに依り,

$$\{ \langle x_1, \dots, x_l \rangle \mid \varphi \} = V^l \text{ 又は } \emptyset$$

であるから、いずれの場合も、T.2.により (*) は成り立つ。

φ が (2) の形するとき

$$\{ \langle x_1 \dots x_l \rangle \mid \varphi \} = \underbrace{V \times \dots \times V}_{i-1 \text{ 個}} \times y_j \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l-i \text{ 個}}$$

となる (但し $\times$ の結合は後からとする) のでやはり *rec.*

enum. である。(3)', (5) の場合も同様である。残った (4)

(4)' の場合は Gödel の monograph の M1 の証明のようによめばよい。即ち、先ず $(i \neq j \text{ と } (2 \text{ 通り}))$

$$\{ \langle x_i' x_j' \rangle \mid \varphi \} (= E, E^{-1}, \dot{E}, \dot{E}^{-1} \text{ のいずれか})$$

を作り、後 ε - ペンにふやし $(i', j' \text{ は } \min(i, j), \max(i, j))$

$$\{ \langle x_i' x_j' \langle x_{j'+1} \dots x_l \rangle \rangle \mid \varphi \}$$

を作り、以下 順次

$$\{ \langle x_i' x_s \dots x_{j'-1} x_j' \dots x_l \rangle \mid \varphi \} (s = j'-1, j'-2, \dots, i'+1)$$

$$\{ \langle x_k x_{k+1} \dots x_{i'} \dots x_l \rangle \mid \varphi \} (k = i', i'-1, \dots, 1)$$

を作ればよい。これらの操作は、すべて T1, T2 の中の演算の結合で表現できるから、定理は成り立つ。なお、この場合の方法は φ が $x_i = x_j$ のときも通用することを、後の石めここで注意する。

Induction Step. 一番外の論理記号が $\wedge$ または $\vee$ のときは帰納法の仮定を用いれば、容易に示される。一番外に quantifier がつく場合は、次の3通りに分れる。

(1) φ が $\exists x \psi(x, x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)$ の形の時、

(2) φ が $\forall x \in y_j \psi(x, x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)$ の形の時、

(3) φ が $\forall x \in x_i \psi(x, x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)$ の形の時、

(1) の場合、 $A = \{ \langle x, x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid \psi(x, x_1, \dots, x_\ell, \dots) \}$ とすれば、帰納法の仮定により

$$RE(Y_1) \wedge \dots \wedge RE(Y_n) \supset RE(A)$$

がえられる。 $\{ \langle x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid \varphi \} = \mathcal{D}(A)$ であるから、上のことと仮定 T1 から (*) が示される。

(2) の場合、 $A = \{ \langle x, x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid \psi(x, x_1, \dots, x_\ell, \dots) \}$ とすれば $A^\pi = \{ \langle t x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid \forall x \in t \psi(x, x_1, \dots, x_\ell, \dots) \}$

$$\{ \langle x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid \varphi \} = A^{\pi, -1} \{ y_j \}$$

だから (1) の場合と同様に (*) が示される。

(3) の場合、 $A = \{ \langle x x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid \psi(x, x_1, \dots, x_\ell, \dots) \}$ とすれば $A^\pi = \{ \langle t x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid \forall x \in t \psi(x, x_1, \dots, x_\ell, \dots) \}$ 故に

$$\{ \langle x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid \varphi \} = \mathcal{D}(A^\pi \cap I_i^{\mathcal{L}}) \quad \text{ここに}$$

$$I_i^{\mathcal{L}} = \{ \langle x_i x_1, \dots, x_\ell \rangle \mid x_1, \dots, x_n \in V \}$$

$$= \{ \langle x_1, \dots, x_{\ell+1} \rangle \mid x_1 = x_{\ell+1} \}$$

でこれは r. e. であることが上の注意からわかる。あとは (1)

(2) の場合と同様に (*) が示される. (証明終)

定理4. $\varphi(x, X; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)$ が Σ_1^1 で $Y_1, \dots, Y_n$ に関し positive とすれば

$$\vdash \forall y_1 \dots \forall y_m \forall Y_1 \dots \forall Y_n \forall X [\forall x [x \in X \overset{\text{ind}}{\equiv} \varphi(x, X; y_1, \dots, y_m, Y_1, \dots, Y_n)] \wedge RE(Y_1) \wedge \dots \wedge RE(Y_n) \supset RE(X)].$$

証明. 定理3 に, [] の Theorem 1 と同様な方法で reduce する.

