

On inhomogeneous Diophantine approximation and inhomogeneous continued fraction expansion

マックオ-リー

Macquarie 大 小松 尚夫 (Takao Komatsu)

§1. Introduction

$$\mu(\theta, \phi) = \liminf_{|z| \rightarrow \infty} |z| \|z\theta - \phi\|$$

と置き、この値について考える。ここで、 θ は無理数、 ϕ は実数で、どんな整数 z についても、 $z\theta - \phi \notin \mathbb{Z}$ を満たすものとする。また、 $\|\cdot\|$ で $\cdot$ の最も近い整数からの距離を表す。この値を考える上で、次の2つの値を導入する。

$$\mu_+(\theta, \phi) = \liminf_{z \rightarrow +\infty} z \|z\theta - \phi\|,$$

$$\mu_-(\theta, \phi) = \liminf_{z \rightarrow -\infty} |z| \|z\theta - \phi\| = \liminf_{z \rightarrow +\infty} z \|z\theta + \phi\|.$$

すると、 $\mu(\theta, \phi) = \min(\mu_+(\theta, \phi), \mu_-(\theta, \phi))$ 。

$\mu_+(\theta, \phi)$ または $z \|z\theta - \phi\|$ に関する値の上からの評価については、1950年代までに多くの著者に取り上げられ進展してきた。斉次、非斉次 (ϕ が整数でない場合) それぞれについて代表的な結果を挙げると、

Hurwitz [斉次]

$$\exists \|\theta\| < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

を満たす整数 $p > 0$ が無限個存在する。

Cassels (1957) [非斉次]

$$\exists \|\theta - \phi\| < \frac{1}{4}$$

を満たす整数 p が無限個存在する。

Cassels (1954) [非斉次]

$$\mu_+(\theta, \phi) \leq \frac{4}{11}$$

しばらく最近数十年間、この問題についてほとんど大きい発展はなかった。ところが最近次の結果が発表された。

Cusick, Rockett and Szűsz (1994) [4]

$\theta = (1+\sqrt{5})/2 = [1, 1, 1, \dots]$ のとき、次のような無限列が得られる。

$$\delta_0 = \frac{1}{4\sqrt{5}} > \delta_1 = \frac{1}{5\sqrt{5}} > \delta_2 > \delta_3 > \dots$$

ここで、 $\delta_0 = \mu(\theta, \frac{1}{2})$, $\delta_1 = \mu(\theta, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $\phi \in S_k$ のとき、 $\delta_k = \mu(\theta, \phi)$ ($k \geq 0$), $\delta_n \rightarrow \frac{1}{2(5+\sqrt{5})}$ ($n \rightarrow \infty$)。

[注] Khinchin の結果 (1946, 詳細は後述) から、

$$\sup_{\phi} \mu(\theta, \phi) \leq \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

しかし、引用された $\mu(\theta, \phi)$ の値を与える計算の定理と、実際の δ_k の計算の間に gap があることが、一部で指摘されている。そこでまず、 $\mu(\theta, \phi)$ 特に $\mu_+(\theta, \phi)$ がどのように与えるか既知の諸結果、予想、新しい結果を与え、比較考察する。また $\mu_+(\theta, \phi)$ を考える上でもとになる、非斉次連分数展開、すなわち ϕ を θ の連分数展開と関連して表すこと、に関する諸結果も紹介する。最終的には、

$$\theta = [1, 1, 1, \dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

を一般化して、ある正整数 a についての

$$\theta = [a, a, a, \dots] = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

に関して Cusick, Rockett and Szűsz の結果が一般化できないかどうかアプローチを試みる。

§2. 非斉次連分数展開と $\mu(\theta, \phi)$ (または $\mu_+(\theta, \phi)$)

$\theta = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ の連分数展開を

$$\theta = a_0 + \theta_0, \quad a_0 = \lfloor \theta \rfloor,$$

$$\frac{1}{\theta_{n-1}} = a_n + \theta_n, \quad a_n = \left\lfloor \frac{1}{\theta_{n-1}} \right\rfloor \quad (n=1, 2, \dots)$$

によって表す。ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ は $\cdot$ の floor, $\cdot$ の整数部分とする。 θ の k 次近似は、 $p_k/q_k = [a_0, a_1, \dots, a_k]$ によ

、で定義され、

$$P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2} \quad (k=0, 1, \dots), \quad P_{-2}=0, \quad P_{-1}=1,$$

$$Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad (k=0, 1, \dots), \quad Q_{-2}=1, \quad Q_{-1}=0$$

