

超函数の特異集合と概均質ベクトル空間に 付随するゼータ函数の留数.

高知大 理 室 政和

概均質ベクトル空間に付随するゼータ函数の函数等式は、
相対不変式の複素ベキの Fourier 変換を計算することによ
て得られる。(佐藤-新谷[1][2], 木村[3]) それでは、ゼ
ータ函数の留数に対しては、相対不変式はどのような情報を
与えるであろうか。また超局所解析 (microlocal calculus)
の方法はやはりこの場合にも有効であろうか。

これらの問題については、佐藤-新谷[2]においてすでに
implicite な形で、ある種の相対不変超函数の Fourier 変換
に帰着されることが実例を通して述べられており、さらに
超局所解析が、ここでも有効であるということは、1975年
初めに木村氏によって注意されている。木村氏はまた同じ概均質
ベクトル空間に付随するいくつかのゼータ函数たち(それらの
possible poles の位置は同じである。)の留数の比は、この Fourier 変
換だけによって計算される(すなわち格子のとり方などによ

らない)ことを発表されている。(木村[9], 1978) しかしその詳細については、まだ明らかにされていないようである。(特に、どのような条件のもとに計算が可能なのかについて)

筆者は、1979年になって、やはり同様のことに気がつき、実例の計算を実行して来た。実際にやってみると、超局所

解析だけでは、かたのつかぬ問題も多く、種々の工夫が必要である。にもかかわらず、超函数の特異性が留数の計算に大きく影響をおよぼしていることは事実のようである。この小論では、超函数の特異性と留数の計算がどのようにかかわっているかを実例とまじえて解説する。

最後に今日の研究集会の出席者との種々の討論が、大変に有益であつたことを記し、代表者をはじめとする五名の出席者の方々に感謝したい。

§1. 超函数の特異性。

まず、 (G, ρ, V) を既約な正則複素ベクトル空間として $P(x)$ を既約な相対不変式、対応する character を χ とする。

singular set $\mathcal{S}$ は $P(x)$ の零点集合に等しく、 G はユニモジュラーであることを仮定する。 $n = \dim V$, $d = \deg P(x)$ とする。

$(G_{\mathbb{R}}, \rho, V_{\mathbb{R}})$ をひとつの real form として、 $G_{\mathbb{R}}^+$ は $G_{\mathbb{R}}$ の単位元を含む連結成分、 $G' = \{g \in G_{\mathbb{R}}^+; \chi(g) = 1\}$ とおく。こゝまで

は、通常おいてゐる仮定として無理のないものであるが、さらに次の仮定をおく。

(仮定) $S_R = S' \cap V_R$ は有限個の G' -orbit に分かれる。

$S_R = S'_1 \cup \dots \cup S'_k$ を G' -orbit 分解としよう。我々は次の問題とまず考える。

(問題) 1. $\bar{S}_i$ ($i=1 \dots k$) も support にもつ, G' -不変超函数 T_i で, S_i 上で G' -不変測度となつてゐるものは存在するか。

2. 存在したとすればそれは定数倍の $\bar{S}_i$ 上 $\gamma = -1$ か。

G' -不変な超函数は, この場合 G_R -相対不変である。したがって適当な $\lambda_i \in \mathbb{C}$ が存在して

$$T_i(p(g) \cdot x) = \chi(g)^{\lambda_i} T_i(x), \quad (g \in G_R^+)$$

をみたす。これは, holonomic system

$$\mathcal{M}_{\lambda_i}; (\langle d(pA) \cdot x, D_x \rangle - \lambda_i \delta X(A)) u = 0 \quad (A \in \mathcal{L}(G_R))$$

をみたすことと同等である。ここで $\mathcal{L}(G_R)$ は G_R の Lie algebra, dp は p の infinitesimal representation, δX は x の infinitesimal character である。これによつて, 我々は, $\mathcal{M}_{\lambda_i}$ の holonomy diagram をえびることによつて, $T_i(x)$ の support (だけでなく singular spectrum に対しても) 完全を知るゝことができる。それを知るためにまず次のことに注意す

る。

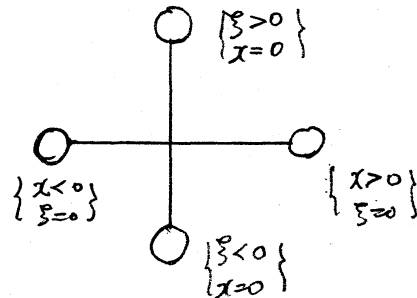
補題 1 変数の holonomic system $(xD_x - \lambda)u = 0$ の $\sqrt{-1}\Gamma^*V_{\mathbb{R}} = \{x=0\}$

における characteristic variety は

$\{x=0\} \cup \{\xi=0\}$ であり, holonomy

diagram は右図のようになる。

さらに,



i) $\lambda \neq -1, -2, \dots$ のとき,

$\{x < 0\}$ (resp. $\{x > 0\}$) 上の holonomic system の解は

その closure に support を持つ超関数に $\gamma = -\lambda$ にのみなる。

singular spectrum は $\{x > 0\}$ (resp. $\{x < 0\}$) 上にはない。

ii) $\lambda = -1, -2, \dots$ のとき,

$\{x < 0\}$ (resp. $\{x > 0\}$) 上の holonomic system の解は,

$\{x > 0\}$ (resp. $\{x < 0\}$) 上は $\gamma = -\lambda$ にのみなる。ただし,

$f(x)$ が γ の解とすれば, $f(x) \neq C \cdot \delta^{(-\lambda+1)}(x)$ も解?

ある。ここで C は定数, $\delta(x)$ はデルタ関数, $(-\lambda+1)$ は D_x

による微分の回数とあらわす。特に $f(x) \equiv 0$ とすれば

$\{x=0\}$ に support を持つ解が存在する。

この補題を使って, 次の実例で, singular set $S_{\mathbb{R}}$ の各 G' -orbit の closure に support を持つ超関数の存在を見よう。

例 1.1 $G_{\mathbb{C}} = GL(2) \times SO(m) \quad m \geq 4$

$$V_{\mathbb{C}} = M(2, m)$$

$$P: g = (g_1, g_2) \in G_{\mathbb{C}} \quad x \in V_{\mathbb{C}} \mapsto g_1 x g_2^t, \quad p(g) \cdot x = g_1 x g_2^t$$

ここで, 相対不変式 $P(x) = \det(x^t x)$, 対応する character

$$\chi(g) = \det(g_1)^2. \quad P(x)^{\Delta} \text{ の 係数は,}$$

$$b(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+\frac{3}{2})(\lambda+\frac{m-1}{2})(\lambda+\frac{m}{2}).$$

Complex holonomy diagram は

右の図のようになる。ここで $\bigcirc$ は

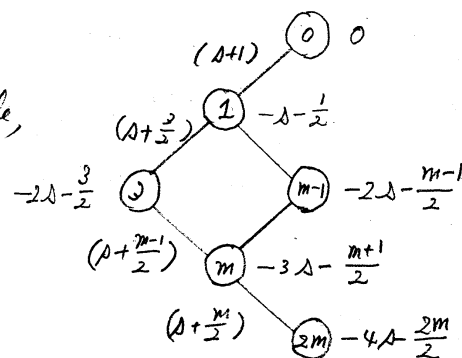
V における G -orbit の conormal bundle,

中の数は orbit の codimension,

$\bigcirc$ の横の数は order, 縦の数字は

() に入れて書かれています。その

交わりより出る係数 a factor である。



1) まず $m > 5$ とし, $G_{\mathbb{R}}^+ = GL^+(2, \mathbb{R}) \times SO(p, q, \mathbb{R})$

($p, q \geq 3$), $V_{\mathbb{R}} = M(2, m, \mathbb{R})$ を real form とし, みる。

$$P(x) = \det(x I_{p,q}^t x). \quad \text{ここで } I_{p,q} = I_p \oplus -I_q \text{ の対角行列.}$$

あらわしてやる。ここで $V_{\mathbb{R}}$ は 次のような $G_{\mathbb{R}}^+$ -orbit に分解される。

(1) open orbits ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 余次元 1 の orbit ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) 余次元 $(m-1)$; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(4) 余次元 3 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(5) 余次元 m ; $G_{\mathbb{R}}^+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$

(6) 余次元 0 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$

Open orbit に G' 不変な測度が入ることは、わかっている。

($|p(x)|^{-\frac{n}{2}} |dx|$ ととれるよ。)

余次元 1 の orbit を考えよう。この上に G' 不変な測度が入るとすれば、それは $V_{\mathbb{R}}$ 上の超関数とみて、その orbit の余法束 (conormal bundle) 上の order は $\frac{1}{2}$ でなければならぬ。さらに order $\frac{1}{2}$ のその (余次元 1 の) orbit を support に持つ超関数が存在すれば、それは orbit 上の測度になっている。

holonomy diagram をなぞめて、余次元 1 の orbit の余法束上に order $\frac{1}{2}$ の hyperfunction solution of WC_{Λ} with some $\Lambda \in \mathbb{C}$ が存在するかどうかを考えてみよう。order $\frac{1}{2}$ であるから $-\Lambda - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ねえ $\Lambda = -1$ でなければならぬ。①と③の交わりの近傍で quantized contact transformation をして、①と補題 1 にあたる zero section $\{s=0\}$, ③を原点の余法束としてみなすと、 $(x D_x - (\Lambda + \frac{3}{2} - 1))u = 0$ と同じになる。したがって $\Lambda + \frac{3}{2} - 1 = \Lambda + \frac{1}{2}$ は $\Lambda = -1$ のとき、 -1 より大きいから補題 1, i) によつて、①上の microfunction solution of order $\frac{1}{2}$ は ③まで $I = -\infty$ にのびる。

同様にして、③から ④, ①から ⑤, ④から ⑥ へと

$I = -\lambda$ にのびる。

②と①の交わりの近傍で, quantized contact transformation で, ②は zero section, ①は原点, の余法束とすることが出来る。holonomic system は, $(x\partial_x - (\lambda+1-1))u=0$ で $\lambda=-1$ であるから, 補題 1, ii) による, ①にのみ support を持つ microfunction 解にすることが出来る。

かくして我々は, ① ③ $\textcircled{m}$ $\textcircled{m-1}$ $\textcircled{2m}$ に support を持つ microfunction 解があることを知った。これは $\sqrt{t}T^*V_{\mathbb{R}}$ 全体で, 定義され, microfunction であるから, これは singular spectrum とする hyperfunction は, ① ③ $\textcircled{m}$ $\textcircled{m-1}$ $\textcircled{2m}$ を V に project したところに support を持つ。したがって, この hyperfunction は, 余次元 1 の orbit の closure に support を持つ。つまり, 余次元 1 の orbit に対して問題 1.2. は肯定的である。

同様にして我々は, 余次元 3, $m-1$, $2m$, の orbit に対しては, 問題 1.2. は肯定的である。

次に余次元 m の orbit について考えてみよう。この上に support を持つ超関数としては order は $\frac{m}{2}$ でなければならぬ。 $-\lambda - \frac{m+1}{2} = \frac{m}{2}$ 故に $\lambda = -\frac{2m+1}{2}$ 。このとき, $(\lambda + \frac{m-1}{2})$ と $(\lambda + \frac{3}{2})$ は $0, -1, \dots$ ならば, $\textcircled{m}$ に support を持つ。③と $\textcircled{m-1}$ には support を持たぬ microfunction solution が存在する。

これは $m=4$ ではない (つまり不可能である), しかし, 今回の場合, このようなものは存在する。つまり問題 1. に対して肯定的である。

2). 次に $m=4$ とする。 $G_{\mathbb{R}}^+ = GL(2, \mathbb{R}) \times SO(1, 3, \mathbb{R})$, $V_{\mathbb{R}} = H(2, 4, \mathbb{R}) \ni \text{real form}$ として, 2 みる。相対不変式は $P(x) = \det(x I_{1,3} + x)$ 。このとき, $V_{\mathbb{R}}$ は次のような $G_{\mathbb{R}}^+$ -orbit に分かれる。

Open orbit ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

余次元 1 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

余次元 3 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

余次元 4 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

余次元 8 ; $G_{\mathbb{R}}^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

このとき, 余次元 1, 4,

及び 8 の orbit に対しては, 1) の場合と同様にして, G' 不変測度が入り, しかもそれは G' 不変超関数として, $\Gamma = \Gamma$ に $V_{\mathbb{R}}$ 全体に拡張される。

余次元 3 の orbit については, この orbit 上に G' 不変測度が入ることはいわゆる。しかし, 余次元 $m-1$ の orbit の closure には余次元 m の orbit が含まれ, その上には, G' 不変測度が入るので, 余次元 $m-1$ 上の G' 不変測度は, $V_{\mathbb{R}}$ 全体に $\Gamma = -\Gamma$ には拡張されない。

以上の例で見るように, ある orbit に G' -不変測度が入るの
 がある. また, それが, G' -不変超函数として V_R 上に $\gamma = -\gamma$
 に拡張できるか否かを知るためには,

- 1) γ の orbit の conormal bundle 上の order.
- 2) γ の orbit の conormal bundle と 余次元 1 で交わる

Lagrangian との間のお互いの factor.