上の一般的な定理3, 4により 次のことがわかる.

定理5. (i) 次の Class は *rec. enum.* である: 任意の set a, V, E, I, O_n, W (ii) A, B が *rec. enum.* ならば次のものも *r.e.* である: $A \cup B, A \cap B, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(A), \text{Conv}_i(A) (i=1, 2, 3), A \times B, A^n, A^\pi, A^\sigma, A_a, \mathcal{Q}(A), \mathcal{N}(A), A \circ B$.

(iii) 次のものは n 変数 *recursive functions* である. ($n \geq 1$).

$$C_{(a)}^n \overset{\text{def}}{=} \{ \langle ax \rangle \mid x \in V^n \} \quad (a \in V).$$

$$I_i^n \overset{\text{def}}{=} \{ \langle x_i x_1 \dots x_n \rangle \mid x_j \in V, j=1, \dots, n \}.$$

$$P_n \overset{\text{def}}{=} \{ \langle \langle x_1 \dots x_n \rangle x_1 \dots x_n \rangle \mid x_j \in V, j=1, \dots, n \}.$$

(iv) A を n 変数の *partial recursive function*, $B_1, \dots, B_n$ を m 変数の *partial recursive functions* とすれば

$$A \circ (B_1, \dots, B_n) \overset{\text{def}}{=} \{ \langle y x_1 \dots x_m \rangle \mid \exists y_1 \dots \exists y_m$$

$\{ \langle y_1 \dots y_n \rangle \in A \wedge \bigwedge_{i=1}^n [\langle y_i x_1 \dots x_m \rangle \in B_i] \}$ (合成関数)

も m 変数の partial recursive function である.

また $PR\mathcal{F}$, RC , $R\mathcal{F}_n$ の定義より

T.3. $PR\mathcal{F}(A) \wedge RC(\mathcal{Q}(A)) \supset RC(A)$,

$R\mathcal{F}_n(A) \supset RC(A)$,

が証明される. さて partial recursive function の理論はあとまわしにして recursively enumerable class の理論を先に展開する.

W はそれ自身 r.e. であり, かつ任意の r.e. class A は適当な set a に対し $A = W_a$ と表わされるから, W は r.e. の universal class とよぶ. 対角線論法により

T.4. $\neg RC(W)$

が成り立つ.

$A = W_a$ のとき a を A の (r.e.) code とよぶ.

定理6. 定理5(ii)で, (A, B) が r.e. であるとき) r.e. なることの示された class の code は A (又は A, B) の $code(s)$ の recursive function (1変数又は2変数) として求めらる. 例えは

$\vdash \exists X [R\mathcal{F}_2(X) \wedge \forall a \forall b [W_{X' \langle ab \rangle} = W_a \cup W_b]]$.

(この場合 $X = \{ \langle \langle 3ab \rangle ab \rangle \mid a, b \in V \}$ とすればよい)

T.5. $\exists S [R\mathcal{F}_2(S) \wedge \forall e \forall a [W_{S' \langle ea \rangle} = W_{e,a}]]$

$$(W_e)_a = (W_e)_a.)$$

証明. $W_e, a = W_e^{-1} \{a\}$ であるから S を, $\mathcal{R}\mathcal{F}_2(S)$ で

$$S' \langle ea \rangle = \langle 5, 7, 2, \langle 7, e \rangle, 6, 0, \{a\} \rangle \text{ である様なもの}$$

とすればよい.

