

定数係数線型偏微分方程式の

解の孤立特異点について

東大 理 金子 見

§ 0. 序

定数係数偏微分方程式論の一つの問題として齊次方程式の解の接続がある。以下 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{O}$, β , $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'$ (順に: 実解析函数, hyperfunction, C^∞ 函数, distribution の芽の層) のどれかを表わすこととし, 単独偏微分方程式 $P(D)u=0$ の解層を $\mathcal{F}_P$ で表わす。さて, $U \supset V$ を二つの開集合とし, Γ で層の切断を表わすとき, $\Gamma(V, \mathcal{F}_P) / \Gamma(U, \mathcal{F}_P) = ?$ 即ち V 上の解のうちどの程度のものが U 上の解と接続できるか? これが接続問題の最も手頃な定式化であり, これからやるのはそのごく特殊な場合に対する答である。

U として, 原点の開近傍, $V = U \setminus \{0\}$ をとる。このとき $\Gamma(U \setminus \{0\}, \mathcal{F}_P) / \Gamma(U, \mathcal{F}_P)$ は, 原点に除去不可能な孤立特異点を持つ Γ -解がどのくらいあるかを表わす。 $\mathcal{F} = \mathcal{O}, \beta$ に対しては任意の $p \neq 0$ に対しこれは 0 より多い。 $\mathcal{D}'$ に関しては Grusin [1]

が Fourier 変換を局所的にし Γ ものを用いてこのことを示した。
 B の場合は次のように簡単に示される。まず層の完全列

$0 \rightarrow B_p \rightarrow B \xrightarrow{P} B \rightarrow 0$ から cohomology の完全列

$$0 \rightarrow \Gamma(U, B_p) \rightarrow \Gamma(U, B) \xrightarrow{P} \Gamma(U, B) \rightarrow H^1(U, B_p) \rightarrow H^1(U, B) \parallel 0$$

$$0 \rightarrow \Gamma_{\{0\}}(U, B_p) \rightarrow \Gamma_{\{0\}}(U, B) \xrightarrow{P} \Gamma_{\{0\}}(U, B) \rightarrow H^1_{\{0\}}(U, B_p) \rightarrow H^1_{\{0\}}(U, B) \parallel 0$$

さらに層 B_p に対する relative cohomology の完全列

$$0 \rightarrow \Gamma_{\{0\}}(U, B_p) \rightarrow \Gamma(U, B_p) \rightarrow \Gamma(U \setminus \{0\}, B_p) \rightarrow H^1_{\{0\}}(U, B_p) \rightarrow H^1(U, B_p) \parallel 0$$

を得る。また B に対し大域存在定理が成り立つから第一の列から $H^1(U, B_p) = 0$ 故に第二、第三の列とあわせて

$$\Gamma(U \setminus \{0\}, B_p) / \Gamma(U, B_p) \cong H^1_{\{0\}}(U, B_p) \cong B_{\{0\}} / p B_{\{0\}}$$

を得る。ここに $B_{\{0\}}$ は原点に台をもつ hyperfunction である。
 これより、上のものが $p \neq 0$ なる限り 0 でないこと、及び $U \setminus U_0$ と U_0 の Γ による分解がわかる。

この理由により $\mathcal{F} = \mathcal{D}'$, B に対する接続問題は system 1 にしない限り意味がない。これに反して $\mathcal{F} = \mathcal{D}$, ε のとき 1 にはある種の $p \neq 0$ に対して上の商空間が 0 になる。即ち $U \setminus \{0\}$ に於ける解が一斉に原点まで解としてあいってしまうという場合が起こる。
 $\Gamma(U \setminus \{0\}, \varepsilon_p) / \Gamma(U, \varepsilon_p) \neq 0$ なる p を決定する試みは Grušin [1]

によって与えられた。そこでこのように Γ に対して相当良い必要条件と十分条件が与えられ Γ がまだ完全な答ではない。一方 Grusin [2] は $\Gamma(U, \mathcal{O}, \varepsilon_p) \cap \Gamma(U, \mathcal{O}') / \Gamma(U, \varepsilon_p) \neq 0$ なる Γ を決定することができた。これは Γ が hypoelliptic な因子を含むという条件で与えられる。Grusin が扱った二つの問題の困難さの本質的な違いは前者に於ては $\Gamma(U, \mathcal{O}, \varepsilon_p)$ の元を一般には $\Gamma(U, \mathcal{O})$ の元とみることができないのに対し、後者では初めから $\Gamma(U, \mathcal{O})$ の元に限っているため、すべての議論が代数的に円滑にゆくところにある。

