

$T_2(CP^n)$ の Pontrjagin 類 とその応用

九 大 理 鈴木 治夫

K-理論における Symmetric power operation は exterior Power operation と同様な方法で定義される。これを用いれば、微分可能多様体の高次接ベクトルバンドルは、K-理論においては、単に多様体の接ベクトルバンドルだけで表わされる。しかも、この高次接ベクトルバンドルの K-理論における表示を適切にとることによって、その特性類等を求めることが容易になる。実際に、この方法で n 次元複素射影空間の実微分可能構造に関する、 2 次接ベクトルバンドルの、Pontrjagin 類を計算し、その Stiefel-Whitney 類とあわせて、 n 次元複素射影空間から、実アフィン空間の中への、 2 次の特異点をもたないはめこみ (埋めこみ) についての応用を述べる。 ([3] 参照)

1. K-理論と高次接ベクトルバンドル

X を位相空間とし, Λ を実数体 $\mathbb{R}$, 又は複素数体 $\mathbb{C}$ とする.
 $K_\Lambda(X)$ において, symmetric i -th power operation を,
 O^i ($i=0, 1, 2, \dots$) とかく. O^i は次の性質をもつ. ([1],
 [2] 参照.) 任意の $x, y \in K_\Lambda(X)$ に対して,

$$(A) \quad O^0 x = 1$$

$$(B) \quad O^1 x = x$$

$$(C) \quad O^i(x+y) = \sum_{j=0}^i (O^j x)(O^{i-j} y).$$

X の上のベクトルバンドルと, それによって定まる, $K_\Lambda(X)$
 の元とを, 同一の記号で表わすことにする.

以下, X を微分可能多様体とする. 次に述べることは, 実
 微分可能 (C^∞), 又は複素解析的多様体のいずれの場合にも適
 用できるので, 特に区別しないで, 微分可能という言葉で表
 わしておく. 微分可能写像は場合に応じて, 実微分可能 (C^∞)
 又は holomorphic な写像と考える. U を X の一つの座標近傍,
 その座標関数を $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ とする. U の上の微分可能
 関数 (値は場合に応じて, 実数又は複素数) の全体から成る
 環を $F(U)$ とかく. $x \in U$ とするとき, $\partial^k / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} | x$
 は, $f \in F(U)$ に $\partial^k f / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} | x$ を対応させる.

linear functional とする. $\tau_p(X)_x$ を, 一次独立な linear
 functionals, $\{ \partial^k / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} | x \mid 1 \leq k \leq p, 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \}$
 によって張られる Λ ベクトル空間とし, $\tau_p(X) = \bigcup_{x \in X} \tau_p(X)_x$

とおく。 $\tau_p(X)$ は、 X の上の微分可能な $\wedge$ ベクトルバンドルとなる。 X から $\wedge$ への、 x を 0 に写す関数の p -jets 全体を $J^p(X)_x$ とかく。 $J^p(X) = \bigcup_{x \in X} J^p(X)_x$ は、 p -jets のバンドルであるが、 $\tau_p(X)$ は、 $J^p(X)$ の双対ベクトルバンドルとなる。即ち、 $\tau_p(X) \cong J^p(X)^*$ 。

X, Y を微分可能多様体 (同時に実又は複素多様体), $f: X \rightarrow Y$ を微分可能写像とするとき、 f の右側からの関数結合を用いて、 $\wedge$ -ベクトルバンドルの微分可能な homomorphism, $\tau_p(f): \tau_p(X) \rightarrow \tau_p(Y)$ が得られる。これは f の p 次微分とよばれるものである。

$I_{p-1}: \tau_{p-1}(X) \rightarrow \tau_p(X)$ を自然な包含写像, $\tilde{w}_{p-1}: \tau_p(X) \rightarrow \tau_p(X)/\tau_{p-1}(X)$ を projection homomorphism とする。

$$m_{p-1}(\partial/\partial x_{i_1}|_x \circ \cdots \circ \partial/\partial x_{i_p}|_x) = \tilde{w}_{p-1}(\partial^p/\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}|_x)$$

とおくと、 m_{p-1} は $\wedge$ ベクトルバンドルの微分可能な同型、 $O^p \tau_1(X) \cong \tau_p(X)/\tau_{p-1}(X)$ を定める。

$$m_{p-1}^{-1} \tilde{w}_{p-1} = P_{p-1}: \tau_p(X) \rightarrow O^p \tau_1(X)$$

とおくことにより、 $\wedge$ -ベクトルバンドルの short exact 列

$$(2)_p \quad 0 \rightarrow \tau_{p-1}(X) \xrightarrow{I_{p-1}} \tau_p(X) \xrightarrow{P_{p-1}} O^p \tau_1(X) \rightarrow 0$$