に注意して, microfunction solution を延長して, γ の orbit に
 support をもつ hyperfunction の存在を知ればよい.

§2. G' -不変超函数の Fourier 変換.

さて, このようにして得られた, 超函数は homogeneous であ
 り, さらに G_R^+ -相対不変超函数であるから, その Fourier 変
 換も, 相対不変超函数になることが容易にわかる. 一般に,
 $\varphi(x) \in V_R$ 上の k -次 homogeneous な超函数とすると, それ
 $x = r \cdot \xi \quad (r > 0, \xi \in S^{n-1})$ で極座標表示すれば,

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & \int \varphi(x) \exp(\sqrt{-1} \langle x, y \rangle) dx \\
 &= \int_0^\infty dr \int_{S^{n-1}} d\omega(\xi) r^{k+n-1} \varphi(\xi) \exp(\sqrt{-1} r \langle \xi, y \rangle) \\
 &= \int_{S^{n-1}} \varphi(\xi) \Phi_{k+n}(\sqrt{-1} \langle \xi, y \rangle) d\omega(\xi).
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \Phi_\lambda(z) = \Gamma(\lambda) (-z)^{-\lambda} \quad ((-z)^{-\lambda} / z = -z = 1)$$

$$d\omega(\xi) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \xi_j d\xi_1 \wedge \dots \wedge \check{d\xi_j} \wedge \dots \wedge d\xi_n \quad \text{である.}$$

$\Phi_\lambda(\langle \xi, y \rangle)$ は, $\xi \in S^{n-1}$ によって real analytic に depend
してゐるから, S^{n-1} 上の超函数 $\varphi(\xi)$ の test function とみる
ことができる。さらにこれは 超函数の平面波展開である。
すなわち, 今 $T_i(x)$ は ある singular orbit $\mathcal{O}_i$ の閉包に
support をもち G_i -不変な超函数とすると, その Fourier
変換の平面波展開が得られる。一方 $T_i(x)$ に対応する character
が $\chi(q)^{\lambda_i}$ であるとき, その Fourier 変換 $\hat{T}_i(y)$ は, $\chi(q)^{(\lambda_i + \frac{n}{2})}$
に対応する $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の hyperfunction であることは容易にわかる。
以上の考察によつて,

$$i) \quad SS(\hat{T}_i(y)) \cap \{0\} \times \sqrt{FS^{n-1}} = FS^{n-1} \cap \{\text{supp } T_i(x)\}.$$

(ここに $\sqrt{}$ は $V_{\mathbb{R}}$ とその dual space $V_{\mathbb{R}}^*$ と同一視してゐる。)

$$ii) \quad \hat{T}_i(p^*(q), y) = \chi(q)^{\lambda_i + \frac{n}{2}} \hat{T}_i(y).$$

したがつて, このような条件をみたすところの holonomic system

$$W_{-(\lambda_i + \frac{n}{2})}^* : (\langle dp^*(A) \cdot y, D_y \rangle - (\lambda_i + \frac{n}{2}) \delta \chi(A)) u = 0$$

の解であり, しかも (*) の平面波展開を持つものは holonomy
diagram と見るからよさげだ。これは holonomy diagram
の各 Lagrangian のつなぎりを見ればわかる。この状況をも
うおしくおしく説明しよう。

$T_i(x)$ は $V_{\mathbb{R}}$ 上の homogeneous hyperfunction であり holonomic
system W_{λ_i} をみたす。その singular spectrum $\Lambda \subset \text{FIT}^* V_{\mathbb{R}}$

は, $V \subset \rightarrow$ の ^{Connected} irreducible Lagrangian components $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_r$ に分解される。 Λ_j は good Lagrangian とし, τ の $\pm$ の $T_i(x)$ の principal symbol を考えよう。これは, $\sqrt{\Omega_{\Lambda_j}} \otimes \sqrt{\Omega_V}^{-1}$ の Λ_j の generic point τ 上 real analytic な section τ あり。

$$(2.1) \quad \sigma_{\Lambda_j}(T_i(x)) = C_{\Lambda_j} \cdot |P_{\Lambda_j}|^{\Lambda_i} \cdot \sqrt{\omega_{\Lambda_j}} / \sqrt{|dx|}$$

と適当な定数 C_{Λ_j} をと, τ 上 τ が τ なる。 $\tau = \tau$,

$$(2.2) \quad P_{\Lambda_j} = P \circ \pi / \langle x, y \rangle^{\sigma_j}$$

$$\omega_{\Lambda_j} = \frac{\pi^{-1}(dx) \wedge d\langle x, y \rangle}{\langle x, y \rangle^{l_j}} / d\langle x, y \rangle$$

$$\pi : W \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$$W = \{ (x, y) \in T^*V_{\mathbb{R}}; \langle Ax, y \rangle = 0 \quad A \in \mathcal{L}(G') \}$$

τ 上 σ_j, l_j は, $P_{\Lambda_j}, \omega_{\Lambda_j}$ 上 Λ_j 上 non-vanishing real analytic な函数 あり n -form となる数 τ あり。

— τ $T_i(x)$ の Fourier 変換 $\hat{T}_i(y)$ は $W_{-\Lambda_i - \frac{n}{2}}^+$ 上 $V_{\mathbb{R}}^*$ 上 の hyperfunction とみる τ が τ なる。 (*) より。

$$(2.3) \quad T_i(x) = \int_{S^{n-1}} \hat{T}_i(\xi) \Phi_{d\Lambda_i + n}(-\pi \langle \xi, x \rangle) d\omega(\xi)$$

τ あり。これは $T_i(x)$ の平面波展開式とあらわしてある。 $\hat{T}_i(y)$

は、 $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ 上で、は real analytic であり、定義より

$$(2.3)' \quad \sigma_{\{0\} \times V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*}(T_i(x)) = (2\pi)^{d_i + \frac{n}{2}} \widehat{T}_i(y) \sqrt{|dy|} / \sqrt{|dx|} \Big|_{V_{\mathbb{R}}^* - S^*}$$

とあり、与えられる。

そこで、今 $M = \{0\} \times V^*$ とし、 M 上の principal symbol のある line-bundle $\sqrt{\Omega_M} \otimes \sqrt{\Omega_{V_{\mathbb{R}}}}^{-1}$ に $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の hyperfunction $B(V_{\mathbb{R}}^*)$ を tensor して得られる bundle $B(V_{\mathbb{R}}^*) \otimes_{a(V_{\mathbb{R}}^*)} \sqrt{\Omega_M} \otimes \sqrt{\Omega_{V_{\mathbb{R}}}}^{-1}$ を考え、 $\widehat{T}_i(y) \sqrt{|dy|} / \sqrt{|dx|}$ を、この bundle の section としよう。
 $T^*V_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^* \cong T^*V_{\mathbb{R}}^*$ を同一視することに、 $\mathcal{M}_{A_i}$ と $\mathcal{M}_{-A_i - \frac{n}{2}}$ の characteristic variety は一致し、また、一方が good Lagrangian であるものは他方もそうである。そこで、 $\widehat{T}_i(y)$ の A_j 上の principal symbol を考えると、それは、 $\sqrt{\Omega_{A_j}} \otimes \sqrt{\Omega_{V_{\mathbb{R}}}}^{-1}$ の A_j の generic point 上で real analytic な section で、

$$(2.4) \quad \sigma_{A_j}^*(\widehat{T}_i(y)) = C_{A_j}^* \cdot |Q_{A_j}|^{-d_i - \frac{n}{2}} \sqrt{|\omega_{A_j}^*|} / \sqrt{|dy|}$$

と適当な定数 $C_{A_j}^*$ をとって書ける。ここで $Q(y)$ は X^{-1} に対応する (G, π^*, V^*) の相対不変式であり、

$$(2.5) \quad \begin{aligned} Q_{A_j} &= Q \circ \pi^* / \langle x, y \rangle \sigma_j^* \\ \omega_{A_j}^* &= \frac{\pi^{*-1}(dy) \wedge d\langle x, y \rangle}{\langle x, y \rangle \ell_j^*} / d\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\pi^*: W \rightarrow V_{\mathbb{R}}^*$$

によ、こ定義される、 σ_j^* , ℓ_j^* など"は、(2.2)と同様にこ定義される数である。このとき、

命題 2.1.

$$(2.6) \quad \sigma_{\lambda_j}(T_i(x)) = (2\pi)^{d_{\lambda_i} + \frac{n}{2}} \sigma_{\lambda_j}^*(\widehat{T}_i(y)) \sqrt{|dx|}/\sqrt{|dx|}$$

が成立することからわかる。特に $\lambda_j \in \{0\} \times V_{\mathbb{R}}^* - S^*$ のひとつの connected component とすると、これは (2.3)' にほかならない。これよりさらに、

$$(2.7) \quad C_{\lambda_j} |P_{\lambda_j}|^{\lambda_i} \sqrt{|\omega_{\lambda_j}|} = (2\pi)^{d_{\lambda_i} + \frac{n}{2}} C_{\lambda_j}^* |Q_{\lambda_j}|^{-\lambda_i - \frac{n}{2}} \sqrt{|\omega_{\lambda_j}^*|}$$

が得られ、一方 W 上で直接計算することにより、

$$|P_{\lambda_j}|^{\lambda_i} \sqrt{|\omega_{\lambda_j}|} = |K_0|^{\lambda_i} \sqrt{|K_1|} |Q_{\lambda_j}|^{-\lambda_i - \frac{n}{2}} \sqrt{|\omega_{\lambda_j}^*|}$$

$$K_0 = Q(y)^{-1} P(\text{grad } \log Q(y))$$

$$K_1 = Q(y)^{2n/d} \text{Hess } \log Q(y)$$

が得られる。これより、こ

命題 2.2

$$(2.8) \quad C_{\lambda_j}^* = (2\pi)^{d_{\lambda_i} + \frac{n}{2}} |K_0|^{\lambda_i} (\sqrt{|K_1|}) C_{\lambda_j}.$$

を得る。

このようにして我々は、次のことを得る。

定理 2.3 $T(x) \in \mathcal{WC}_A$ の hyperfunction solution, $C \in T(x)$ の singular spectrum in T^*V_R とする。このとき、

i) $\hat{T}(y)$ は $\mathcal{WC}_{-A-\frac{n}{2}}$ の hyperfunction solution であり、

$T^*V_R \cong V_R \times V_R^* \cong (V_R^*)^* \times V_R^* \cong T^*V_R^*$ により、 T^*V_R と $T^*V_R^*$ は同一視すると、 $\hat{T}(y)$ の singular spectrum in $T^*V_R^*$ は C と一致する。

ii) $A \in C$ の中のひとつの irreducible connected Lagrangian subvariety $\mathcal{C}$ good Lagrangian であるとすると、このとき、 $\sigma_1(T(x))$ と、 $\sigma_1(\hat{T}(y))$ は (2.1), (2.4) の形に表示すると、(2.8) の形の表示式を得る。