を満たす。 $D_k = Q_k \theta - P_k$ とおくと、

$$D_k = (-1)^k \theta_0 \theta_1 \cdots \theta_k \quad (k=0, 1, \dots)$$

であり、 $(-1)^k D_k > 0$, $D_k = a_k D_{k-1} + D_{k-2} \quad (k=2, 3, \dots)$

を満たす。実数 ϕ を、一般性を失うことなく、 $0 < \phi < 1$ とする。

II Descombes のアルゴリズム [5] (cf. [3])

$p_n = x_n \theta - \phi - y_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ とおき、数列 $\{(x_n, y_n)\}$

を次のように定める。 $r_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{\theta_n} - \frac{p_n}{D_n} \right\rfloor \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ 。

$x_0=1, y_0=\lfloor \theta - \phi \rfloor$ で、まず Step ((A₀)) に進む。

((A_n)) (1) $r_{n+1} \neq a_{n+1}$ ならば、

$$x_{n+1} = x_n + r_{n+1} q_n + q_{n-1}, \quad y_{n+1} = y_n + r_{n+1} p_n + p_{n-1}$$

と置き、((A_{n+1})) に進む。

(2) $r_{n+1} = a_{n+1}$ ならば、

$$x_{n+1} = x_n + q_{n-1}, \quad y_{n+1} = y_n + p_{n-1}$$

と置き、((B_{n+1})) に進む。

((B_n)) $x_{n+1} = x_n - q_n, \quad y_{n+1} = y_n - p_n$

と置き、((A_{n+1})) に進む。

このとき、

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \theta - y_n)$$

であり、

$$\mathcal{M}_+(\theta, \phi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \min(x_n |p_n|, x'_n |p'_n|)$$

によって与えられる。ここで、

$$x'_n = x_n + p_{n-1}, \quad y'_n = y_n + p_{n-1}, \quad p'_n = x'_n \theta - \phi - y'_n$$

である。

[2] Sós のアルゴリズム [9]

Unit circle 上で考える。

(1-1) ϕ が $2 \leq r \leq a_1 + 1$ である整数 r に対して $(r-1)\theta$ と $r\theta$ の間にあるとき、 $C_1 = r$ と置く。次に C_2 を決める。

(1-2) ϕ が $(a_1 + 1)\theta$ と θ の間にあるとき、 $C_1 = a_1 + 1$ 及び $C_2 = 0$ と置く。次に C_3 を決める。

(2-1) ϕ が $1 \leq r' \leq a_2$ である整数 r' に対して $(C_1 p_0 + (r'-1)p_1)\theta$ と $(C_1 p_0 + r' p_1)\theta$ の間にあるとき、 $C_2 = r'$ と置く。次に C_3 を決める。

(2-2) ϕ が $(C_1 p_0 + a_2 p_1)\theta$ と $((C_1 - 1)p_0)\theta$ の間にあるとき、 $C_2 = a_2$ 及び $C_3 = 0$ と置く。次に C_4 を決める。

(k-1) ϕ が $1 \leq r'' \leq a_k$ である整数 r'' に対して $(C_1 p_0 + C_2 p_1 + \dots + (r''-1)p_{k-1})\theta$ と $(C_1 p_0 + C_2 p_1 + \dots + r'' p_{k-1})\theta$

の間にあるとき, $C_k = r''$ と置く。次に C_{k+1} を決める。

(k-2) ϕ が $(C_1 \tau_0 + C_2 \tau_1 + \dots + a_k \tau_{k-1})\theta$ と $(C_1 \tau_0 + C_2 \tau_1 + \dots + (C_{k-1} - 1) \tau_{k-2})\theta$ の間にあるとき, $C_k = a_k$ 及び $C_{k+1} = 0$ と置く。次に C_{k+2} を決める。

このアルゴリズムでは

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} D_k$$

と表される。また,

$$\mu_+(\theta, \phi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \min(Q_n \|Q_n \theta - \phi\|, Q'_n \|Q'_n \theta - \phi\|)$$

ここで,

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{k+1} \tau_k, \quad Q'_n = \begin{cases} Q_n - \tau_{n-1} & \text{if } C_{n+1} \neq 0; \\ Q_n - \tau_n & \text{if } C_{n+1} = 0. \end{cases}$$

③ Nishioka, Shiokawa and Tamura のアルゴリズム [8]

$\theta_0, \theta_1, \dots$ を使って、正整数 $b_0, b_1, \dots$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} \phi &= b_0 - \phi_0, & b_0 &= \lceil \phi \rceil, \\ \frac{\phi_{n+1}}{\theta_{n+1}} &= b_n - \phi_n, & b_n &= \left\lceil \frac{\phi_n}{\theta_{n+1}} \right\rceil \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