が得られる。微分可能写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、short exact 列の homomorphism,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{p-1}(X) & \xrightarrow{I_{p-1}} & \mathcal{T}_p(X) & \xrightarrow{P_{p-1}} & \mathcal{O}^p \mathcal{T}_1(X) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \mathcal{T}_{p-1}(f) & & \downarrow \mathcal{T}_p(f) & & \downarrow \mathcal{O}^p \mathcal{T}_1(f) \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{p-1}(Y) & \xrightarrow{I_{p-1}} & \mathcal{T}_p(Y) & \xrightarrow{P_{p-1}} & \mathcal{O}^p \mathcal{T}_1(Y) \longrightarrow 0
\end{array}$$

がなりにつ。

$D_Y^{(k)} : \mathcal{T}_{k+1}(Y) \rightarrow \mathcal{T}_k(Y)$ を, Y に対する $(\mathcal{T})_{k+1}$ の, 微分可能な splitting と仮定する。 Y が実微分可能多様体ならば, C^∞ -splitting は常に存在し, Y の上の dissections (symmetric linear connections の高次接ベクトルバンドルへの一般化) と一対一に対応する。 ([5] 参照)

$$D_p = D_Y^{(1)} \cdots D_Y^{(p-1)} : \mathcal{T}_p(Y) \rightarrow \mathcal{T}_1(Y)$$

とおき, これと $\mathcal{T}_p(f)$ とを結合して得られる, 微分可能 homomorphism, $D_p \mathcal{T}_p(f) : \mathcal{T}_p(X) \rightarrow \mathcal{T}_1(Y)$ を ($D_Y^{(k)}, k=1, 2, \dots$) に関する, f の p 次の osculating mapping という。各点 $x \in X$ に対し, $D_p \mathcal{T}_p(f)_x : \mathcal{T}_p(X)_x \rightarrow \mathcal{T}_1(Y)_{f(x)}$ が maximal rank ならば, f を ($D_Y^{(k)}$) に関する, p 次の non-singular mapping という。 X, Y の次元をそれぞれ n, N とする。また, $\nu(n, p) = \binom{n+p}{p} - 1$ とおく。 f がはめこみで, $p \geq 2$, $N \geq \nu(n, p)$, $D_p \mathcal{T}_p(f)_x$ が maximal rank でないとき, x を次数 $\equiv p-1$ の inflection point ということができる。特に, $Y = \Lambda^N$ ならば, $D_Y^{(k)}$ として自然な splitting をとるこ

とができる。はめこみ, $X \rightarrow \Lambda^N$ が, この splitting に関して, P 次の non-singular mapping であるならば, これを X から Λ^N への P 次の non-singular なはめこみという。

2. CP^n の高次接ベクトルバンドル

X を微分可能多様体とするとき, short exact 列 $(\tau)_p$ は, Λ -ベクトルバンドルの (連続的な) homomorphism に関して常に split するから, 次の定理が得られる。

定理 1. $K_\Lambda(X)$ において

$$(3) \quad \tau_p(X) = O^P(\tau_1(X) + 1) - 1 \quad p = 1, 2, \dots$$

任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\tau_p(X) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{k-1}{i} O^{p-i}(\tau_1(X) + k) - 1.$$

([2], [4] 参照)

この定理によって, 実又は複素の高次接ベクトルバンドルの種々の特性類等が求められる。 n 次元複素射影空間の実 P 次接ベクトルバンドル $\tau_p(CP^n)$ に関して, 定理は次のようになる。

系. $KO(CP^n)$ において, η を CP^n の上の Hopf 直線バンドルによって定まる, 実 2 次元ベクトルバンドルの元とするとき,

$$(4) \quad \tau_p(CP^n) = O^P((n+1)\eta) - O^{p-1}((n+1)\eta), \quad p = 1, 2, \dots$$

(4)を用いて, $\tau_2(\mathbb{C}P^n)$ の Pontrjagin 類を求めてみる.
 $\tau_P(\mathbb{R}P^n)$ の Stiefel-Whitney 類, $\mathbb{C}P^n$ の複素 P 次接ベクトルバンドルの Chern 類等に関しては, [2], [4] を参照されたい.