この定理を使、我々は実際に与えられた、相対不変超関数の Fourier 変換をすることが出来る。以下、実際に、それを実行してみよう。

例 2.1 §1 の例 1.1 と同じ 概均質ベクトル空間

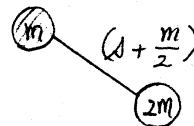
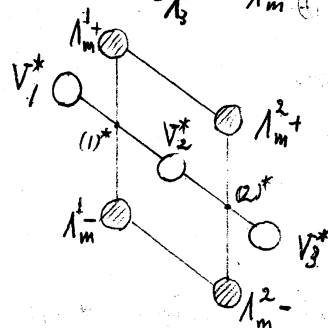
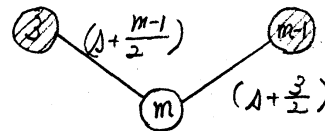
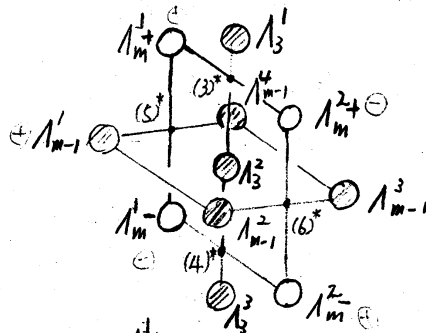
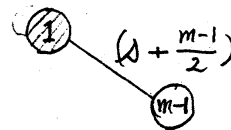
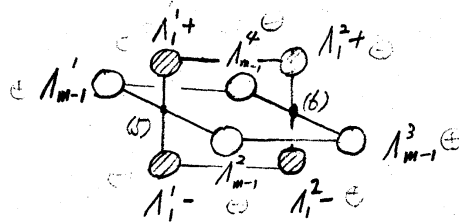
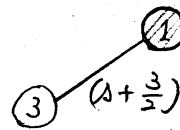
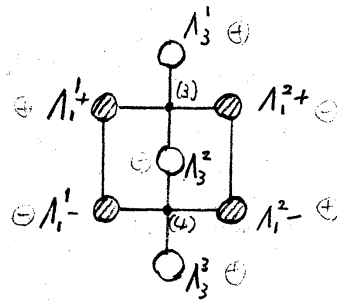
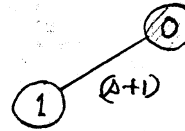
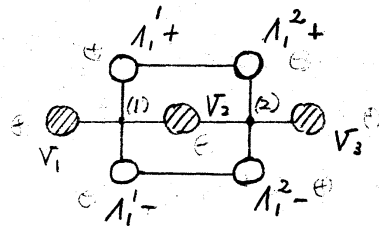
$$G_0 = GL(2) \times SO(m) \quad (m \geq 4)$$

$$V_0 = M(2, m)$$

をとる。

1) $m \geq 5$ $p.f. \geq 3$ としよう。このとき、Real holonomy diagram

diagram は. 次のようになる。各 real Lagrangian orbit のは



次のような点に δ , ϵ 生成される。

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \in \frac{V_{\mathbb{P}}^*}{V_{\mathbb{P}}^*} \cong T^*V_{\mathbb{P}}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_1^{1+} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ + & + & + \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_1^{1-} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ - & - & - \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_1^{2+} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_1^{2-} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_3^1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \Lambda_3^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Lambda_3^3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{m-1}^1 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} & \Lambda_{m-1}^2 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} & \Lambda_{m-1}^3 &= \left\{ \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} & \Lambda_{m-1}^4 &= \left\{ \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} \right\} \\
\Lambda_m^{1+} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} & \Lambda_m^{1-} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \right\} & \Lambda_m^{2+} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} & \Lambda_m^{2-} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
V_1^* &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} & V_2^* &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \right\} & V_3^* &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

各 orbit に付随する Maslov index は次のとおりである。こ
こで、orbit Λ に付随する Maslov index $\tau(\Lambda)$ とは $(x, y) \in \Lambda$ を Λ の
generic point とするとき、

$$\tau(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sgn} \langle Ax, Ay \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_P \text{ 上の 2 次型 } \langle Ax, Ay \rangle \\ \text{の positive eigenvalues の \#} \\ - \text{negative eigenvalues の \#} \end{array} \right\}$$

で定義されるものである。

$$(2.9) \quad \tau(V_i) = \tau(V_i^*) = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\tau(\Lambda_1^+) = \tau(\Lambda_m^+) = -(8-P+1), \quad \tau(\Lambda_1^{2+}) = \tau(\Lambda_m^{2+}) = -(8-P-1)$$

$$\tau(\Lambda_1^-) = \tau(\Lambda_m^-) = (8-P+1), \quad \tau(\Lambda_1^{2-}) = \tau(\Lambda_m^{2-}) = (8-P-1)$$

$$\tau(\Lambda_3^1) = -2(8-P), \quad \tau(\Lambda_3^2) = 0, \quad \tau(\Lambda_3^3) = 2(8-P)$$

$$\tau(\Lambda_{m-1}^1) = 0 \quad \tau(\Lambda_{m-1}^2) = 0$$

$$\tau(\Lambda_{m-1}^3) = 0 \quad \tau(\Lambda_{m-1}^4) = 0$$

同じようにして、各 Lagrangian の交わり に付随する Maslov index
は次のとおりである。

$$\tau(1) = \tau(1)^* = \tau(2) = \tau(2)^* = 0.$$

$$\tau(3) = \tau(3)^* = -(8-p) \quad \tau(4) = \tau(4)^* = (8-p)$$

$$\tau(5) = \tau(5)^* = 0 \quad \tau(6) = \tau(6)^* = 0$$

この微局相ベクトル空間の Lagrangian の交わりはすべて, "good" であり, しかも, $\Lambda_i \cap \Lambda_j$ の generic point を (x, y) とするとき, $\Lambda_i = T_{G,2}^* V$, $\Lambda_j = T_{G,y}^* V^*$ と表示することが出来る。したがって, $\mathcal{W}\Lambda_i$ の microfunction 解の principal symbol の接続公式によつて, Fourier 変換の計算が出来る。すなわち, $\mathcal{W}\Lambda_i$ をめぐる超函数 $T_i(x)$ の Λ_j 上の principal symbol は, (2.1) の形に書くととき, C_{Λ_j} たちの関係式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (2.10) \quad 3) \quad & \begin{bmatrix} C_{\Lambda_3^1} \\ C_{\Lambda_3^2} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\Lambda_i + \frac{3}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})), \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4} F) \\ \exp(\frac{\pi}{4} F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_1^+} \\ C_{\Lambda_1^-} \end{bmatrix} \\ 4) \quad & \begin{bmatrix} C_{\Lambda_3^1} \\ C_{\Lambda_3^2} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\Lambda_i + \frac{3}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})), \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\frac{\pi}{4} F) \\ \exp(-\frac{\pi}{4} F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_1^+} \\ C_{\Lambda_1^-} \end{bmatrix} \\ 5) \quad & \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{m-1}^1} \\ C_{\Lambda_{m-1}^2} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})), \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4} F(\frac{1}{2}P+1)) \\ \exp(\frac{\pi}{4} F(\frac{1}{2}P+1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_1^+} \\ C_{\Lambda_1^-} \end{bmatrix} \\ 6) \quad & \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{m-1}^4} \\ C_{\Lambda_{m-1}^3} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})), \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{m-1}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4} F(\frac{1}{2}P-1)) \\ \exp(\frac{\pi}{4} F(\frac{1}{2}P-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_1^+} \\ C_{\Lambda_1^-} \end{bmatrix} \\ 6)^* \quad & \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{m-1}^{2+}} \\ C_{\Lambda_{m-1}^{2-}} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\Lambda_i + \frac{3}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})), \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2} F(\Lambda_i + \frac{3}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\Lambda_{m-1}^{2+}} \\ C_{\Lambda_{m-1}^{2-}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$5)^* \begin{bmatrix} C_{A_1'^+} \\ C_{A_1'^-} \end{bmatrix} = (b)^* \text{ と同様な matrix } \begin{bmatrix} C_{A_{m-1}'} \\ C_{A_{m-1}''} \end{bmatrix}$$

$$3)^* \begin{bmatrix} C_{A_1'^+} \\ C_{A_1'^-} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_1 + \frac{m-1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m-1}{2})), \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m-1}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m-1}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m-1}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{1}(b-p)) \\ \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{1}(b-p)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A_1^1} \\ C_{A_1^2} \end{bmatrix}$$

$$4)^* \begin{bmatrix} C_{A_1'^+} \\ C_{A_1'^-} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_1 + \frac{m-1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m-1}{2})), \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m-1}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m-1}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m-1}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{1}(b-p)) \\ \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{1}(b-p)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A_1^1} \\ C_{A_1^2} \end{bmatrix}$$

$$1)^* \begin{bmatrix} C_{A_1'^+} \\ C_{A_1'^-} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_1 + \frac{m}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m}{2})), \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{1}(b-p+1)) \\ \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{1}(b-p+1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A_1'^+} \\ C_{A_1'^-} \end{bmatrix}$$

$$2)^* \begin{bmatrix} C_{A_1'^+} \\ C_{A_1'^-} \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(A_1 + \frac{m}{2})}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m}{2})), \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m}{2})) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m}{2})), \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{1}(A_1 + \frac{m}{2})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{4}\sqrt{1}(b-p)) \\ \exp(\frac{\pi}{4}\sqrt{1}(b-p)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A_1'^+} \\ C_{A_1'^-} \end{bmatrix}$$

この関係式を用いて, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ によって生成される, 余次元 1 の orbit 上の G' -不変測度の Fourier 変換を実行してみよう。
この測度は V_R 上の $\pi(A_1^{\pm})$ に support をもち G' -不変超関数 $T_1(x)$ にユニークに拡張され, π_{-1} を与える。今 $T_1(x)$ の principal symbol を, $(2,1)$ の形に表示したとき, $C_{A_1^+} = C_{A_1^-} = 1$ となるように $(T_1(x))$ に constant をかけることにより, (2) することができる。 $T_1(x)$ は $\pi(A_1^{\pm})$ 上には support を持たないから, $C_{A_1^+} = C_{A_1^-} = 0$ である。上の 3) ~ 2)* までの関係式により,

$$(2.11) \quad C_{A_1^+} = C_{A_1^-} = 1, \quad C_{A_1^2} = C_{A_1^3} = 0$$

$$C_{A_1^1} = (\sqrt{2\pi})^{-1} \Gamma(\frac{1}{2}) e^{-2}, \quad C_{A_1^2} = (\sqrt{2\pi})^{-1} \Gamma(\frac{1}{2}), \quad C_{A_1^3} = (\sqrt{2\pi})^{-1} \Gamma(\frac{1}{2}) e^{2}$$

$$C_{A_{m-1}}^1 = (\sqrt{2\pi})^{-1} \Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) (e\{2-2\delta\} + e\{-2+2\delta\}), \quad C_{A_{m-1}}^3 = C_{A_{m-1}}^4 = 0$$

$$C_{A_{m-1}}^2 = (\sqrt{2\pi})^{-1} \Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) (e\{-4+2p\} + e\{4-2p\})$$

$$C_{A_m^1}^+ = (2\pi)^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) e\{-1\} (e\{-2\delta+2\} + e\{2\delta-2\})$$

$$C_{A_m^2}^+ = (2\pi)^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) e\{-1\} (e\{2p-4\} + e\{-2p+4\})$$

$$C_{A_m^1}^- = e\{2\} C_{A_m^1}^+ = (2\pi)^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) e\{1\} (e\{-2\delta+2\} + e\{2\delta-2\})$$

$$C_{A_m^2}^- = e\{2\} C_{A_m^2}^+ = (2\pi)^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) e\{1\} (e\{2p-4\} + e\{-2p+4\})$$

$$C_{V_i^*} = 0$$

$$C_{V_2^*} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \cdot 2 \cdot \left\{ \cos\left(\frac{\pi(P+8-2)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi(P+8-6)}{2}\right) \right\}$$

$$C_{V_3^*} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \cdot 2 \cdot (1+(-1)^P) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

これより T とえば、我々は次のような Fourier 変換公式を得る。

命題 2.1.1

$$(2.12) \quad \int T_1'(x) \exp(2\pi i F\langle x, y \rangle) dx \Big|_{V_{\mathbb{R}}^* - \mathcal{N}} \\ = (2\pi)^{4-m} 4^{-2+\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^3 C_{V_i^*} |P(y)|^{1-\frac{m}{2}} \Big|_{V_i^*}$$

