

Taylor vortex 流の定常振幅

広島大・理 八 幡 英 雄

二つの同軸円筒間（並径 R_1 , 外径 R_2 ）に非圧縮性粘性流体を入れ、内側の円筒を回転させ、その角度 Ω_1 を増加してゆくと、ある $\Omega_1^{(0)}$ で toroidal 状の vortex flow を生じる。¹⁾ この vortex 流の飽和定常振幅を計算し、実験との比較を試みた。

流速度 (u_r, u_θ, u_z) は、運動粘性率を ν とすると、つぎの Navier-Stokes 及連続の方程式で記述される：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 u_z \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

ここで $\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ で、以下定常かつ軸対称流をあつかうので $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ とする。

$\Omega_1^{(0)}$ 以下で生ずる laminar Couette 流は、よく知られているように、方位角方向への一様流で、流速 (V_r, V_θ, V_z) , 圧力 P は、 $\eta = R_1/R_2$ として、

$$V_r = V_z = 0, \quad V_\theta = \frac{\Omega_1 \eta^2}{1-\eta^2} \left(-r + \frac{R_2^2}{1} \right), \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

で与えられる。次に方程式 (1) における流速・圧力を、流れ (2) からのずれをきめるもの書きかえ、さらに、長さを R_2 , 流速を ν/R_2 を単位にして無次元化すると、

$$u_r \rightarrow \frac{\nu}{R_2} u_r, \quad u_\theta \rightarrow V_\theta + \frac{\nu}{R_2} u_\theta, \quad u_z \rightarrow \frac{\nu}{R_2} u_z, \quad \frac{p}{\rho} \rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{\nu^2}{R_2^2} \frac{p}{\rho},$$

$$r \rightarrow R_2 r, \quad z \rightarrow R_2 z, \quad (3)$$

とおきかえをして、次のようになる：

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\partial \partial_* + \partial_z^2) u_r + \beta \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) u_\theta + \partial \frac{p}{\rho} = -u_r \partial u_r - u_z \partial_z u_r + \frac{u_\theta^2}{r}, \\ -\beta u_r - (\partial \partial_* + \partial_z^2) u_\theta = -u_r \partial_* u_\theta - u_z \partial_z u_\theta, \\ -(\partial_* \partial + \partial_z^2) u_z + \partial_z \frac{p}{\rho} = -u_r \partial u_z - u_z \partial_z u_z, \\ \partial_* u_r + \partial_z u_z = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

ここで境界条件は $r=1$ および η で $\mathbf{u}=0$ で、 $\partial = \frac{\partial}{\partial r}$, $\partial_* = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$, さらに、

$$\beta = \frac{2R_1^2 \Omega_1}{\nu(1-\eta^2)} = \frac{2\eta \text{Re}}{(1-\eta)(1-\eta^2)}, \quad \text{Re} = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu} \text{ は外部パラメタである。}$$

Taylor vortex 流の閾値 $\beta^{(0)}$ 付近での振幅が、パラメタ β の $\beta^{(0)}$ からのずれ $\beta - \beta^{(0)}$ の適当の中であらわされる小さな量として、Malkus-Veronis²⁾ にならって小パラメタ ε による次の展開を行うと、

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{u}^{(3)} + \dots \\ \frac{p}{\rho} = \varepsilon \pi^{(1)} + \varepsilon^2 \pi^{(2)} + \varepsilon^3 \pi^{(3)} + \dots \\ \beta - \beta^{(0)} = \varepsilon \beta^{(1)} + \varepsilon^2 \beta^{(2)} + \dots \end{array} \right. \quad (5)$$

ここで各次数の函数およびパラメタは、方程式 (4) の Fredholm 可解条件及解の一意性の条件から、低次より逐次求めてゆく。円筒が軸方向 (z 方向) に無限に長いとし、さらに (4) の z に関する対称性を考慮して、 $\mathbf{u}^{(n)}$, $\pi^{(n)}$ を次のように Fourier 級数に分解すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^{(n)}(r, z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} u_{\ell}^{(n)}(r) \cos \ell a z \\ u_{\theta}^{(n)}(r, z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} v_{\ell}^{(n)}(r) \cos \ell a z \\ u_z^{(n)}(r, z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} w_{\ell}^{(n)}(r) \sin \ell a z \\ \pi^{(n)}(r, z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi_{\ell}^{(n)}(r) \cos \ell a z \end{array} \right. \quad (6)$$