$P=2$ の場合, (4)から, $KO(\mathbb{C}P^n)$ において

$$(5) \quad \tau_2(\mathbb{C}P^n) = \binom{n+1}{2} \eta^2 + (n+1) \eta^2 - (n+1) \eta - 1.$$

Total Pontrjagin 類を P で表わせ, g を $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ の自然な生成元とするとき,

$$(6) \quad P(\eta) = 1 + g^2$$

$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ は torsions をもたないから,

$$(7) \quad P(\eta^2) = 1 + 4g^2$$

が得られる。 $\eta_c, (O^2\eta)_c$ を $\eta, O^2\eta$ の複素化とし, total Chern 類を C で表わすとき, Pontrjagin 類の定義によって

$$C(\eta_c) = 1 - g^2$$

となるから,

$$C((O^2\eta)_c) = C(O^2(\eta_c)) = 1 - 4g^2.$$

従って

$$(8) \quad P(O^2\eta) = 1 + 4g^2$$

再び, $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ が torsions を持たないことから,

Pontrjagin 類に対して, Whitney 和の式が成り立ち, (5)

(6), (7) および (8) をあわせて, 次の結果が得られる。

定理2. g を $H^2(CP^n; \mathbb{Z})$ の自然な生成元とするとき,

$$(9) \quad P(\tau_2(CP^n)) = (1+4g^2)^{\binom{n+2}{2}} (1+g^2)^{-(n+1)}.$$

一方, $\tau_2(CP^n)$ の total Stiefel-Whitney 類は $\bar{g} = g \bmod 2$ とおくとき, $H^*(CP^n; \mathbb{Z}_2)$ において,

$$(10) \quad W(\tau_2(CP^n)) = (1+\bar{g})^{-(n+1)}.$$

正整数 $s_W(n)$, $d_W(n)$, $s_P(n)$, $d_P(n)$ を次のように定める.

$$s_W(n) = \max \{ i \mid 0 < i \leq n, \binom{n+1}{i} \not\equiv 0 \bmod 2 \}$$

または, このような i が存在しないとき, 0.

$$d_W(n) = \max \{ i \mid 0 < i \leq n, \binom{n+1}{i} \not\equiv 0 \bmod 2 \}$$

または, このような i が存在しないとき, 0.

$$s_P(n) = \max \{ i \mid 0 < i \leq n, \sum_{j=0}^i (-1)^j 4^{i-j} \binom{n+1}{j} \binom{\binom{n+2}{2}}{\binom{n+1}{i-j}} \not\equiv 0 \}$$

$$d_P(n) = \max \{ i \mid 0 \leq i \leq n, \sum_{j=0}^i (-1)^j 4^{i-j} \binom{\binom{n+2}{2}+1}{j} \binom{n+1}{i-j} \not\equiv 0 \}$$

双対特性類はバーをつけて表わすことにすれば, (9), (10) によって, $\bar{W}_{2s_W(n)}(\tau_2(CP^n)) \neq 0$, $\bar{W}_{2d_W(n)}(\tau_2(CP^n)) \neq 0$, $\bar{P}_{4s_P(n)}(\tau_2(CP^n)) \neq 0$, $\bar{P}_{4d_P(n)}(\tau_2(CP^n)) \neq 0$ となるから, 次の結果が得られる.

定理3. k が整数で,

$$(11) \quad -2 \max \{ s_P(n), s_W(n) \} < k < 2 \max \{ d_P(n), d_W(n) \}$$

ならば, CP^n から $R^{(\frac{2n+2}{2})+k-1}$ への, 2 次の non-singular なはめこみ (埋めこみ) は存在しない。

言い換えれば, (II) の k に対して, はめこみ (埋めこみ) $CP^n \rightarrow R^{(\frac{2n+2}{2})+k-1}$ は, 少なくとも一つ, 1 次の infection point をもつ。

文 献

- [1] M. Atiyah, K-theory, Notes by D.W. Anderson, Harvard Univ. Lectures, Camb. Mass. 1964.
- [2] H. Suzuki, Bounds for dimensions of odd order non-singular immersions of RP^n . Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 269-275.
- [3] ———, Characteristic classes of some higher order tangent bundles of complex projective spaces, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966) 386-393.
- [4] ———, Symmetric power operations in K-theory and their applications. Topology Katata Symposium, Katata, Japan (1966), 出版予定
- [5] E. Feldman, The geometry of immersions. I, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), 185-224.