さて、 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}'$ と違い flabby な層であり、 $\Gamma(U, \mathcal{O}, \sigma_p)$ の元は常に $\Gamma(U, \mathcal{B})$ の元とみなせる。このことに注意して Grusin [2] の方法を適当な修正のもとに翻訳すると、本報告の主題である次の定理を得る。

定理 $\Gamma(U, \mathcal{O}, \sigma_p) / \Gamma(U, \sigma_p) \neq 0$ なる Γ には Γ が elliptic な因子をもつことが必要十分である。

§ 1 定理の証明

最初に $\mathcal{O}_U = \Gamma(U, \mathcal{O}, \sigma_p) / \Gamma(U, \sigma_p)$ は U に依らぬことに注意する。この証明はまわり道になるので次節に与えることとし、以下 U を固定して考える。

定義 1. $u \in \Gamma(U, \mathcal{B}) = \mathcal{B}(U)$ が原点に除去不可能な孤立解析特異点をもつ $T: \mathcal{P}(\mathcal{D})u = 0$ の解であるとは、

$u \in \Gamma(U \setminus \{0\}, \sigma_p) = \sigma_p(U \setminus \{0\})$ かつ原点でどのように修

正しても $u \notin \Gamma(U, \sigma_p) = \sigma_p(U)$ なることである

ここで $u \notin \sigma_p(U)$ なる条件は $u \notin \sigma(U)$ とも $u \notin \beta_p(U)$ とも言い換えられる。前者が同値なことは明だが後者の言い換えは次の事実による

命題 1, $u \in \beta_p(U)$ が $u \in \sigma(U \setminus K)$, $K \subset U$ ならば

$u \in \sigma_p(U)$ である

この証明も次節で与える。同様に次のことも成り立つ。

命題 2, $\Gamma_K(U, \beta_p) = 0$ (即ちコンパクトな台をもつ解は 0 に限る)

次に Grušin [2] について

定義 2, Q は一般に local operator とする。 P が Q -elliptic とは $Q \cdot \beta_p \subset \sigma$ なることとする

定義 3, $P(D)E = Q(D)\delta$ の解 (一般に hyperfunction の中に存在する) を P の Q -基本解という。

補題 3, P が Q -elliptic である場合には, P の Q -基本解で原点以外で解析的なものが存在することが必要且十分である。

証明 P が Q -elliptic とせよ。 P の基本解に対し $E = Q(D)F$ とおけば, E は原点以外で解析的な P の Q -基本解となる。
逆に $P(D)E = Q(D)\delta$ の解 E は原点以外で解析的とせよ。

$P(D)u=0$ の原点の近傍 V に於ける解 u をとり, V の外へは 0 で拡張したものを u_1 とする (∂V 上にはあいまいさがあるが以下の議論に影響しない) E を V に比して十分大きな球 W で切り取ったものを E_1 と書く. 原点の十分近くで

$$Q(D)u = Q(D)u_1 = Q(D)u_1 * \delta = u_1 * Q(D)\delta = u_1 * P(D)E_1 - u * w$$

ここに $\text{supp } w \subset \partial W$ であって第二項は原点付近で 0, 第一項については $\text{supp } P(D)u_1 \subset \partial V$ が原点の外にあるから E_1 の原点の近傍を 0 に修正したものを E_2 と書けば, 原点の十分近くで

$$u_1 * P(D)E_1 = P(D)u_1 * E_1 = P(D)u_1 * E_2$$

は解析的である g.e.d

以上上の証明から 補題 3 に於ける E は原点の近傍だけに存在すれば十分であることを注意しておく

補題 4 P が既約で $P+Q$ ならば $QB_p = B_p$

この証明には system の存在定理が必要であるが今のところ local operator の system に対しては定式化さえはあまりしてないの次節でこの特別な場合に対して存在定理の証明を与える.

