

GD デザイン について

広島大・学校教育 景山 三平
廿日市高校 田中 立造

"目的" Group Divisible 型の PRIBD (略して GD) のいくつかの新しい系列と, 既知の GD に対する新しい non-isomorphic solution を与える。

"定義と準備"

GD $(v, b, r, k, m, n, \lambda_1, \lambda_2)$ は $v = mn$ 個の処理の間に 2-associate association scheme (group divisible association scheme = m groups of n treatments each) をもつ PRIBD $\alpha = \{ \alpha_{ij} \}$ と α の incidence matrix $N_{n \times b}$ は次をみたす:

$$NN' = \begin{bmatrix} A & B & \cdots & B \\ B & A & & \\ \vdots & & \ddots & \\ B & \cdots & B & A \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} r & r & \lambda_1 \\ & \ddots & \\ \lambda_1 & & r \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_m \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_m$

λ_1 個のブロックが同時に生起する処理は 1st associates であり、 λ_2 個のブロックが同時に生起する処理は 2nd associates であり、 $\lambda_1 = \lambda_2$ のときは BIBD になる。GDD は 次の 3つの場合に分けられる：

- Singular GDD $\Leftrightarrow r - \lambda_1 = 0$
- Semi-regular GDD $\Leftrightarrow r - \lambda_1 > 0, rk - v\lambda_2 = 0$
- regular GDD $\Leftrightarrow r - \lambda_1 > 0, rk - v\lambda_2 > 0$

GDD の存在が知られている。最近 Bush (1979) は $\lambda_1 = 2$ の GDD を用いて $\lambda_1 = 2$ の GDD の族を構成した。本書では Bush の方法を一般化することにより新しい GDD の族を与え、更に新しい non-isomorphic 解の発見へと導く。

"導出"

J は適当な大きさの行列で要素が ± 1 のもの。 $A = (a_{ij})$ に対して $A \otimes B = (a_{ij}B)$ と定義する。 m 次の $\lambda_1 = 2$ の GDD $H_m = (h_{ij}) \Leftrightarrow h_{ij} = \pm 1, H_m H_m' = mI$ 。

以下 5つの構成法を示すことができる。

構成法 I

A は a normalized H_{4f} whose first row is deleted とする.

B は a normalized H_{4t} whose first column is deleted とする. $\therefore a \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{2}\{J + A \otimes B\}$ ($=K$ とおく) は semi-regular

GDD ($v=4t(4f-1)$, $b=4f(4t-1)$, $r=2f(4t-1)$,
 $k=2t(4f-1)$, $m=4f-1$, $m=4t$, $\lambda_1=f(4t-2)$,
 $\lambda_2=f(4t-1)$) とする。

$\therefore \psi$ は KK' を計算する v 列を列挙できる。なお association は 最初の $4t$, 次の $4t$, ..., 最後の $4t$ にある t 個の 1st associates と決まる。

(注意) $\circ K'$ も semi-regular GDD とする $\forall a \in \mathbb{Z}$ x -
 y は 上記で t と f を交換したものである。

$\circ f=1$ と $t=1$ のとき $\forall \psi, \psi'$ Bush (1979) の定理 1 と 定理 2 に対応する。

構成法 II

N は BIBD ($v^*=2k^*$, b^* , r^* , k^* , λ^*) の incidence

matrix とするときは

$\begin{bmatrix} N & N \\ N & J-N \end{bmatrix}$ は semi-regular GDD ($v=2v^*$,
 $b=2b^*$, $r=2r^*$, $k=2k^*$, $m=2$, $m=v^*$, $\lambda_1=2\lambda^*$,
 $\lambda_2=r^*$) である。

π は最初 v^* , 次に v^* を $\psi_1 \psi_1^{-1}$ group と見れば
 $\lambda_1 = \lambda^* + (b^* - 2r^* + \lambda^*) = 2\lambda^*$, $\lambda_2 = \lambda^* + (r^* - \lambda^*)$
 $= r^*$ により 明かになる。

(構成法 II の応用)

H_{4t} が存在すれば BIBD ($v^*=2t$, $b^*=4t-2$, $r^*=2t-1$,
 $k^*=t$, $\lambda^*=t-1$) が存在するから [cf. Hedayat and
Wallis (1978)], 今この構成法より semi-regular GDD ($v=4t$,
 $b=8t-4$, $r=4t-2$, $k=2t$, $m=2$, $m=2t$,
 $\lambda_1=2t-2$, $\lambda_2=2t-1$) が存在する。これは Bush (1979)
の定理 5 の場合である。