ここで、 $\langle x, y \rangle = \text{tr}(x^t y)$, V_i^* は $V_{\mathbb{R}}^*$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ との内積によつて、同一視し得る。また、 V_i にあたる $V_{\mathbb{R}}^*$ の connected component である。証明は (2.8) の式において、 $K_0 = 4^2$, $K_1 = 4^m$, $A_i = -1$, $n = 2m$ に注意すれば T と T_1 に出る。

例 2.2. $G_{\mathbb{C}} = GL(n) \times SL(n)$

$$V_{\mathbb{C}} = M(n, \mathbb{C})$$

$$p; g = (g_1, g_2) \in G_{\mathbb{C}}, x \in V_{\mathbb{C}} \text{ に対して } p(g) \cdot x = g_1 x^t g_2$$

このとき, 相対不変式 $P(x) = \det x$, 対応する character

$$\chi(g) = \det(g_1). \quad V_{\mathbb{C}} \text{ 上に内積 } \langle x, y \rangle = \text{tr}(x^t y) \quad (x, y \in V_{\mathbb{C}}) \text{ を入}$$

れ, $V_{\mathbb{C}}$ と $V_{\mathbb{C}}^*$ を同一視するとき, $(G_{\mathbb{C}}, P^*, V_{\mathbb{C}}^*)$ は $P(x)$ を相対不変式に持つ. 正則概均質ベクトル空間になる。 $P(x)^{\Delta}$ の δ 関数は,

$$\delta(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2) \cdots (\lambda+n)$$

で与えられる。 Real form としてはすべての係数を $\mathbb{R}$ に制限したものをとる。

holonomy diagram は右の

図のようになり 右がわの

図が Complex, 左がわの

図が real の holonomy

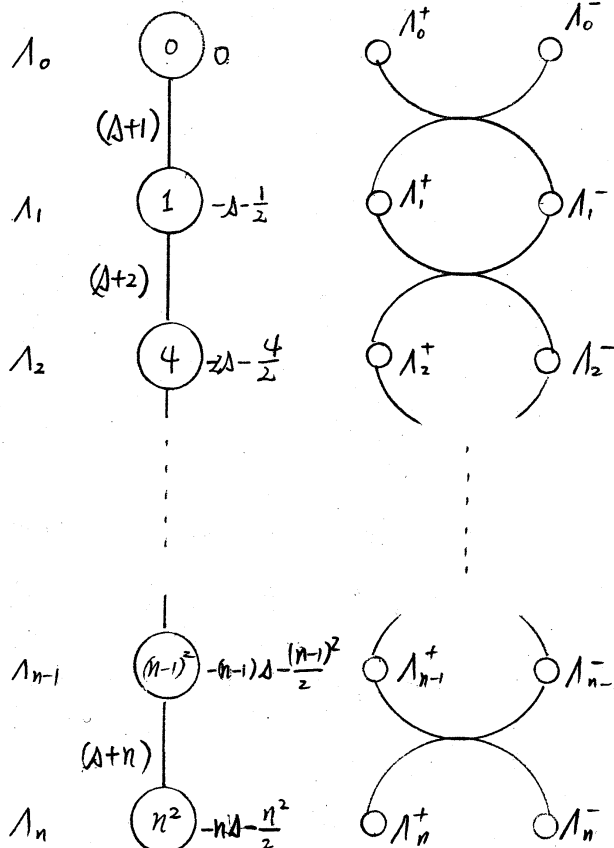
diagram である。

λ_i の生成点, は,

$$\left(\begin{bmatrix} I_i & \\ & 0_{n-i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_i & \\ & I_{n-i} \end{bmatrix} \right) \in V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}}^*$$

$\lambda_i^{\pm}$ の生成点, は,

$$\left(\begin{bmatrix} I_i & \\ & 0_{n-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_i & \\ & I_{n-i} \end{bmatrix} \right) \in V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^*$$



$\Lambda_{i\mathbb{R}}$ の $V_{\mathbb{R}}$ への projection $\pi(\Lambda_{i\mathbb{R}})$ は一つの $G_{\mathbb{R}}^+$ -orbit であり $\overline{\pi(\Lambda_{i\mathbb{R}})}$ に support を持つ, $\pi(\Lambda_{i\mathbb{R}})$ 上では, その上の G^+ -不変 measure とし, 正しい超関数は存在する。なぜならば, $\Lambda_{i\mathbb{R}}$ 上の order が $\frac{i^2}{2}$ ととなるためには, $\lambda = -i$ とおけばよい。しかも: α とし, $\Lambda_{i\mathbb{R}}$ に support があて, $\Lambda_{j\mathbb{R}}$ ($j \neq i$) には support のない microfunction があて, それは $\Lambda_{j\mathbb{R}}$ ($j \neq i$) へ $\mathcal{U} = -\mathcal{U}$ に延長できることは補題 1 で示すことができる。

さて, このような超関数 $T_i(x)$ は, constant 倍を除いて, $\mathcal{U} = -\mathcal{U}$ に定まる。今我々は, $T_i(x)$ を (2.1) の表示に $1\mathbb{E}$ によって

$$(2.13) \quad \sigma_{\Lambda_i^+}^+(T_i(x)) = |P_{\Lambda_i^+}|^{-i} \sqrt{|\omega_{\Lambda_i^+}|} / \sqrt{|dx|}$$

$$\sigma_{\Lambda_i^-}^-(T_i(x)) = |P_{\Lambda_i^-}|^{-i} \sqrt{|\omega_{\Lambda_i^-}|} / \sqrt{|dx|}$$

となるように定めることができる。このとき,

$$(2.14) \quad \sigma_{\Lambda_j^\pm}^\pm(T_i(x)) = 0 \quad (j > i)$$

これは, $\Lambda_i^\pm$ と $\Lambda_j^\pm$ の associated numbers の計算によることにより, 得られる。実際, Maslov index たちはすべての Lagrangian と及びその交わりで 0 であるから, $\Lambda_i^\pm$ と $\Lambda_{i+1}^\pm$ の microfunction solution の関係式は, 次で与えられる。
principal symbols

$$(2.15) \quad \begin{bmatrix} C_{A_{i+1}}^+ \\ C_{A_{i+1}}^- \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(\sqrt{1}\frac{\pi}{2}), \exp(\sqrt{1}\frac{\pi}{2}) \\ \exp(\sqrt{1}\frac{\pi}{2}), \exp(-\sqrt{1}\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A_i}^+ \\ C_{A_i}^- \end{bmatrix}$$

これは、 $C_{A_j}^\varepsilon$ は、 A_j^ε 上の symbol $\in |P_{A_j^\varepsilon}|^{-2} \sqrt{|w_{A_j^\varepsilon}|} / \sqrt{|dx|}$ の constant 倍であらわれ、 ε の constant term である。($\varepsilon = \pm 1, j = i, i+1$)

$T_i(x)$ に対しては $C_{A_i}^+ = C_{A_i}^- = 1$ であるから、 $C_{A_{i+1}}^+ = C_{A_{i+1}}^- = 0$ 。

したがって、 $C_{A_j}^+ = C_{A_j}^- = 0$ ($j \geq i+1$) 。

命題 2.2.1

$$(2.16) \quad \int T_i(x) \exp(-2\pi\sqrt{1}\langle x, y \rangle) dx = (2\pi)^{-ni - \frac{n^2}{2}} T_{n-i}(y)。$$

これは、(2.8) において、 $K_0 = K_1 = 1$, $A_i = i$, とおき、 n のかわりに n^2 を入れれば、これらに C_{A_j} と $C_{A_j}^*$ の関係式が得られることがわかる。

注意 命題 2.1.1. の Fourier 変換公式においても、 $C_{A_2}^* = C_{A_3}^* = 0$ となれば、 $V_{\mathbb{R}}^* - \mathcal{P}$ 上では Fourier 変換像は 0 になってしまうが、その場合には、もちろん、 $\mathcal{P}$ に support が含まれるのであり、それも (2.8) の公式にあてはめれば計算できる。

§3. ゼータ函数の構成と函数等式, 及びその poles.

ここでは概均質ベクトル空間に付随するゼータ函数の構成と留数の計算について, 佐藤・新谷 [2] を敷衍あるいは要約しつつ述べる。§1 の仮定に加えて, 次の仮定する。

(仮定1) G, V に $\mathbb{Q}$ -structure $G_{\mathbb{Q}}, V_{\mathbb{Q}}$ が入り, $p(G_{\mathbb{Q}}) \cdot V_{\mathbb{Q}} \subset V_{\mathbb{Q}}$ 。さらに, V 上に $\mathbb{Q}$ 係数の内積 $\langle x, y \rangle$ と, G の involution ι が存在して, $p^*(g) = p(g^{\iota})$ ($g \in G$)。

次に $L \in V_{\mathbb{Q}}$ 内の lattice, L^* は $\langle x, y \rangle$ に関する dual lattice とする。 $\Gamma \in G_{\mathbb{Z}}$ の subgroup として,

(仮定2) L, L^* は Γ -不変。

$$\begin{aligned} \text{(仮定3)} \quad I'(f, L) &= \int_{G_+^1/\Gamma} \sum_{x \in L - S'} f(p(g) \cdot x) d'g, \\ I^*(f, L^*) &= \int_{G_+^1/\Gamma} \sum_{x \in L^* - S'} f(p^*(g) \cdot x) d'g, \end{aligned}$$

は, 任意の $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して絶対収束する。

§2, $x_1 \in V_{\mathbb{Q}} - S'$ に対して,

$$(3.1) \quad \int_{G_+^1/\Gamma} \sum_{y \in \Gamma/\Gamma_{x_1}} f(p(g) \cdot y) \cdot x_1 d'g \quad f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$$

は収束し,

$$(3.2) \quad \int_{p(\Gamma_+^1) \cdot x_1} f(x) \tilde{\omega}(x) \int_{G_+^1/\Gamma_x} dV_x$$

と書くことができる。ここで、 $\tilde{\omega}$ は $P(G_+^+ \backslash X)$ 上の measure で $V_R - S'$ 上の n -form とみたとき、 $dPA \tilde{\omega}$ が $V_R - S'$ 上の Euclidian measure と等しいものとしてあり、 dV_x は G_x^+ (G_+^+ の x における isotropy subgroup) 上の Haar measure, $\Gamma_x = \Gamma \cap G_x^+$ である。我々は、 $\int_{G_x^+/\Gamma_x} dV_x$ を x における density と呼び、 $\mu(x)$ である。

定義 3.1

$$i) \quad \xi_i(\Lambda, L) = \sum_{x \in L^i/\sim} \mu(x) |P(x)|^{-\Lambda}$$

$$ii) \quad Z(f, L, \Lambda) = \int_{G_R^+/\Gamma} \chi(g)^{-\Lambda} \sum_{x \in L'} f(p(g) \cdot x) dg$$

ここで、 L^i は $V_R - S'$ の i 個の Connected component V_i と L の共通部分、 $\sim$ は Γ による同値関係、 $L' = L - S'$ である。 $\operatorname{Re}(\Lambda)$ が充分大きくなると、i) ii) は 絶対収束し、

$$(3.3) \quad Z(f, L, \Lambda) = \sum_{i=1}^l \xi_i(\Lambda, L) \int_{V_i} |P(x)|_i^{\Lambda - \frac{n}{2}} f(x) dx$$

が成立する。ここで、 $V_R - S' = \bigcup_{i=1}^l V_i$ (Connected Component 分解), $f \in C_0^\infty(V_R - S')$ とする。同様に (7, $\xi_i(\Lambda, L^*)$ も定義され

$$\begin{aligned} (3.4) \quad Z^*(f, L^*, \Lambda) &= \int_{G_R^+/\Gamma} \chi(g)^{-\Lambda} \sum_{x \in L^* - S'} f(p^*(g) \cdot x) dg \\ &= \sum_{i=1}^l \xi_i(\Lambda, L^*) \int_{V_i} |P(x)|^{\Lambda - \frac{n}{2}} f(x) dx \end{aligned}$$

である。

定理 3.2. $b(\lambda) = \prod_{i=1}^d (\lambda + C_i)^{d_i} \in P(\alpha)^\Lambda$ の b -函数とする。