(5), (6) を (4) に代入して, 各展開成分 $[n, \ell]$ に関する方程式を得る。 $[n=1, \ell=1]$ の成分は, 閾値 $\beta^{(0)}$ とそれに対応する流速 ($u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, w_1^{(1)}$) をきめる固有値方程式で, $w_1^{(1)}, \pi_1^{(1)}$ を消去して,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial \partial_* - a^2)^2 u_1^{(1)} + \beta^{(0)} a^2 \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) v_1^{(1)} = 0 \\ \beta^{(0)} u_1^{(1)} + (\partial \partial_* - a^2) v_1^{(1)} = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

となる。境界条件は $r=1, \eta$ で $u_1^{(1)} = \partial u_1^{(1)} = v_1^{(1)} = 0$ である。 $\beta^{(0)}$ は Taylor vortex の波数 a の函数として求まるが (中立安定曲線), $\beta^{(0)}$ を最小にするような a_c が supercritical state で vortex 流の最大線型成長率を与えるので, 以下の定常飽和振幅の計算では $a = a_c$ とおく。³⁾ (7) を数値的に解くには, いろいろの方法があるが, ここでは Chandrasekhar 流の基底函数を用いた Galerkin 法を用いた。⁴⁾ 成分 $[n=2, \ell=1]$ の Fredholm 可解条件から, $\beta^{(2)}$ を決める次式を得る :

$$\begin{aligned} & - \frac{8\beta^{(2)}}{\beta^{(0)}} \int_{\eta}^1 dr r [\tilde{u}_1^{(1)} (\partial \partial_* - a^2)^2 u_1^{(1)}] \\ & = \int_{\eta}^1 dr r \tilde{u}_1^{(1)} [u_1^{(1)} (\partial_* \partial \partial_* u_2^{(2)}) + 2 (\partial_* u_1^{(1)}) (\partial \partial_* u_2^{(2)}) \\ & \quad - (\partial \partial_* u_1^{(1)}) (\partial_* u_2^{(2)}) - 2 (\partial_* \partial \partial_* u_1^{(1)}) u_2^{(2)} - \frac{2}{r} u_1^{(1)} \partial \partial_* u_2^{(2)} \\ & \quad + \frac{4}{r} (\partial \partial_* u_1^{(1)}) u_2^{(2)} - a^2 \{ 3 u_1^{(1)} \partial_* u_2^{(2)} + 6 (\partial_* u_1^{(1)}) u_2^{(2)} - \frac{4}{r} u_1^{(1)} u_2^{(2)} \}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{r} (\beta^{(0)} a)^2 \chi_1^{(1)} (2\chi_0^{(2)} + \chi_2^{(2)}) + (\beta^{(0)} a)^2 \int_{\eta}^1 dr r \tilde{\chi}_1^{(1)} [2u_1^{(1)} \partial_* \chi_2^{(2)} \\
& + 4(\partial_* u_1^{(1)}) \chi_2^{(2)} + \chi_1^{(1)} (\partial_* u_2^{(2)}) + 2(\partial_* \chi_1^{(1)}) u_2^{(2)} + 4u_1^{(1)} \partial_* \chi_0^{(2)}], \quad (8)
\end{aligned}$$

ここで $v_1^{(1)} = \beta^{(0)} \chi_1^{(1)}$ で, $v_0^{(2)}(r) = \beta^{(0)} \chi_0^{(2)}$ は成分 $[n=2, \ell=0]$ の解, $u_2^{(2)}(r)$, $v_2^{(2)}(r) = \beta^{(0)} \chi_2^{(2)}(r)$ は成分 $[n=2, \ell=2]$ の解, $\tilde{u}_1^{(1)}(r)$, $\tilde{v}_1^{(1)}(r) = \beta^{(0)} a^2 \chi^{(1)}$ は (7) の共軛固有値方程式の解である。(8) から得られる $\epsilon^2 = (\beta - \beta^{(1)})/\beta^{(2)}$ を用いて, (5) から u の飽和振幅を計算することができる。