$v^*=2k^*$ なる BIBD は存在し得るから, 既に
Preece (1967) は $r^* \leq 15$ の範囲で 61 個の BIBD を
 ψ_1 の non-isomorphic solutions も含む 2 通りを
示す。これを今この構成法に適用すれば 多く新しい

non-isomorphic semi-regular GDD を与えることができる。

構成法 III

N を BIBD $(v^*, b^* = 3r^* - 2\lambda^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ の incidence matrix とするとき、次の条件をみたす semi-regular GDD $(v = 2m, b = 4(r^* - \lambda^*), r = 2(r^* - \lambda^*), k = m, m = m, m = 2, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = r^* - \lambda^*)$ が $1 \leq m \leq v^*$ 对して任意の m で存在する。まず " N が任意の m に対して $v^* - m$ の中で 1 を $\binom{1}{0}$ で 0 を $\binom{0}{1}$ で置き換えて、更に元の BIBD N に $v^* - 1$ が存在する列を付け加えたのと同じ操作を繰り返す"。このとき association は最初 2 つ、次の 2 つ、...、最後の 2 つ を $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{v^*}$ と associates の group を見出し終る。

このとき 1° の $X - S$ は $v = 2m, b = b^* + 0, k = m,$

$$r = \begin{cases} r^* + 0 \\ b^* - r^* \end{cases}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \begin{cases} r^* + \lambda^* \\ r^* - \lambda^* \\ b^* - 2r^* + \lambda^* \end{cases}$$

であり $\lambda = b^* - 2r^*, b^* = 3r^* - 2\lambda^*$ とすれば 1° の $X - S$ は valid になる。

(構成法 III の応用)

$4t+1$ が素数または素数の a 倍 $\text{BIBD}(v^*=4t+1, b^*=8t+2, r^*=4t, k^*=2t, \lambda^*=2t-1)$ が存在する [cf. Raghav Rao (1971)]
 a2" 今 α 構成法より semi-regular GDD $(v=2m, b=4(2t+1), r=2(2t+1), k=m, \lambda_1=0, \lambda_2=2t+1, 1 \leq m \leq 4t+1)$ が存在する. $\therefore \psi$ は $\subset \alpha$ かつ $\parallel$ non-isomorphic 解を与える. $t=1$ のとき

(I) GDD $(v=2m, b=12, r=6, k=m, \lambda_1=0, \lambda_2=3, 1 \leq m \leq 5)$
 $t=2$ のとき

(II) GDD $(v=2m, b=20, r=10, k=m, \lambda_1=0, \lambda_2=5, 1 \leq m \leq 9)$
 因子 series が分解する. 特には (I) 2" $m=5$, (II) 2" $m=5, 6, 7, 8, 9$ のとき ψ は ψ かつ $\parallel$ non-isomorphic 解を与える. ψ は Clatworthy (1973) の結果 2" である. SR55, SR70, SR83, SR93, SR101 である.
 (SR53,

H_{4t} が存在 $\Leftrightarrow \text{SBIBD}(v^*=b^*=4t-1, r^*=k^*=2t-1, \lambda^*=t-1)$
 より α 構成法を用いて semi-regular GDD $(v=2m, b=4t, r=2t, k=m, m=m, m=2, \lambda_1=0, \lambda_2=t)$ が存在 $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4t-1$ である. $\therefore \psi$ は Bush (1979) の定理 6 である. $\forall m=2t$ とおくと symmetric semi-regular GDD を与える.

H_{4t} が存在すれば $H_{(4t)^2}$ も存在する. α 構成法

より semi-regular GDD $(v=2m, b=16t^2, r=8t^2, k=m, \lambda_1=0, \lambda_2=4t^2, m=m, n=2)$ かつ $1 \leq m \leq 16t^2-1$ に対して存在する。Bush (1980) は $m=16t^2-1$ であることを証明している。

構成法 IV

A は a normalized H_{4t} whose first row and first column are deleted である。

B は regular H_{4f^2} である。 $f \geq 2$ である。

$\frac{1}{2} \{ J + B \otimes A \}$ は regular GDD

$(v=b=4f^2(4t-1), r=k=f[2f(4t-1)]^{\frac{f-1}{2}})$,

$\lambda_1=f[(4t-2)f-1], \lambda_2=f[(4t-1)f-1], m=4f^2, n=4t-1)$ である。

この構成法 I であると同様に regular H_{4f^2} の存在を用いて示される。

$f=1$ である Bush (1979) の定理 4 である。

"定義" SBIID $(v=4t-1, k=2t-1, \lambda=t-1)$ N かつ skew $\leftrightarrow N+N' = J-I$.