このとき, $\xi_i(\lambda, L)$ と $\xi_i(\lambda, L^*)$ は $\lambda = C_i$ に d_i 次の possible poles を持つ meromorphic function on $\mathbb{C}$ に解析接続される。

さらに, 適当な $\mathbb{C}$ 上の meromorphic function $G_{ji}(\lambda)$ によって

$$(3.5) \quad \xi_j(\lambda, L) = v(L)^{-1} \sum_{i=1}^d G_{ji}(-\lambda) \xi_i\left(\frac{n}{d} - \lambda, L^*\right)$$

の形の函数等式を持つ。($v(L) = \text{Volume}(L)$)

これらの $G_{ji}(\lambda)$ は holomorphic parameter λ をもつ超函数 $|P(\alpha)|^\Lambda|_{V_i}$ を Fourier 変換することによって計算される。i.e.,

$$(3.6) \quad \int |P(\alpha)|^\Lambda|_{V_i} \exp(-2\pi F \langle x, y \rangle) dx = \sum_{j=1}^d G_{ji}(\lambda) |P(y)|^{-\lambda - \frac{n}{d}}|_{V_j}.$$

この証明は, [2] の最後の remark にある。

さて, 我々の目的は, $\xi_j(\lambda, L)$ の留数の計算にある。そこで, [2] に従って, $\xi_j(\lambda, L)$ の解析接続をしてみよう。まず Poisson の和公式; $\sum_{x \in L} f(x) = v(L)^{-1} \sum_{x^* \in L^*} \hat{f}(x^*)$ を考える。ここで, $f \in \mathcal{S}(V_R)$, $\hat{f}(x) = \int f(y) \exp(-2\pi F \langle x, y \rangle) dy$ 。

$f(x)$ の代わりに $f(p(y) \cdot x)$ をとると 容易に次の式が得られる。

$$(3.7) \quad \sum_{x \in L'} f(p(g) \cdot x) = v(L)^{-1} \sum_{x^* \in L^*} \widehat{f}(p^*(g) \cdot x^*) \\ + v(L)^{-1} \sum_{x^* \in L^* \cap \mathcal{N}} \widehat{f}(p^*(g) \cdot x^*) - \sum_{x \in L \cap \mathcal{N}} f(p(g) \cdot x).$$

この左辺は G'/Γ 上の函数として可積分である。右辺を計算するために、次の仮定をおく。

(仮定4) 1) $\mathcal{N} \cap V_{\mathbb{R}}$ は有限個の G' -orbit に分かれ、2) 各 G' -orbit は、 G' -不変な measure を持つ。

$\mathcal{N} \cap V_{\mathbb{R}} = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_r$ と $\mathcal{N} \cap V_{\mathbb{R}}$ の G' -orbit 分解とする。各 $\mathcal{N}_i$ は G' -不変な measure $d\mathcal{N}_i$ を持つ。 $f(x)$ を $\mathcal{N}_i$ 上では compact support を持った $V_{\mathbb{R}}$ 上の C^∞ function とするとき、 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ あり、

$$(3.8) \quad \int_{\mathcal{N}_i} f(g \cdot x) d\mathcal{N}_i = \alpha(g)^{-\lambda_i - \frac{n}{2}} \int_{\mathcal{N}_i} f(x) d\mathcal{N}_i \quad (g \in G_{\mathbb{R}})$$

と書くことができる。このとき、次のことが予想される。(たとえ仮定と結論を弱めて、Remark 1 のようにも言える。)

予想 3.3 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_\ell\}$ を、(3.8) にあらわれる $\lambda_i \in \mathbb{C}$ の全体の集合とし、 $\Sigma_i = \{j \in \{1, 2, \dots, r\}; \lambda_j = \sigma_i\}$ ($i=1, \dots, \ell$) とおく。

このとき、 $f(x) \in C_c^\infty(V_{\mathbb{R}} - \mathcal{N})$ ならば、

$$(3.9) \quad J_i^*(\widehat{f}, L^*) = \lim_{k \rightarrow G'/\Gamma} \int_K \sum_{j \in \Sigma_i} \sum_{x^* \in L^* \cap \mathcal{N}_j} \widehat{f}(p^*(g) \cdot x^*) dg$$

は収束する。ここで K は G'/Γ の compact set で、 G'/Γ に近づいたときの極限の意味である。また、このとき、(3.9) は、

$$(3.10) \quad J_i^*(\hat{f}, L^*) = \sum_{k=0}^{m_i} a_i^k J_i^{*k}(\hat{f}, L^*) \quad (a_i^k \in \mathbb{C}, m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

という線型汎函数 $f \mapsto J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)$ の和に分解され,

$$(3.11) \quad J_i^{*k}(\hat{f}_g, L^*) = \chi(g)^{\sigma_i} \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (\log \chi(g))^j J_i^{*k-j}(\hat{f}, L^*) \right)$$

をみたす。 ($f_g(x) = f(g \cdot x) \quad g \in G_{\mathbb{R}}^+$)

同様に, $\hat{f} \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S)$ とするとき,

$$(3.12) \quad J_i(f, L) = \lim_{K \rightarrow G'/F} \int_K \sum_{j \in \Sigma_i} \sum_{x \in L \cap S_j} \hat{f}(p(j) \cdot x) dx$$

は収束し, (3.10), (3.11) と同じ型の分解を持つ ($\sigma_i \rightarrow -\sigma_i - \frac{n}{2}$ とおく)。

この予想が成り立つとして, 留数の計算を行う。 $f(x) \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S)$ とする。

$$(3.13) \quad Z(f, L, \Delta) = \int_{G_{\mathbb{R}}/G'} \chi(g)^{\Delta} I'(f_g, L) d\chi(g)/\chi(g).$$

$$= \int_{\chi(g) \geq 1} + \int_{\chi(g) \leq 1} \chi(g)^{\Delta} I'(f_g, L) \frac{d\chi(g)}{\chi(g)}$$

$I'(f_g, L)$ は $\chi(g) \rightarrow \infty$ のとき, 急減少するから $\int_{\chi(g) \geq 1}$ は Δ に関する entire function である。(一方 (3.7) を G'/F 上で積分すれば, (これは $Z_+(f, L, \Delta)$ と書こ)

$$(3.14) \quad \begin{aligned} I'(f_g, L) &= v(L)^{-1} (I^{**}(\hat{f}_g, L^*) + \int_{G'/F} \sum_{x^* \in L^* \cap S} \hat{f}_g(p^*(g) \cdot x^*) dx_g) \\ &= v(L)^{-1} (I^{**}(\hat{f}_g, L^*) + \sum_{i=1}^l J_i^*(\hat{f}_g, L^*)) \end{aligned}$$

を得る。

$$(3.15) \quad \int_{\chi(q) \leq 1} \chi(q)^{\Delta} I^*(\hat{f}_q, L^*) d\chi(q)/\chi(q)$$

は $Z_+(f, L, \Delta)$ が Δ により n である n と同じ理由で entire である。これを $Z_+^*(\hat{f}, L^*, \Delta)$ と書く。(3.14) を (3.13) に代入すると

$$(3.16) \quad Z(f, L, \Delta) = Z_+(f, L, \Delta) + v(L)^{-1} Z_+^*(\hat{f}, L^*, \Delta) \\ + v(L)^{-1} \int_{\chi(q) \leq 1} \chi(q)^{\Delta-1} \sum_{i=1}^{\ell} J_i^*(\hat{f}_q, L^*) d\chi(q).$$

— δ , $\operatorname{Re}(\Delta) \gg 0$ かつ $\delta \geq$,

$$(3.17) \quad \int_{\chi(q) \leq 1} \chi(q)^{\Delta-1} J_i^*(\hat{f}_q, L^*) d\chi(q) \\ = \int_{\chi(q) \leq 1} \chi(q)^{\Delta-1} \left(\sum_{k=0}^{m_i} a_i^k \cdot \chi(q)^{\sigma_i} \cdot \left(\sum_{\delta=0}^k \frac{1}{\delta!} (\log \chi(q))^{\delta} J_i^{*k-\delta}(\hat{f}, L^*) \right) \right) d\chi(q) \\ = \sum_{\delta=0}^{m_i} \frac{1}{\delta!} \int_0^1 t^{\Delta+\sigma_i-1} (\log t)^{\delta} \left(\sum_{k=\delta}^{m_i} a_i^k J_i^{*k-\delta}(\hat{f}, L^*) \right) dt$$

部分積分をくりかえすことにより,

$$\int_0^1 t^{\Delta+\sigma_i-1} (\log t)^{\delta} dt = (-1)^{\delta} \delta! (\Delta+\sigma_i)^{-\delta-1},$$

したがって,

$$(3.17) = \sum_{\delta=0}^{m_i} (-1)^{\delta} (\Delta+\sigma_i)^{-\delta-1} \sum_{k=\delta}^{m_i} a_i^k J_i^{*k-\delta}(\hat{f}, L^*)$$

すなわち,

$$(3.18) \quad Z(f, L, \Delta) = Z_+(f, L, \Delta) + v(L)^{-1} Z_+^*(\hat{f}, L^*, \Delta) \\ + v(L)^{-1} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{\delta=0}^{m_i} (-1)^{\delta} (\Delta+\sigma_i)^{-\delta-1} \sum_{k=\delta}^{m_i} a_i^k J_i^{*k-\delta}(\hat{f}, L^*)$$

を得る。(3.3)の式において, $f(x) \in C_0^\infty(V_f)$, $f \geq 0$ とすれば
 $\int_{V_f} |P(x)|^{\lambda - \frac{n}{2}} f(x) dx$ は λ の entire function で, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に
 対して, f をうまくえらべば, その λ の近傍で $\int_{V_f} |P(x)|^{\lambda - \frac{n}{2}} f(x) dx$
 は, 0 でないようにできる。つまり, (3.18) の式にあらわれた
 $\lambda = \sigma_i$ における poles は $\xi_f(\lambda, L)$ の poles であり, また $\xi_f(\lambda, L)$
 は, それ以外には poles を持たない。

定理 3.4 仮定 1~4, 及び, 予想 3.3 が成立しているとき,
 $\xi_f(\lambda, L)$ は $\lambda \in \mathbb{C}$ に有理型函数に接続され, $\lambda = -\sigma_i$
 ($i=1, \dots, l$) に $m_i + 1$ 次の poles を持ち, それ以外では正則であ
 る。 $\lambda = \sigma_i$ において, $\xi_f(\lambda, L)$ をローラン展開したとき得られ
 る $(\lambda - \sigma_i)^{-q-1}$ の係数は,

$$(3.19) \quad \psi(L)^{-1} (-1)^q \sum_{k=0}^{m_i} a_i^k J_i^{*k-q}(\hat{f}, L^*) / \int_{V_f} |P(x)|^{\sigma_i - \frac{n}{2}} f(x) dx \quad (f \in C_0^\infty(V_f))$$

で与えられる。

佐藤-新谷[2]においては, 任意の $f \in \mathcal{S}(V_R)$ に対して,
 (3.9) が収束するという, より強い仮定をおいており,
 線型汎函数 $f \mapsto J_i^*(\hat{f}, L^*)$ は, V_R 上の G' -不変超函数
 (tempered distribution になっている) であるばかりでなく, G_R 相対
 不変な超函数になっっている場合を扱っている。このときには,

$m_i = 0$ であり, $\gamma_i(s, L)$ は simple pole を持つのみである。すなわち, このときは, $J_i^*(\hat{f}, L^*)$ そのものが (3.11) とみれば $J_i^*(\hat{f}, L^*)$ の線型汎函数への分解になる, といえる。

一般に (3.10) の形の (3.11) とみにするような線型汎函数の system $J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)$ ($k=0, \dots, m_i$) は一意ではない。しかし次の意味では一意に定まる。すなわち, $J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)$ ($k=0, \dots, m_i$) と $\tilde{J}_i^{*k}(\hat{f}, L^*)$ ($k=1, \dots, m_i$) と二つの線型汎函数の system とするときは, 適当な G_R^+ の元 g によつて

$$J_i^{*k}(\hat{f}_g, L^*) = \tilde{J}_i^{*k}(\hat{f}, L^*) \quad (i=1, \dots, m_i),$$