(i) 外円筒における平均偶力の測定⁵⁾

$\eta = 0.5$ の場合に $R = R_2$ で, $\ell = 0$ 成分からの偶力への寄与を測定し,

$$G(\text{dyn.cm}) = \begin{cases} 1.069 \text{ Re}, & (\text{Re} \leq \text{Re}^{(0)} = 67.89) \\ -69.91 + 2.071 \text{ Re}, & (\text{Re}^{(0)} \leq \text{Re} \leq 149) \end{cases} \quad (9)$$

が報告されている。偶力は応力 $\sigma_{r\theta}|_{r=R_2}$ に比例すると考えられ, $\text{Re}^{(0)}$ の上と下での G の勾配の差 $\delta = 1.002$ は Taylor vortex 流によるもので, Galerkin 基底関数を 4 項とった結果,

$$\delta = - \frac{4\pi\eta \rho \nu^2 h}{(1-\eta)(1-\eta^2)} \frac{\beta^{(0)}}{\beta^{(2)}} \frac{\partial \chi_0^{(2)}(r')}{\partial r'} \Big|_{r'=1} = 0.983, \quad (10)$$

$\text{Re}^{(0)} = 68.21$ を得た。

(ii) 光散乱による流速振幅 $u_r(r = \frac{R_1+R_2}{2}, z)$ の測定⁶⁾

$\eta = 0.6122$ の場合に, 水に浮べたラテックス分子の散乱から,

$$\begin{aligned}
u_r\left(\frac{R_1+R_2}{2}, z\right) &= (0.145 \pm 0.013) \xi^{0.50 \pm 0.03} \cos a z \\
&+ (0.063 \pm 0.005) \xi^{0.77 \pm 0.03} \cos 2az + \dots \quad (\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}), \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\xi = \frac{\beta - \beta^{(0)}}{\beta^{(0)}}, \quad a = 3.20 (\text{cm}^{-1}), \quad \beta^{(0)} = 370.4$$

が得られている。我々の計算結果は、

$$u_r\left(\frac{R_1+R_2}{2}, z\right) = 0.126 \xi^{\frac{1}{2}} \cos az + 0.0951 \xi \cos 2az + \dots, \quad (12)$$

$$a = 3.19 (\text{cm}^{-1}), \quad \beta^{(0)} = 365.8$$

となり、(11) の $\cos 2az$ の振幅が $\xi^{0.77 \pm 0.03}$ になる理由は不明である。

Taylor 不安定性は Bénard 不安定性とならんで、外部パラメタの変化によって、段階的に乱流状態へ遷移する典型的な問題といえる。⁷⁾ 今後さらに higher instabilities をも含めて、この問題に対する定性的・定量的理解が深まることが期待される。

参 考 文 献

- 1) G. I. Taylor, Phil. Trans. A223 (1923), 289
K. Kirchgässner and P. Sorger, Quart. J. Mech. Appl. Math. 22 (1969), 183
- 2) W. V. R. Malkus and G. Veronis, J. Fluid Mech. 4 (1958), 225.
- 3) Bénard 問題の場合 roll の波数が supercritical state で減少することが実験的に知られているが (cf. E. L. Koschmieder, Adv. in Chem. Phys. 26 (1974) pp. 177ff.), Taylor vortex の波数は変化しないという実験報告がある (J. E. Burkhalter and E. E. Koschmieder, J. Fluid Mech. 58 (1973), 547).
supercritical state における roll や vortex の波数がどのような機構で決まるのかは supercritical state 安定性と密接に関連し、まだ不明な点が多いように思われる。
- 4) S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford, 1961), §§ 73 134.
- 5) R. J. Donnelly, Proc. Roy. Soc. A246 (1958), 312.
R. J. Donnelly and N. J. Simon, J. Fluid Mech. 7 (1960), 401.
- 6) J. P. Gollub and M. H. Freilich, Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 1465.
- 7) J. P. Gollub and H. L. Swinney, Phys. Rev. Lett. 35 (1975), 927.