構成法Ⅱ

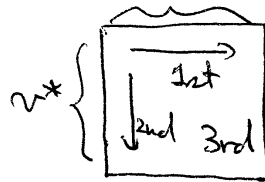
N は skew-SBIBD である。

M は BIBD $(n^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ である。 $\therefore$ 必要

$$M \otimes N + (J - I) \otimes I \quad (=T \text{ とおく})$$

は rectangular association scheme である 3-associate PBIBD である。 $\therefore$ N の $X - S$ は $v = v^*(4t-1)$, $k = v^* + 2k^*(t-1)$, $b = b^*(4t-1)$, $r = b^* + 2r^*(t-1)$, $\lambda_1 = r^*(t-1)$, $\lambda_2 = b^* - 2r^* + 2\lambda^*t$, $\lambda_3 = r^* + \lambda^*(t-2)$ である。

association scheme は $4t-1$



である。 $\therefore$ 必要 T, T' は N の skewness と N , M の balanced property を用いて計算する必要がある。

(構成法Ⅱの応用)

M は (2 BIBD $(v^*=b^*=3, r^*=k^*=1, \lambda^*=0)$ を取り出す)

次の $\lambda \in A^t$ について: 『skew-SBIBD が存在しない symmetric regular GDD ($v=b=3(4t-1)$, $r=k=2t+1$, $\lambda_1=t-1$, $\lambda_2=1$) が存在する』。これは Bush (1979) の定理 7.4 のことである。

最後に構成法 II で作られた 3-associate PBIBD の reduction を考えよう。GDD を作ることもできる。3-associate reduction の可能性がある。

① $\lambda_1 = \lambda_2$ (1st associate class と 2nd associate class の combine): この場合は 1-associate design 1-reducible ではない。10.5 X-の構成を用いて 2-associate の BIBD の存在性を示す。

② $\lambda_2 = \lambda_3$: この場合は GD 1-reducible ではない。この 2 つに属するものを示す。

(i) semi-regular GDD ($v=b=9$, $r=k=3$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$)

(ii) semi-regular GDD ($v=12$, $b=18$, $r=6$, $k=4$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$)

これら 2 つ共に存在しない。

(注意) (i), (ii) の $t=1$ であり、skew-SBIBD

($v'=b'=3$, $r'=k'=1$, $\lambda'=0$) は $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ として存在する。

③ $\lambda_1 = \lambda_3$: $\lambda = 2$ と $t = 2$ である。更に skew-SBIBD $(v=b=7, r=k=3, \lambda=1)$ も存在する

			1			1
1				1		1
1	1				1	
		1	1			1
1		1	1			
	1		1	1		
		1		1	1	

association a combine は
~~11~~ 2nd association と
~~11~~ 1st association と

~~11~~ u , ~~11~~ 1st, 3rd association と ~~11~~ 2nd association と ~~11~~ 3rd association と ~~11~~ 4th association scheme である。 $\lambda, 2$ の場合 構成法 II を次で示す。

[構成法 II']

BIBD $(v^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$ が存在すれば

regular GDD $(v=7v^*, b=7b^*, r=b^*+2r^*, k=v^*+2k^*, \lambda_1=b^*-2r^*+4\lambda^*, \lambda_2=r^*, m=7, m=v^*)$ が存在する。

(~~11~~) original が symmetric BIBD であるならば symmetric regular GDD が作れる。
 λ は $\lambda < \lambda$ の series とする。

本書の参考文献等には 論文

S. Kogeyama and T. Tanaka

"Some families of group divisible designs"
(1981, Journal of Statistical Planning and Inference, to appear)

参照された。

参考文献

K.A. Bush (1979). Families of Hadamard group divisible designs. JSPJ 3, 387-394

K.A. Bush (1980). Construction of certain balanced and partially balanced incomplete block designs. Submitted.

W.H. Clatworthy (1973). Tables of Two-associate-class Partially Balanced Designs. NBS Applied Math. Ser. No. 63.

A. Hedayat and W.D. Wallis (1978). Hadamard matrices and their applications. Ann. Statist. 6, 1184-1238.

D.A. Preece (1967). Incomplete block designs with $N=2k$. Sankhyā 29, 305-316.

D. Raghavarao (1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*. John Wiley & Sons, Inc., New York.