となる。

そこで超局所解析を用いて, 実際には, $J_i^*(\hat{f}, L^*)$ を計算する話にしよう。今予想 3.3 が成立しているとして, さらに,

(3.10) の m_i はすべて 0 である,

ことにする。このとき,

$$f \longmapsto J_i^*(\hat{f}, L^*) \quad f \in C_0^\infty(V_R - \Lambda^0)$$

は, G_R^+ -相対不変な超函数である。さらにもし,

$$h \longmapsto J_i^*(h, L^*) \quad h \in \mathcal{S}(V_R)$$

が tempered distribution になるならば, (つまり佐藤-新谷 [2] にあるのと同じ要請), 次のようにして計算することが出来る。

$\widetilde{\Sigma}_i = \{S_j; j \in \Sigma_i\}$ の G^1 -orbit の番号を付けかえて, $S_1^1, \dots, S_1^{p_1}, S_2^1, \dots, S_2^{p_2}, \dots, S_r^1, \dots, S_r^{p_r}$ とし, 1 が 1 である性質をみたすように並べかえられてあるとする。

(3.20) i) $\overline{S_j^k}$ ($k=1, \dots, p_j$) は, G^1 に他を含まない。

ii) $\bigcup_{k=1}^{p_k} \overline{S_k^k}$ は, $S_{k+1}^1, \dots, S_{k+1}^{p_{k+1}}, \dots, S_r^1, \dots, S_r^{p_r}$ をすべてを含む。

このような並べかえを実行するには, まず $S_1^1, \dots, S_1^{p_1}$ を $\widetilde{\Sigma}_1$ の元で, しかるに他の $\widetilde{\Sigma}_i$ の元の closure にも含まれないものとし, $\widetilde{\Sigma}_1 = \{S_1^1, \dots, S_1^{p_1}\}$ に対して同じようにして, $S_2^1, \dots, S_2^{p_2}$ を選び, 以外帰納的に $S_3^1, \dots, S_3^{p_3}, \dots$ を選んでゆけばよい。若 S_j^k ($j=1, \dots, r, k=1, \dots, p_j$) には, G^1 -invariant measure が入り, これを $d\nu_j^k$ と書くことにする。 $d\nu_j^k$ は $G_{\mathbb{R}}$ -相対不変で, すべて同じ character を持つ, i.e.,

$$(3.21) \quad \int f_j(x) \Big|_{S_j^k} d\nu_j^k = \chi(q)^{-\sigma_1 - \frac{n}{d}} \int f_j(x) \Big|_{S_j^k} d\nu_j^k.$$

ここで $f \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{R}})$ かつ $f|_{S_j^k} \in C_0^\infty(S_j^k)$ である。

さて, $h \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{R}})$ で, $h|_{S_j^k} \in C_0^\infty(S_j^k)$ をみたすものとする。こ

のとき,

$$(3.22) \quad K_j^{*k}(h) = \int_{G'/\Gamma} \sum_{x^* \in L^* \cap S_j^k} h(p^*(g) \cdot x^*) dg \\ = \int_{G'/\Gamma} \sum_{x^* \in L^* \cap S_j^k / \sim} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_x} h(p^*(g) \cdot x^*) dg \quad (\sim \text{は } \Gamma\text{-equivalence})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x^* \in L^* \cap S_j^R / \sim} \int_{G'_R / \Gamma_x} h(p^* g \cdot x^*) dg \\
&= \sum_{x^* \in L^* \cap S_j^R / \sim} \int h(x) d\nu_j^R(x) \cdot \mu(x^*),
\end{aligned}$$

を得る。ここで $\mu(x^*)$ は x^* による、このみきまる定数である。

ここでは $h(x) \geq 0$ で、和が収束するのだから、この級数は絶対収束している。ここで我々は、

$$(3.23) \quad S_j = \bigcup_{k=1}^{p_j} S_j^k \quad \text{上の measure} \quad d\nu_j = \sum_{k=1}^{p_j} \sum_{x^* \in L^* \cap S_j^k / \sim} \mu(x^*) d\nu_j^k(x)$$

に対して、ちくちくひとつ V_R 上の超函数 $T_j(x)$ が存在し、

$$i) \quad \text{Supp}(T_j(x)) \subseteq \overline{S_j}.$$

$$ii) \quad \int h(x) \Big|_{S_j} d\nu_j^k(x) = \int h(x) T_j(x) dx \quad \text{かつ}$$

$h \in \mathcal{S}(V_R)$ かつ $h(x) \Big|_{S_j} \in C_0^\infty(S_j)$ に対して成立つ。

$$iii) \quad T_j(p(g) \cdot x) = \chi(g)^{\sigma_j} T_j(x).$$

であることを仮定しよう。これは前の section (52) で述べたと

ころの方法(すなわち holonomy diagram を書くこと)によ

って、かなりの程度確かめることができる。このとき、

定理 3.5 (3.23) をみたす $T_j(x)$ ($j=1, \dots, r$) のうち、

$$(3.24) \quad \lim_{k \rightarrow G'_R} \int \sum_{j=1}^r \sum_{x^* \in L^* \cap S_j} f(p^* g \cdot x^*) dg = \sum_{j=1}^r \int f(x) T_j(x) dx$$

は, すべての $f(x) \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して $\mathcal{C}$ に対応する $\mathcal{C}''$, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}''$ は互いに存在する。

今, (3.24) の左辺は, $J_i^*(f, L^*)$ とあらわして置くから,

$$\begin{aligned} (3.25) \quad J_i^*(\hat{f}, L^*) &= \sum_{j=1}^r \int \hat{f}(x) T_j(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^r \int f(x) \hat{T}_j(x) dx. \end{aligned}$$

すなわち, $J_i^*(\hat{f}, L^*)$ を計算するには, $T_j(x)$ の Fourier 変換を計算すればよく, $T_j(x)$ が (3.23) iii) と対応することにより,

$$\begin{aligned} (3.26) \quad \int T_j(x) \exp(2\pi i \langle x, y \rangle) dx \Big|_{V_{\mathbb{R}} - \mathcal{L}'} \\ = \sum_{k=1}^l c_k |p(x)|^{-\sigma_i - \frac{n}{2}} \Big|_{V_{\mathbb{R}} - \mathcal{L}'} \end{aligned}$$

この c_k は §2 で述べたように, $T_j(x)$ の原点の *conormal* における *principal symbol* を計算することによ, て得られる。
§2, 例 2.1, 例 2.2 では, 実際にこの計算を行, た。

Remark 1 予想 3.3. は, μ と一般化して述べると, $\mathbb{R}^x$ の表現 (既約でない) の問題に帰着される。

「予想 3.3」 仮定 1, 2, 3, と 4-1) が成立し, §1 の最初に述べた条件をみたす。概均値ベクトル空間 (G, ρ, V) に対して,

$$J(\hat{f}, L^*) = \lim_{k \rightarrow G'_k} \int_K \sum_{x^* \in S \cap L^*} \hat{f}(p^*(g) \cdot x^*) dg$$

は $f \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S)$ に対して収束する。(これは Poisson の和公式 (3.17) より明らかである。) このとき, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_l\}$ という異なる複素数の集合と, $\{J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)\}$ ($i=1, \dots, l, k=0, \dots, m_i$) という線型汎函数, $f \mapsto J_i^{*k}(\hat{f}, L^*)$ の集合が存在して次の条件をみたす。

$$i) \quad J_i^{*k}(\hat{f}_g, L^*) = \chi(g)^{\sigma_i} \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (\log \chi(g))^j J_i^{*k-j}(\hat{f}, L^*) \right),$$

$$ii) \quad J(\hat{f}, L^*) = \sum_{i=1}^l \sum_{k=0}^{m_i} a_i^k J_i^{*k}(\hat{f}, L^*). \quad \square$$

そして, $g \mapsto J(\hat{f}_g, L^*)$ を $G'_k/G_k \cong \mathbb{R}_+^x$ の $C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S)$ の dual space への線型表現とみたとき, これが有限次元表現であれば, $\underbrace{\text{直和分解は可約成分}}_{\text{可約成分の直和に分解される。}}$ 可約成分の直和に分解される。その可約成分の basis が $\{J_i^{*k}(\hat{f}_g, L^*)\}_{k=0, \dots, m_i}$ である。

この予想についてもう少し, くわしく説明しよう。

$$(3.27) \quad C_0^\infty(V_i)^{G'_i} =_{\text{def}} \left\{ T \in \mathcal{D}'(V_{\mathbb{R}}); \exists f \in C_0^\infty(V_i), T(f) \neq 0 \right. \\ \left. \forall g_i \in G'_i, T_{g_i} = T \right\} / \sim$$

$\sim$ は同値関係で、 $T \sim T'$ とは $T(f) = T'(f)$ ($f \in C_0^\infty(V_i)$) が常に成立することとする。(仮定3) において、定義1に $f \mapsto I'(f, L)$ (ある $\sim$ は、 $f \mapsto I^*(f, L^*)$) などは、 $f \in C_0^\infty(V_i)$ に制限して考えると、 $C_0^\infty(V_i)^{G'}$ に λ 、 λ なることは容易にわかる。 $(\mathcal{D}'(V_R))$ は V_R 上の distributions のなす空間) として、 $G_R^+/G_1 \simeq \mathbb{R}_+^*$ の $C_0^\infty(V_i)^{G'}$ への表現 ρ 是

$$(3.28) \quad \rho: g \longmapsto T_{g^{-1}}$$

で定義する。ここで $T_{g^{-1}}: f \mapsto T(f_g)$ ($f \in C_0^\infty(V_i)$) によって定義される distribution である。さらに

$$(3.29) \quad \widetilde{C_0^\infty(V_i)}_1^{G'} = \left\{ T \in C_0^\infty(V_i)^{G'}; \forall f \in C_0^\infty(V_i) \text{ に対して, } T(f_g) \text{ は } g \rightarrow \infty \text{ のとき急減し,} \right\}$$

$$\widetilde{C_0^\infty(V_i)}_2^{G'} = \left\{ T \in C_0^\infty(V_i)^{G'}; \forall f \in C_0^\infty(V_i) \text{ に対して, } T(f_{g^{-1}}) \text{ は } g \rightarrow \infty \text{ のとき急減し,} \right\}$$

とおくとき、これらは表現 ρ の不変部分空間である。さて、 $I'(f, L)$ は、 $\widetilde{C_0^\infty(V_i)}_1^{G'}$ の元であることはすぐわかる。Poisson の恒等式にしたがって、(3.14) により、

$$I'(f, L) = \mathcal{U}(L)^{-1} (I^*(\hat{f}, L^*) + \sum_{i=1}^p J_i^*(\hat{f}, L^*))$$

と $I'(f, L)$ を分解したとき、 $I^*(\hat{f}, L^*)$ は $\widetilde{C_0^\infty(V_i)}_2^{G'}$ の元である。

このとき, $C_0^\infty(V_i)G'$ の中の適当な G 不変有限次元空間 A が有って,

$$(3.30) \quad I'(f, L) = \omega(L)^{-1} I^*(\hat{f}, L^*)$$

は, それに属するであろう, というのが我々の予想である。

実際, 現在までに計算されている, 概均質ベクトル空間に付随するゼータ函数については, このことは正しい。

一方で, この予想が正しいければ, Dirichlet 級数, (定義 3.1, i) は, 有限個の点に poles を持って全平面に有理型函数に接続されることがわかるだけでなく, poles におけるローラン展開の係数を求める問題は, 表現空間の basis を求める問題に帰着される。

また, もっと一般に 仮定 1, 2, 3, と共にせば, Dirichlet 級数は有限個の点に poles を持つのみで全平面で有理型になることは, 簡単に示され (佐藤-新谷 [2]) その poles の位数もわかる。また, 柏原の ζ -函数の根の有理性定理 ([10]) を使えば, poles の位置は, 実軸上にありしかも有理数であることがわかる。しかし, これらの議論は, 実際に poles のある位置でのローラン展開を計算することには, あまり手ごたりの乏しいであろう。

§4. 実例の計算.