補題 5, P が Q -elliptic である為には, $P = P_1 \cdot R$,

$Q = Q_1 \cdot R$, P_1 は elliptic, と分解されることが必要且十分である

証明 表記の分解を仮定すると, $P(D)u=0$ の任意の解 u に対し, $P(D)u=P_1(D) \cdot R(D)u=0$, P_1 は elliptic より $R(D)u$ は解析的, 故に $Q(D)u=Q_1(D)R(D)u$ も解析的である. 逆に P を Q -elliptic とせよ. すると P が既約なとき $P|Q$, 又は $P \nmid Q$ の場合は補題 4 により, $B_p = Q B_p \subset \mathcal{O}$, 即ち P は elliptic となる. 一般の P に対し P はその一つの既約因子を P_1 とし $P=P_1 \cdot P_2$ とおく. 上の議論により P_1 は elliptic 又は $P_1|Q$ 前者の場合は問題ない. 後者の場合には $Q=P_1 Q_1$ とおけば P_2 が Q_1 -elliptic なことが次のようにして示される: E を P の Q -基本解で原点以外では解析的なものとせよ. $P(D)E=Q(D)\delta$ より $P_1(D)(P_2(D)E-Q_1(D)\delta)=0$ を得るが $P_2(D)E-Q_1\delta$ は原点以外では解析的だから命題 1 により全空間で解析的な函数 f を表わす. f をコンパクト凸集合 K に制限したものを f_1 とし $P_2(D)F=f_1$ の $\mathcal{O}(K)$ に於ける解 F をとれば $E'=E-F$ は K 上 $P_2(D)E'=Q_1(D)\delta$ をみたし, $K \setminus \{0\}$ で解析的である. 故に補題 3 (証明の後の注意) により P_2 は Q_1 -elliptic となる. この手続きを繰返せばよい. f.e.d.

補題 6 P が除去不可能な孤立解析特異点を伴う T -解をもつ為には, P が Q -elliptic 且つ $P \nmid Q$ なる Q が存在することが必要且十分である

証明 u を原点に孤立解析特異点をもつ T - $P(D)u=0$ の解

とせよ. $P(D)u$ は原点のみに support をもつ hyperfunction である. 従って, そのような hyperfunction の構造定理により infraexponential function $Q(z)$ が存在して $P(D)u = Q(D)\delta$ とかける. 故に u は P の解析的な Q -基本解 T から補題 3 により P は Q -elliptic である. $P \nmid Q$ なることは次のようにしてわかる: $Q = P \cdot R$ と書かれ $T :=$ とすると, $P(D)u = Q(D)\delta$ より $P(D)(u - R(D)\delta) = 0$, 即ち $u - R(D)\delta$ は $P(D)u = 0$ の解である. しかも原点以外では解析的 T から, 命題 1 により $u - R(D)\delta$ なる u の修正は原点まで込め $T: P(D)u = 0$ の解析的な解となる. これは u が孤立解析特異点をもっていたことに矛盾する. 逆に Q を補題が主張するものとし, E を原点以外で解析的な P の Q -基本解とすれば E は原点を孤立解析特異点とする P の解である. 原点が真に除去不可能であることはもしも E の修正 E_1 で, 原点まで込めて解であるようなものが存在し $T :=$ とすると, $E - E_1$ は原点のみに support を有し, 従って $E - E_1 = R(D)\delta$ と書ける

$$P(D)R(D)\delta = P(D)(E - E_1) = P(D)E = Q(D)\delta$$

$$\therefore P \cdot R = Q$$

となつて矛盾を生ずるからである.

以上をもとに定理の証明は次のようになる.

P が除去不可能な孤立解析特異点をもつ

□.

補題 6, $\exists Q, P$ は Q -elliptic で $P \nmid Q$

補題 5, $\exists Q, P = P_1 \cdot R$ しかも $P \nmid Q$ より $P_1 (\neq 1)$ は elliptic
 $Q = Q_1 \cdot R$

$\Leftrightarrow P$ は elliptic な因子をもつ g.e.d.

注意. 楕円型作用素は原点まで $\mathcal{D}'$ の元として η が必要とする孤立解析特異点を伴う解を持つから (例えば $\mathcal{D}'$ に於ける基本解がそれ) $\Gamma(U \setminus \{0\}, \sigma_p) / \Gamma(U, \sigma_p) \neq 0$ と $\Gamma(U \setminus \{0\}, \sigma_p) \cap \Gamma(U, \mathcal{D}') / \Gamma(U, \sigma_p) \neq 0$ とは同値である. これは C^∞ の場合と比べて著しい違いである. (C^∞ の場合 hypoellipticity は $\Gamma(U \setminus \{0\}, C_p^\infty) / \Gamma(U, C_p^\infty) \neq 0$ の必要条件とならぬことが知られている)

§2 $\mathcal{D}$ に於ける定数係数偏微分方程式の若干の結果.