ここで、 $\lceil \cdot \rceil$ は実数 $\cdot$ の ceiling を表す。

このとき,

$$\phi = b_0 - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} D_k$$

である。また、 $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} \tau_k$ とおくとき、 $\mu_+(\theta, \phi)$ は $B_n \|B_n \theta + \phi\|$ の $\liminf_{n \rightarrow +\infty}$ と関連していることが予想される。

④ Berwein 兄弟のアルゴリズム [1]

$\theta_0, \theta_1, \dots$ を用いて、非負整数 $d_1, d_2, \dots$ を次のように定める。

$$\gamma_0 = \phi, \quad \frac{\gamma_{n-1}}{\theta_{n-1}} = d_n + \gamma_n, \quad d_n = \left\lfloor \frac{\gamma_{n-1}}{\theta_{n-1}} \right\rfloor \quad (n=1, 2, \dots).$$

このとき、

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{k+1} D_k$$

が成り立つ。また、 $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k d_{k+1} \tau_k$ とおくとき、 $\mu_+(\theta, \phi)$ は $|C_n| \|C_n \theta - \phi\|$ の $\liminf_{n \rightarrow +\infty}$ と関連していることが予想される。

⑤ 新しいアルゴリズム (Cf. [2], [7])

ξ_n ($n=1, 2, \dots$) を

$$\|\xi_n \theta - \phi\| = \min_{0 \leq t < \tau_n} \|\tau \theta - \phi\|$$

を満たす整数 ($0 \leq \xi_n < \tau_n$) とすると、

$$\xi_n \equiv (-1)^n \tau_{n-1} (L - \tau_n \phi) + t \pmod{\tau_n}$$

で与えられる。ここで、

$$t = \begin{cases} -1, 0 \text{ または } 1 & (n \text{ が 奇数}) ; \\ 0, 1 \text{ または } 2 & (n \text{ が 偶数}) . \end{cases}$$

このとき、

$$\phi = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n \theta\| & \text{if } 0 < \phi \leq \frac{1}{2} ; \\ 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n \theta\| & \text{if } \frac{1}{2} < \phi < 1 . \end{cases}$$

また $\mu_+(\theta, \phi)$ に関しては、次の定理が成り立つ。

Theorem 1.

$$\mu_+(\theta, \phi) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \underline{\Xi}_n ,$$

ここで

$$\underline{\Xi}_n = \begin{cases} \min(\xi_n \|\xi_n \theta - \phi\|, \xi'_n \|\xi'_n \theta - \phi\|, \xi''_n \|\xi''_n \theta - \phi\|), \\ \text{if } \frac{\xi_n}{2} < \xi_n < \frac{1}{\phi^{n+1}} \left(\frac{1}{2} + (-1)^n \left(\frac{1}{2} - \{-\xi_n \phi\} \right) \right) \\ \text{and } \xi_n \neq \xi_{n-1} ; \\ \xi_n \|\xi_n \theta - \phi\|, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\text{さらに、 } \xi'_n = \xi_n - \xi_{n-1} (\geq \xi_{n-1}), \quad \xi''_n = \xi_n + \left\lceil \frac{\xi_n - \xi_n}{\xi_{n-1}} \right\rceil \xi_{n-1} + \xi_{n-1} - \xi_n .$$

同様に $\mu_-(\theta, \phi)$ については、Theorem 1 で $-\phi$ を $+\phi$ にすべて入れ替えたものが成り立つ。

上記の定理ではやや扱いにくいだが、 $\theta = [0, a, a, \dots]$ の時には扱いやすい形になることが多い。

Theorem 2.

$\theta = [0, a, a, \dots] = \frac{\sqrt{a^2+4} - a}{2} \quad (a \geq 2) \quad \text{のとき,}$

$$\mu_+(\theta, \frac{1}{a}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n \|\xi_n \theta - \phi\| = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2+4}},$$

ここで, $\xi_{2n-1} = \xi_{2n} = \frac{\tau_{2n-1}}{a} \quad (n=1, 2, \dots).$

この定理は, $a=1$ の時は明らかに含まれる。ただし ξ_n の形は異なる。また同様にして, $\mu_-(\theta, \frac{1}{a}) = (1 - \frac{1}{a})^2 \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$ が得られるから、両者を合わせて

$$\mu(\theta, \frac{1}{a}) = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$$