$$T.6. (i) \forall F [\mathcal{R}\mathcal{F}(F) \supset \exists a [W_{F'a} = W_a]].$$

$$(ii) \forall X [\mathcal{R}\mathcal{E}(X) \supset \exists a [W_a = X_a]].$$

証明. (ii) のみ行う.

$$A = \{ \langle ex \rangle \mid \langle S' \langle ee \rangle, x \rangle \in X \}$$

は r.e. であるから, その code を f とし $a = S' \langle f, f \rangle$ とおける.

$$\begin{aligned} W_a &= W_{S' \langle ff \rangle} = W_{f, f} \\ &= \{ x \mid \langle fx \rangle \in A \} = \{ x \mid \langle S' \langle ff \rangle, x \rangle \in X \} \\ &= X_a. \end{aligned}$$

(T.6. は Strong recursion theorem とよばれる.)

$$D.4. \Phi_a(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid \exists y [\langle xy \rangle \in W_a \wedge y \subseteq X] \}$$

を enumeration operator とよぶ.

D.5. (i) $A \leq_e^{[a]} B$ (A is enumeration reducible to B with a code a) $\stackrel{\text{def}}{=} A = \Phi_a(B)$.

(ii) $A \leq_e B$ (A is enumeration reducible to B) $\stackrel{\text{def}}{=} \exists a [A \leq_e^{[a]} B]$.

$\leq_e$ は reflexive かつ transitive 関係でありさらに

T.7. $A \leq_e B \wedge RE(B) \supset RE(A)$

である。

定理7. $\varphi(x, X)$ を Σ_1 の X に關して positive とすれば

は

$\vdash \forall x [x \in A \equiv \varphi(x, B)] \supset A \leq_e B$.

証明. 定理3 の証明を相対化すればよい。

D.6. (i) $A \uparrow^{[a]} B$ (A is r.e. in B with code a)

$\stackrel{def}{=} A = \{x \mid \exists y \exists z [\langle x y z \rangle \in W_a \wedge y \subseteq B \wedge z \cap B = \emptyset]\}$.

(ii) $A \uparrow B$ (A is r.e. in B) $\stackrel{def}{=} \exists a [A \uparrow^{[a]} B]$.

D.7. (i) $A \leq_T^{[a, b]} B \stackrel{def}{=} A \uparrow^{[a]} B \wedge \neg A \uparrow^{[b]} B$.

(ii) $A \leq_T B$ (A is recursive in B)

$\equiv \exists a \exists b [A \leq_T^{[a, b]} B]$.

§3. partial recursive functions & uniformization of recursively enumerable classes.

RBG の中では r.e. class の uniformization principle を証明できる。これを可能にするために $V=L$ を公理として付加する。

T.8. $RC(R) \wedge RC(S) \wedge RC(J) \wedge RC(F) \wedge RC(Od) \wedge RC(K_i) \ i=1,2$. (R, S, J, F, K_i, Od は Gödel の monograph の通り).

証略.

D.8. $\langle xy \rangle \in \prec (\equiv x \prec y) \stackrel{\text{def}}{=} Od'x < Od'y$.

T.9. $RC(\prec) \wedge \prec$ is a well ordering of V .

T.10. (Uniformization principle).

(i) $RE(A) \supset \exists B [PRF(B) \wedge B \subseteq A \wedge \mathcal{O}(B) = \mathcal{O}(A)]$.

(ii) $\exists W' [RE(W') \wedge \forall e [W_e' \subseteq W_e \wedge Un(W_e') \wedge \mathcal{O}(W_e') = \mathcal{O}(W_e)]]$

証明. $Q \stackrel{\text{ind}}{=} \{ \langle \langle 0a \rangle 0x \rangle \mid x \in a \}$

$\cup \{ \langle \langle 1, 0 \rangle, 0, \langle xy \rangle \rangle \mid x \in y \}$

$\cup \{ \langle \langle 1, 1 \rangle, 0, \langle xy \rangle \rangle \mid x \notin y \}$