証明の残り

まず最初に $\mathfrak{D}_U = \Gamma(U \setminus \{0\}, \sigma_p) / \Gamma(U, \sigma_p)$ が U に依らぬことを示そう. これは存在定理から出るが, $\mathcal{D}$ の場合はコンパクト凸集合についてしか知られていないので, ちょっと面倒である. U を 0 の任意の開近傍 V を 0 を含む十分小さい任意の凸開近傍として $\mathfrak{D}_U \cong \mathfrak{D}_V$ を示せばよい. 凸コンパクト集合 L, K を $L \supset U \supset K \supset V$ なるようにとる. $\mathfrak{D}_L \subset \mathfrak{D}_U \subset \mathfrak{D}_K \subset \mathfrak{D}_V$ は明であるが, 完全列

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \Gamma(K, \sigma_p) & \rightarrow & \Gamma(K - \{0\}, \sigma_p) & \rightarrow & H'_{\{0\}}(K, \sigma_p) \rightarrow H'(K, \sigma_p) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{SII} \quad \downarrow \\
0 & \rightarrow & \Gamma(V, \sigma_p) & \rightarrow & \Gamma(V - \{0\}, \sigma_p) & \rightarrow & H'_{\{0\}}(V, \sigma_p) \rightarrow H'(V, \sigma_p)
\end{array}$$

(ここに $H'_{\{0\}}(K, \sigma_p) \cong H'_{\{0\}}(V, \sigma_p)$ は excision theorem,
 $H'(K, \sigma_p) = 0$ は存在定理による) より $\Phi_K \cong \Phi_V$ 同様に
 $\Phi_L \cong \Phi_V$ も成り立つから $\Phi_U \cong \Phi_V$ が示される.

次に命題1の証明に移る. まず

補題7 $u \in \mathcal{B}_p(U)$ が $u \in \mathcal{E}(U-K)$, $K \ll U$ ならば実は

$u \in \mathcal{E}_p(U)$ さらに P と U 1-のみ依存する正整数 m 及

正数 C が存在して $\sup_{K \text{ の近傍}} |D^k u| \leq C \sup |D^{k+m}(P(D)u)|$

証明 K の近傍で 1 である $\alpha \in C_0^\infty(U)$ をとると, K の近傍
 で (E を P の δ に於ける基本解 として)

$$u = \alpha u = \alpha u * \delta = \alpha u * P(D)E = P(D)\alpha u * E$$

ここで $P(D)\alpha u$ は仮定より C_0^∞ である. 故に $u = \alpha u$ は K の近
 傍でも C^∞ . 同様に $E = \Delta^N F$, F は局所可積分函数と表わ
 せば K の近傍で $u = \Delta^N P(D)(\alpha u) * F$ 故に $C = \int_{2U} |F| dx$
 とおいて表記の評価を得る.

補題8 $\alpha(x)$ とし $x \leq 0$ で $\equiv 0$, $x \geq 1$ で $\equiv 1$ なる $C^\infty(\mathbb{R})$

の函数の範囲で考えるとき, 各 k に対し

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |D^l \alpha| \leq 25^k l^l, \quad l \leq k \quad \text{をみたす } \alpha = \alpha_k \text{ が存在する.}$$

証明
$$f(x) = \frac{\int_0^x x^k (1-x)^k dx}{\int_0^1 x^k (1-x)^k dx} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

に対し計算により $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f^{(l)}(x)| < 2^k l^k$ が示される
この $f(x)$ を適当な C^∞ 函数で C^k に於て近似すれば求める d_k を得る

命題 1 の証明 まず補題 7 により U は U 全体で C^∞ である。
 K の近傍に於ける α の微分係数評価は同じ補題に示された
不等式で与えられるが、ここで α は $C_0^\infty(U)$ かつ K の近傍で
1 なら何でもよいことに注意し、そのような α について
下限をとれば Taylor 展開が正の収束半径をもつような評価
が得られることを見る。補題 8 が示す函数を各座標につい
て作ってかけ合わせ、それを適当に回転したもので locally
finite に K を覆い、それらのすべてを掛け合わせたものを
 α として採り補題 7 の評価に使用はよい。 q.e.d.