が成り立つ。

§3. Khinchin の結果

$\lambda = \mu(\theta, 0) (= \mu_{\pm}(\theta, 0)), \quad \lambda_n = \tau_n \|\tau_n \theta\| \quad (n=1, 2, \dots)$ とおく。 $\theta = [0, a, a, \dots]$ のときは,

$$\lambda = \liminf_{\tau \rightarrow \infty} \tau \|\tau \theta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$$

である。このとき Khinchin は、背次近似定数 λ から非背次近似定数 $\mu(\theta, \phi)$ の上限を次のように示した。

Lemma ([6])

$a=1$ または a が偶数のとき.

$$\sup_{\phi} \mu(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{1-4\lambda^2} = \frac{a}{4\sqrt{a^2+4}}.$$

$a (\geq 3)$ が奇数のとき.

$$\sup_{\phi} \mu(\theta, \phi) < \frac{1}{4} \sqrt{1-4\lambda^2} = \frac{a}{4\sqrt{a^2+4}},$$

特に十分大きい n に対して. $\Theta_n = 2 \|\hat{e}_n \phi\|$ とおくと.

$\Theta_n \leq \sqrt{2} \lambda_n$ のとき.

$$\mu(\theta, \phi) \leq \frac{\lambda_n}{4} - \frac{\Theta_n^2}{16\lambda_n} \leq \frac{\lambda_n}{4} \rightarrow \frac{1}{4\sqrt{a^2+4}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\sqrt{2} \lambda_n \leq \Theta_n \leq \sqrt{8} \lambda_n$ のとき.

$$\mu(\theta, \phi) \leq \frac{\Theta_n^2}{16\lambda_n} \leq \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a^2+4}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\Theta_n \geq \sqrt{8} \lambda_n$ のとき.

$$\mu(\theta, \phi) \leq \frac{\sqrt{\Theta_n^2 - 4\lambda_n^2}}{4} \leq \frac{a+1}{a+2} \frac{\sqrt{1-4\lambda_n^2}}{4} \rightarrow \frac{a+1}{a+2} \frac{a}{4\sqrt{a^2+4}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

これらの結果に対して. $a=1$ のときの Cusick, Rockett & Szűsz の結果も部分的に含む次の定理を得た.

Theorem 3.

$$(1) \quad \mu\left(\theta, \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a^2 \sqrt{a^2+4}} \quad (a=1, 2, \dots)$$

$$(2) \quad \mu\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}\right) = \frac{1}{(a^2+4)\sqrt{a^2+4}} \quad (a=1, 2, \dots)$$

$$(3) \quad \mu\left(\theta, \frac{\sqrt{a}}{2}\right) = \frac{a}{4\sqrt{a^2+4}} \quad (a=1, 2, 4)$$

$$(4) \quad \mu\left(\theta, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{a^2+4}} \quad (a \text{ は奇数})$$

(3) は 6 以上の偶数に対しては成り立たない。また、
 $\mu(\theta, \phi) = 1/2\sqrt{a^2+4}$ などとなる ϕ が何であるかは (あ
 るいは存在するかどうかは) わかっていない。この定理から
 容易に想像されるように、どんな ϕ について

$$\mu(\theta, \phi) = \frac{\phi^2}{4\sqrt{a^2+4}}$$

となるか、という問題も残されている。

References

1. J.M. Borwein and P.B. Borwein, 'On the generating function of the integer part: $[n\alpha + \gamma]$ ', J. Number Theory 43 (1993), 293 - 318.
2. D. Bowman, 'Approximation of $[n\alpha + \gamma]$ and the zero of $\{n\alpha + \gamma\}$ ', J. Number Theory 50 (1995), 128 - 144.

3. J.W.S. Cassels, 'Über $\lim_{x \rightarrow +\infty} x|\vartheta x + 2 - y|$ ',
Math Ann. 127 (1954), 288-304.
4. T.W. Cusick, A.M. Rockett and P. Szűsz, 'On
inhomogeneous Diophantine approximation', J. Number
Theory 48 (1994), 259-283.
5. R. Descombes, 'Sur la répartition des sommets
d'une ligne polygonale régulière non fermée', Ann.
Sci. École Norm Sup. 73 (1956), 283-355.
6. A. Ya. Khinchin, 'On the problem of Tchebychef',
Izv. Akad. Nauk SSSR 10 (1946), 281-294.
(Russian)
7. T. Komatsu, 'The fractional part of $n\theta + \phi$ and
Beatty sequences', J. Théorie des Nombres de Bordeaux
(to appear).
8. K. Nishioka, I. Shiokawa and J. Tamura, 'Arithme-
tical properties of a certain power series', J. Number
Theory 42 (1992), 67-87.
9. V.T. Sós, 'On the theory of Diophantine approxi-
mations II', Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958),
229-241.