前の section でも述べたように、現在のところ、ゼータ函数の residues を計算する統一的方法は思いついていないように思われる。我々は、ここで比較的かんたんな実例によって、residues の計算を行ってみるが、この例は、すでに良く知られた、Riemann のゼータ函数に帰着されるので、新しい結果ではない。しかし、これは、佐藤-新谷 [2] で与えられた理論の枠内には入っていない。計算は超局所解析を使って行われるが、いずれも §3 の議論がそのまま適用できるわけではない。

例 4.1. §2. 例 2.2 で扱った、平均値ベクトル空間を例にとる。 $V_{\mathbb{R}} - \mathcal{P} = V_1 \cup V_2$ と 2 つの Connected components に分かれる。ここで $V_1 = A_0^+$, $V_2 = A_0^-$ と、とる。§3. 定義 3.1. にしたがって、 $\xi_i(A, L)$ ($i=1, 2$) が定義できる。今、 $L = M(n, \mathbb{Z})$, $\Gamma = SL(n, \mathbb{Z}) \times SL(n, \mathbb{Z}) \subset G' = SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R})$ と定めるとき、 L は Γ -不変な $V_{\mathbb{R}}$ 内の lattice であり $\langle x, y \rangle = \text{tr}(x^t y)$ により、 $V_{\mathbb{R}}$ に内積を入れた、 $V_{\mathbb{R}}^*$ と同一視するとき、 $L^* = L$ である。このとき、 $\xi_i^{(n)}(A, L)$ は $\text{Re}(n) > n$ で絶対収束する級数である。この場合 $\xi_1^{(n)}(A, L) = \xi_2^{(n)}(A, L)$ である。

さて、この Residues を計算するために、 $f(x) \in C_0^\infty(V_i)$

として, (3.14) の式において, 次のように $J_i^*(\hat{f}_g, L^*)$ を定める。

$$(4.1) \quad J_i^*(\hat{f}_g, L^*) = \int_{G'/\Gamma} \sum_{x^* \in L \cap S_i} \hat{f}_g(p^*(g_i) \cdot x^*) dx_i \quad (i=1, \dots, n),$$

$$\text{ただし } S_i = p(G') \cdot \begin{bmatrix} I_{n-i} \\ 0_i \end{bmatrix} \text{ で, } G'/\Gamma \text{ 上の積分}$$

は, G'/Γ 内上の compact set K 上での積分したうえで
 K を G'/Γ に近づけた極限の意味である。

このとき, 次の成立する。

命題 4.1. 各 $J_i^*(\hat{f}_g, L^*)$ は収束する。さらに, その値は

$$\sum_{x_i \in S_i \cap L/\Gamma} \int_{G'/\Gamma} \sum_{x \in \Gamma \cdot x_i} \hat{f}_g(p^*(g_i) \cdot x) dx_i \quad (\sim \text{は } \Gamma\text{-equivalence})$$

に等しい。

ここで, $\sum$ の中の各項を計算するために少し記号を準備する。とにする。 $G^{(n)} = SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R})$, $\Gamma^{(n)} = SL(n, \mathbb{Z})$
 $SL(n, \mathbb{R})$ の元を $(x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ と行列で表示したとき, その不変測度を $dx^{(n)}$ と書き, 単位元において, $\prod_{i=1}^n dx_{ii} \prod_{i < j} dx_{ij}$ とする。
 $SL(n, \mathbb{R}) = K \cdot A \cdot N$ と岩沢分解したとき, $K = SO(n, \mathbb{R})$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}; a_i > 0, \prod a_i = 1 \right\}$, $N =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & n_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; n_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ とおいて, A, N 上の不変測度 $d^m a$
 $= \prod_{i=1}^{n-1} da_i/a_i$, $d^m n = \prod_{i < j} dn_{ij}$ で正規化する。 K 上の不変測
 度 $d^m k$ は, $\int_{SL(n, \mathbb{R})} f(x^m) dx^m = \int_{K \times N \times A} f(k \cdot n \cdot a) d^m k \cdot d^m n \cdot d^m a$ が成立す

るように定義するものとする。 ($f \in C_0^\infty(SL(n, \mathbb{R}))$)

命題 4.2. 1) $S_i \cap L / \sim$ の代表元として, 我々は,

$$(4.4) \quad x_i = \begin{bmatrix} X_{n-i} \\ 0_i \end{bmatrix}, \quad \left(X_{n-i} \text{ は, } M(n-i, \mathbb{Z})^+ \text{ の } \mathbb{R}^{(n-i)} \times \mathbb{R}^{(n-i)} \text{ による同値類の代表元。} \right)$$

$\mathbb{R}$ とすることが出来る。 ($M(n-i, \mathbb{Z})^+ = \{x \in M(n-i, \mathbb{Z}); \det x > 0\}$, 以下
 $M(n-i, \mathbb{Z})$ を $L^{(n-i)}$ と書くことにする。)

これは単因子定理よりの直接の結果である。

さて, $SL(n, \mathbb{R})$ の元と我々は, 次のようにして, 三つの部
 分に分解することが出来る。(ただし以下 $i \neq n$ とする)

$$(4.5) \quad SL(n, \mathbb{R}) = L_i \cdot \begin{bmatrix} a & \\ & a^* \end{bmatrix} \cdot G_i$$

$$\text{ここで, } L_i = SO(n) / \{(a, b) \in O(n-i) \times O(i); \det a \det b = 1\}$$

$$\begin{bmatrix} a & \\ & a^* \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a I_{n-i} & \\ & a' I_i \end{bmatrix}; a > 0, a' = a^{(n-i)/i} \right\}$$

$$G_i = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}; A \in GL(n-i, \mathbb{R}), B \in M(n-i, i, \mathbb{R}), \right. \\ \left. D \in GL(i, \mathbb{R}), (\det A)^2 = (\det D)^2 = 1, \det(A) \det(D) = 1 \right\}$$

G_i と $[^a a^*]$ は, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ による $SL(n, \mathbb{R})$ の subgroups であり, L_i は compact homogeneous space で, $SO(n)$ に対する L_i 上の不変測度 dl_i である.

$$\int dl_i \int f(l_i \cdot (a, b)) da db = \int f(k) dk \quad (f \in C^\infty(SO(n)))$$

$SO(n)$

に δ, τ を入れる。このとき, $x_i \in (4.4)$ の形の元として,

$$(4.6) \quad \int_{G'/\Gamma} \sum_{x \in \Gamma x_i} \widehat{f}_g(p^*(g_i) \cdot x_i) dg_i \\ = \int_{G'/\Gamma_{x_i}} \widehat{f}_g(p^*(g_i) \cdot x_i) dg_i$$

ここに G'/Γ_{x_i} 上の積分の意味は, K を G'/Γ の compact subset として, $K_{x_i} = \bigcup_{x \in \Gamma_{x_i}} K \cdot x \subset G'/\Gamma_{x_i}$ 上に積分し, K を G'/Γ に近づけた時の極限の意味である。(4.5)の分解を使って,

$$(4.7) \quad p^*(g_i) x_i \\ = l \cdot \begin{bmatrix} a & \\ & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n-i} & \\ & O_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & \\ & tB_2 + D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & \\ & b^* \end{bmatrix}^t l' \\ = l \cdot \begin{bmatrix} a & \\ & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 X_{n-i} A_2 & \\ & O_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & \\ & b^* \end{bmatrix}^t l'$$

そこで $G_i \times G_i \subset SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R}) \subset G'$ に Γ_{x_i} は含まれる

ので, (4.6) の積分を $\int_{G'/\Gamma_{x_i}} = \int_{G'/G_i \times G_i} \int_{G_i \times G_i / (G_i \times G_i)_{x_i}} \int_{(G_i \times G_i)_{x_i} / \Gamma_{x_i}}$ と分けて計算する。 $\int_{(G_i \times G_i)_{x_i} / \Gamma_{x_i}}$ 上の積分は有界で,

$$(4.8) \text{Vol} (G_i \times G_i)_{X_i} / \Gamma_{X_i}$$

$$= \text{Vol} (SL(n-i, \mathbb{R}) / \Gamma^{(n-i)} \cap X_i^{-1} \Gamma^{(n-i)} X_i) \times \text{Vol} (SL(i, \mathbb{R}) / \Gamma(i))^2 \\ \times \text{Vol} (M(i, n-i, \mathbb{R}) / M(i, n-i, \mathbb{Z}))^2 \\ = \mu^{(n-i)}(X_i) \times \text{Vol} (SL(i, \mathbb{R}) / \Gamma(i))^2.$$

$$\text{と なる。} \quad (\mu^{(n-i)}(X_i))_{\text{def}} \text{Vol} (SL(n-i, \mathbb{R}) / \Gamma^{(n-i)} \cap X_i^{-1} \Gamma^{(n-i)} X_i)$$

に 0, 7 (4.6) の積分は,

$$(4.9) \int_{L_i \times L_i'} d\ell d\ell' \int_0^\infty a^{n(n-i)} \frac{da}{a} \int_0^\infty b^{n(n-i)} \frac{db}{b} \int_{(G_i \times G_i) / (G_i \times G_i)_{X_i}} dA_1 dA_2 \\ \widehat{f}_g(\ell \cdot \begin{bmatrix} a & \\ & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 X_{n-i}^t A_2 & \\ & O_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b^* \end{bmatrix} \ell') \\ \times \mu^{(n-i)}(X_i) \times \text{Vol} (SL(i, \mathbb{R}) / \Gamma(i))$$

と書ける。この積分は well defined ではないが, $f(x)$ を極座標 $(r, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ で表示したとき, $f(x) = f_1(r) f_2(z)$ と, 変数分離できるものとしたとき,

$$(4.10) \lim_{a' \rightarrow \infty} \lim_{b' \rightarrow \infty} \int_{L_i \times L_i'} d\ell d\ell' \int_0^{a'} a^{n(n-i)} \frac{da}{a} \int_0^{b'} b^{n(n-i)} \frac{db}{b} \int_{(G_i \times G_i) / (G_i \times G_i)_{X_i}} dA_1 dA_2 \\ \widehat{f}_g(\ell \cdot \begin{bmatrix} a \cdot b & A_1 X_{n-i}^t A_2 \\ & O_i \end{bmatrix} \ell') \mu^{(n-i)}(X_i) \times \text{Vol} (SL(i, \mathbb{R}) / \Gamma(i))$$

とすれば well defined である (と甘んじ), また, この値が (4.6) の積分に等しいことも示せる。この証明のためには, $SL(n, \mathbb{R}) / SL(n, \mathbb{Z})$ の基本領域を *Siegel set* と呼ばれる集合で近

似してやらねばならないが、ここでは省略して、実際に(4.10)の値を計算することにする。

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad & \lim_{\substack{a' \rightarrow \infty \\ b' \rightarrow \infty}} \int d\ell d\ell' \int_0^{a'} a^{n(n-i)-1} da \int_0^{b'} b^{n(n-i)-1} db \int_{(G_i \times G_i)/(G_i \times G_i)_{X_i}} dA_1 dA_2 \\
 & \widehat{f}_g(\ell \cdot \begin{bmatrix} a \cdot b \cdot A_1 X_{n-i}^* A_2 & \\ & 0_i \end{bmatrix} \cdot \ell') \\
 &= \lim_{\substack{a' \rightarrow \infty \\ b' \rightarrow \infty}} \int d\ell d\ell' \int_0^{a'} a^{n(n-i)-1} da \int_0^{b'} b^{n(n-i)-1} db \int_{SL(n-i, \mathbb{R})^\pm} dx^{(n-i)} \\
 & \widehat{f}_g(\ell \cdot \begin{bmatrix} a \cdot b \cdot x^{(n-i)} & \\ & 0_i \end{bmatrix} \cdot \ell') \cdot \det(X_i)^{-n}
 \end{aligned}$$

ここで、 $SL(n-i, \mathbb{R})^\pm = \{x \in GL(n-i, \mathbb{R}); (\det x)^2 = 1\} \cong (G_i \times G_i)/(G_i \times G_i)_{X_i}$.