次は存在定理の証明である まず

命題 9. infraexponential function $Q(\xi)$, 凸コンパクト

集合 K , $\varepsilon > 0$ に対しそれらのみで定まる $C_\varepsilon > 0$ が

$$\sup |f(\xi) e^{-H_K(\xi)}| \leq C_\varepsilon \sup |Q(\xi) f(\xi) e^{-H_K(\xi) + \varepsilon |\xi|}|$$

が成り立つ。ここに H_K は K の supporting function

である

が位数の理論を使って証明できる (詳細は略) これより特に

系10. 複素凸開集合 Ω に対し, Z_Ω を $\text{type} < H_\Omega(-i\zeta)$ の
指数型整函数の空間とすると $Q(\zeta): Z_\Omega \rightarrow Z_\Omega$ は
閉値域をもつ. 特に $Q(D)\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$

系11. 開集合 U に対し $Q(D)\mathcal{B}(U) = \mathcal{B}(U)$

が得られる. これらの推論の仕方はいし松[3] p.217 と同様

補題4の証明 複素凸開集合 Ω に対し $Q(D)\mathcal{O}_p(\Omega) = \mathcal{O}_p(\Omega)$
を示せば十分である.

$$Q(D)\mathcal{O}_p(\Omega) = \mathcal{O}_p(\Omega) \Leftrightarrow (\mathcal{O}_p(\Omega))' \xleftarrow{Q(D)} (\mathcal{O}_p(\Omega))' \leftarrow 0 \text{ 完全, 閉値域}$$

$$\parallel$$

$$(\mathcal{O}(\Omega))' / p(\mathcal{O}(\Omega))' \quad (\mathcal{O}(\Omega))' / p(\mathcal{O}(\Omega))'$$

これらの演算は $\mathcal{O}(\Omega)$ が FS 空間だから正当である.

Fourier 変換して $\Leftrightarrow Z_\Omega / p(\zeta) \cdot Z_\Omega \xleftarrow{Q(\zeta)} Z_\Omega / p(\zeta) \cdot Z_\Omega \leftarrow 0$
ここで Q が閉値域なこと系10でよい. 完全, 閉値域

故に Q が injective なることを言えばよいがこれは次の補題
から従う (命題9があるから整函数の範囲で割ればよい)

補題12 P は既約多項式, Q, F, G は整函数とし $PF = QG$
かつ $P \nmid Q$ ならば $P \mid G, Q \mid F$.

証明 (1) 1変数のときは明である. 2変数以上のとき
 $P(z) = P(z_1, z') = z_1^m + \dots$ を仮定し $P = \prod_{i=1}^m (z_1 - \lambda_i(z'))$ と書く,
 P 既約より判別式 $\Delta(z') \neq 0$. $\Delta = \{\Delta(z') = 0\}$ の外部(連結)
で $\lambda_i(z')$ は正則(多価)で相異なる. $P \nmid Q$ より $Q(\lambda_i(z'), z') \neq 0$
なる i が存在することが特異点の除去定理によりわかる

(2) 実は注意の i について $Q(\lambda_i(z), z') \neq 0$ されれば可べつ
 の $\lambda_i(z')$ が $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \Delta$ で互いに入れ替わることを見ればよい。
 もしも互いに非可遷な n 個の組に分かれらるとすると $P(z, z')$
 は z の多項式として z' の整函数を係数として因数分解され
 るがこれら n 係数は高次の多項式程度の増大度をもち、従っ
 て Liouville の定理により z' の真の多項式である。故に $P(z)$
 は多項式として分解されることがになり不合理。

(3) 以上により $\{P(z)=0\} \cap \{\prod_{i=1}^m Q(\lambda_i(z'), z')=0\}$ の外では
 G/P は割り切れず正則函数を表わす。故に Hartogs の定理
 により G/P は整函数である。

系 14. P, Q の仮定は補題 4 と同じとする $\begin{cases} P(D)u = f \\ Q(D)u = g \end{cases}$ は

$Q(D)f - P(D)g = 0$ のとき可解である。

証明 $P(D)u_1 = f$ なる u_1 をとり $w = u - u_1$ とおけば補題 4
 に帰着される。

文献

- [1] V. V. Grušin. On solutions with isolated singularities for
 partial differential equations with constant
 coefficients Trans. Moskow Math. Soc. 1966 pp. 295-315
- [2] V. V. Grušin On the Q -hypoelliptic equations (in Russian)
 Mat. Sb. 1962 57-2 p.p. 233-240
- [3] 小松彦三郎 佐藤超函数と定数係数線型偏微分方程式 東大セミナー 22
- [4] S. Lang Diophantine Geometry, Interscience 1962
 12.