$\cup \{ \langle \langle 2ab \rangle, \langle uv \rangle, x \rangle \mid \langle aux \rangle \in Q \wedge \langle bvx \rangle \in Q \}$

$\cup \{ \langle \langle 3ab \rangle, u, x \rangle \mid \langle aux \rangle \in Q \vee \langle bux \rangle \in Q \}$

$\cup \{ \langle \langle 4a \rangle, z, \langle xy \rangle \rangle \mid \forall t \in x \exists s \in z [\langle as \langle ty \rangle \rangle \in Q] \}$

$\cup \{ \langle \langle 5a \rangle, z, x \rangle \mid \exists u \in z \exists y \in z [\langle au \langle yx \rangle \rangle \in Q] \}$

$\cup \{ \langle \langle 6a \rangle, z, \langle xy \rangle \rangle \mid \langle azy \rangle \in Q \}$

$\cup \{ \langle \langle 7a \rangle, z, \langle xy \rangle \rangle \mid \langle a, z \langle yx \rangle \rangle \in Q \}$

$\cup \{ \langle \langle 8a \rangle, u, \langle xyz \rangle \rangle \mid \langle a, u, \langle xzy \rangle \rangle \in Q \}$

$\cup \{ \langle \langle 9a \rangle, u, \langle xyz \rangle \rangle \mid \langle a, u, \langle yzx \rangle \rangle \in Q \},$

と定義すれば明らか:

$$\forall e [RC(Q_e) \wedge W_e = \mathcal{O}(Q_e)].$$

よって

$$W' = \{ \langle e(xy) \rangle \mid \exists z [\langle ezxy \rangle \in Q \wedge \forall t \forall s [\langle ts \rangle \prec \langle zx \rangle \rightarrow \langle xz \rangle \prec \langle st \rangle]] \}$$

$\{ \langle e t \Delta y \rangle \notin Q \} \}$ と定義すればよい。定義の中の formula は $\exists z \exists u [\langle e z x y \rangle \in Q \wedge \forall t \in u \forall \Delta \in u [\langle t \Delta \rangle \in \langle z x \rangle$
 $\{ \langle e t \Delta y \rangle \notin Q \} \}$ と同値であるから W' は r.e. である。

この W' が (ii) を満たすことの証明は略す。

$$D. 9. (i) \{e\}(x) \simeq z \equiv \langle e z x \rangle \in W',$$

$$(ii) \{e\}(x_1, \dots, x_n) \simeq z \equiv \langle e z x_1 \dots x_n \rangle \in W'.$$

T. 11. (Enumeration Theorem).

$\lambda x \{e\}(x)$ は partial recursive functions の enumeration である: pp 5

$$\forall X [PR\mathcal{F}(X) \supset \exists e [X = W_e' = \{ \langle z x \rangle \mid \{e\}(x) \simeq z \}]].$$

多変数の場合も同様。

T. 12. (s-m-n 定理)

$$\exists S_n^m [R\mathcal{F}_{m+n}(S_n^m) \wedge \forall x_1 \dots \forall x_m \forall y_1 \dots \forall y_n \forall e \\ [\{e\}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \simeq \{ S_n^m! \langle e x_1 \dots x_m \rangle \}(y_1, \dots, y_n)]]$$

T. 13. (Strong recursion theorem).

$$\forall X [PR\mathcal{F}_{n+1}(X) \supset \exists e \forall x_1 \dots \forall x_n [\{e\}(x_1, \dots, x_n) \\ \simeq X' \langle e x_1 \dots x_n \rangle]].$$

これらの帰納関数論の基本定理の一般化により、帰納関数論が形式的に発展できる。しかし例えは $\Delta_1' = HA$ のような hierarchy の高い理論は、一般に成り立たない。

参考文献

[1] S. Kripke, Transfinite Recursion, Constructible sets and Analogues of cardinals preprint for 1967 UCLA Summer Institute for set theory.

[2] M. Takahashi, An Induction Principle in set theory I, to appear in Yokohama Mathematical Journal.