さらに $\lim$ の中は (with substitution to f_g のみ) に f と書く、

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad & \int d\ell d\ell' \int_0^{a'} a^{n(n-i)-1} da \int_0^{b'} b^{n(n-i)-1} db \int_{SL(n-i, \mathbb{R})^\pm} dx^{(n-i)} \\
 & \int_{M(n, \mathbb{R})} dy \cdot f(y) \cdot \exp(-2\pi \sqrt{-1} \langle y, \ell \cdot \begin{bmatrix} a \cdot b \cdot x^{(n-i)} & \\ & 0_i \end{bmatrix} \cdot \ell' \rangle) \\
 &= \int d\ell d\ell' \int_0^{a'} a^{n(n-i)-1} da \int_0^{b'} b^{n(n-i)-1} db \int_{SL(n-i, \mathbb{R})^\pm} dx^{(n-i)} \\
 & \int a^{-n^2} dy \cdot f(a^{-1}y) \exp(-2\pi \sqrt{-1} \langle y, \ell \cdot \begin{bmatrix} b \cdot x^{(n-i)} & \\ & 0_i \end{bmatrix} \cdot \ell' \rangle)
 \end{aligned}$$

ここで、 $f_g^*(y) = \int_0^y a^{-n^2} f(a^{-1}y) da$ とおく。 $f(x) = f_1(r) f_2(\tau)$

と、極座標 $(r, \tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n^2-1}$ と書けば、 $f_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f_2 \in C_0^\infty(S^{n^2-1})$

$- \{P(x)=0\}$ とすると、 $f_g^*(y) = f_g^*(r) \cdot f_2(\tau)$ とある。 $\forall g > 0$

に於いて,

$$\exists r_0 > 0, \quad \forall r < r_0 \Rightarrow f_{18}^*(r) = \int_0^\infty a^{-\kappa i - 1} f_1(a^{-1}, r) da$$

$$\exists r_1 > 0, \quad r > r_1 \Rightarrow f_{18}^*(r) = 0$$

となることが示される。

一方, $\forall p(x) \in \mathcal{S}(V_R)$ に於いて,

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \int dl dl' \int_0^{l'} l^{n(n-i)-1} dl \int_{SL(n-i, \mathbb{R})^\pm} dx^{(n-i)} p(l, [l \cdot x^{(n-i)}]_{0_i}^{l'}) \\ &= \int_{V_R} p(x) T_i(x) dx \quad \dots \dots \dots (4.13) \end{aligned}$$

と書くことが出来る。ここに, $T_i(x)$ は $\bar{S}_i$ 上に support を持つ超函数で, $T_i(g \cdot x) = \chi(g)^{-i} T_i(x)$ であり, $A_i = T_{S_i}^* V_R$ 上の principal symbol は, $(2\pi)^{-i/2} |P_{A_i}(x)|^{-i} \sqrt{|dy|/|dx|}$ となるものである。

(一般に $T(x)$ は homogeneous な超函数とすれば, 極座標 (r, τ) を使, $T(x) = T(r, \tau)$ と書くことにし, 自然に $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ 上の超函数とみなすことが出来る。一方 $p(x)$ を $r=0$ の近傍で r について homogeneous で, τ については C^∞ , V_R 上で compact support を持つ連続函数とすると,

$$(4.14) \quad \int p(x) T(x) dx = \int_0^r r^{n-1} dr \int d\tau p(r, \tau) \cdot T(r, \tau)$$

として, 積分が定義出来る。

$T_i(x)$ は homogeneous な超函数で, その homogeneous degree は, $-ni$ である。よ, てその Fourier 変換 $\widehat{T}_i(x)$ はやはり homogeneous な超函数で, homogeneous degree は, $ni - n^2$ である。さらに $f_g^*(y)$ は compact support を持ち, て方向に (∞, ∞) の近傍で, V について $-ni$ 次 homogeneous である。

以上のことに注意すれば, (4.12) は,

$$(4.15) \quad (4.12) = \int dy \int dx \ f_g^*(y) T_i(x) \exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle) \\ = \int f_g^*(y) \widehat{T}_i(y) dy$$

として定義できる。

そこでこれを計算するために, 次のようにして超局所解析を利用する。 $T_i^\lambda(x) \in V_{\mathbb{R}}$ 上の holomorphic parameter λ を持つ超函数で, $A_i = T_{S_i}^* V_{\mathbb{R}}$ 上の principal symbol が, $(2\pi)^{-i/2} |P_{A_i}(x)|^\lambda \sqrt{|dy|}/\sqrt{|dx|}$ で与えられるもので, $\lambda = -i$ のとき, $T_i^\lambda(x) = T_i(x)$ となるものとする。このような $T_i^\lambda(x)$ の存在は §2. の議論から保証される。さらにその Fourier 変換は

$$(4.16) \quad \int T_i^\lambda(y) \exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle) dy \Big|_{V_{\mathbb{R}} - \mathcal{S}} \\ = (2\pi)^{ni - \frac{n^2+i^2}{2}} \prod_{j=i+1}^n \frac{\Gamma(\lambda + j)}{\sqrt{2\pi}} \cdot (2 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}(\lambda + j))) \\ |P(y)|^{-\lambda - n} \Big|_{V_{\mathbb{R}} - \mathcal{S}} (= A_i(\lambda) \cdot |P(y)|^{-\lambda - n} \Big|_{V_{\mathbb{R}} - \mathcal{S}} \text{ と書ける})$$

で与えられる: $\lambda = -i$, principal symbol の計算に $\lambda = -i$ とおける。

$A_i(\lambda)$ は $\lambda = -i$ におけると, $i = (n-1)$, $i = (n-2)$ のとき, 一位の zero であり $(n-3)$ 以下のときは, 2位以上の zero を持つことに注意しよう。そこで, (4.15) の計算を続けるために

$$(4.16) \quad \int f_g^*(y) \widehat{T}_i^A(y) dy.$$

を計算して, $\lambda = -i$ とおけばよい。

$$(4.17) = \int f_{i,g}^*(r) f_2(\tau) A_i(\lambda) |P(\tau)|^{-\lambda-n} r^{-n\lambda-n^2} r^{n^2-1} dr d\tau \\ = \int_0^\infty A_i(\lambda) f_{i,g}^*(r) r^{-n\lambda-1} dr \int f_2(\tau) |P(\tau)|^{-\lambda-n} d\tau$$

ここで, $r < r_0$ ならば, $f_{i,g}^*(r) = \int_0^\infty a^{ni-1} f(a^{-1}r) da = f_i^*(r)$ であり, $f_i^*(r) = r^{-ni} f_i^*(1)$ であることと, $(\lambda+1) r_+^\lambda|_{\lambda=-1} = \delta(r)$ であること, 及び $f_{i,g}^*(r)$ が compact support を持つことに注意すれば,

$$(4.18) \quad A_i(\lambda) \cdot f_{i,g}^*(r) r^{-n\lambda-1} \Big|_{\lambda=-1} = \frac{A_i(\lambda)}{-n(i+\lambda)} \Big|_{\lambda=-1} f_i^*(1) \delta(r)$$

を得る。よって, したがって,

$$(4.19) \quad \int f_g^*(y) \widehat{T}_i^A(y) dy \\ = \frac{A_i(\lambda)}{-n(i+\lambda)} \Big|_{\lambda=-1} \cdot f_i^*(1) \cdot \int f_2(\tau) |P(\tau)|^{-i-n} d\tau \\ = A_i(\lambda) / -n(i+\lambda) \Big|_{\lambda=-1} \cdot \int f(y) |P(y)|^{-i-n} dy$$

を得る。

以上 (4.9) (4.13) をまとめると, (4.6) は

$$(4.20) \quad \int_{G/\Gamma} \sum_{x \in \Gamma \backslash X_i} \widehat{f}_g(p^* q_i, x_i) dg,$$

$$= \det(X_i)^{-n} \cdot \mu^{(n-i)}(X_i) \cdot \text{Vol}(SL(i, \mathbb{R})/\Gamma(i))^2 \times (4.12)$$

$$= \det(X_i)^{-n} \cdot \mu^{(n-i)}(X_i) \cdot \text{Vol}(SL(i, \mathbb{R})/\Gamma(i))^2 \times (4.19)$$

となる。したがって、 $\zeta_1^{(n-i)}(\Delta, L^{(n-i)}) = \sum_{\substack{X_i \in M(n-i, \mathbb{Z})/\sim \\ \det X_i > 0}} \mu^{(n-i)}(X_i) \det(X_i)^{-\Delta}$

$$(4.21) \quad J_i^*(\widehat{f}_g, L^*) = \zeta_1^{(n-i)}(n, L^{(n-i)}) \cdot \text{Vol}(SL(i, \mathbb{R})/\Gamma(i))^2 \\ \times A_i(\Delta) (-n(i+\Delta))^{-1} \Big|_{\Delta=-i} \int \widehat{f}_g(y) |P(y)|^{-i-n} dy$$

であり、したがって、 $\zeta, J_i^*(\widehat{f}_g, L^*) = \chi(g)^{-i} J_i^*(\widehat{f}, L^*)$ が得られる。(i=n)

一方 $i=n$ の場合、

$$(4.22) \quad J_n(\widehat{f}_g, L^*) = \int_{G/\Gamma} \widehat{f}_g(0) dg = \widehat{f}_g(0) \cdot \text{Vol}(SL(n, \mathbb{R})/\Gamma(n))^2 \\ = \int f_g(x) dx \cdot \text{Vol}(SL(n, \mathbb{R})/\Gamma(n))^2$$

であるから、やはり $J_n^*(\widehat{f}_g, L^*) = \chi(g)^{-n} J_n^*(\widehat{f}, L^*)$ を得る。

したがって、次の定理を得る。

定理 4.3. $\zeta_i^{(n)}(\Delta, L)$ は、 $\text{Re}(\Delta) > n$ で、定義され、 $\Delta = n, (n-1), \dots, 1$, 一般の poles を持つ有理型関数として全平面に解析延長され、
possible

$$\Delta = n \text{ での } \text{Vol}(SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z}))^2$$

$$\Delta = i \quad (1 \leq i \leq n-1) \text{ での } ,$$

$$\xi_1^{(n-1)}(n, L^{(n-1)}) \cdot \text{Vol} (SL(i, R)/SL(i, Z))^2 \\ \times A_i(\lambda) (-n(i+\lambda))^{-1} /_{\lambda=-i}$$

を留数に持つ。特に $A_i(\lambda)$ は $i \leq n-3$ ならば, $\lambda = -i$ で 2 階以上の zero を持つから, $\lambda = (n-3), (n-4), \dots, 1$ では, holomorphic になる。

最後に、例 4.2. として、新谷 [8] でとりあげられた ゼータ関数において、やはり今までのベテレート方法が有効であるので取りあげたかったが、すでに予定の紙面を大きく超しているのと、割愛する。かんたんに結果を述べると、[8], p50 において定義される ゼータ関数 $\xi_i(\lambda, L)$ は $\lambda = \frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}, \dots, 1$ に一位の possible poles を持つが、このうち、 $\lambda = 1$ におけるものを除いては、§3 の議論がそのまま適用でき、[8] では計算されていないものも含めて、その residues は計算できる。 $\lambda = 1$ においては同じ方法で求めた値が、見かけ上発散していることがあるので、それに注意さえすれば、実際に収束した値に直すことができる。

References

- [1] 佐藤幹夫-新谷卓郎; 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み 15-1 (1970), 85-157.
- [2] M.Sato and T.Shintani; On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. , 100, 1 (1974), 131-170
- [3] 木村達雄; 概均質ベクトル空間の理論, 数学 32-2 (1980), 97-119.
- [4] M.Sato, M Kashiwara, T.Oshima and T.Kimura; Micro local analysis of prehomogeneous vector spaces. to appear in Inv. Math.
- [5] M.Kashiwara, T.Kimura and M.Muro; Microlocal calculus of simple holonomic system and its application, Lecture Note (Preprint)
- [6] 柏原正樹-三輪哲二; *Micro local calculus* と概均質ベクトル空間の相対変式の *Fourier* 変換, 数研研講究録 238.
- [7] T.Shintani; On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan, 24 (1972) 132-188
- [8] T.Shintani; On zeta functions associated with the vector space of Quadratic forms, J.Fac. Sci. Univ, Tokyo, 22(1975) 25-65.
- [9] 木村達雄; 概均質ベクトル空間の紹介について;
(手紙及び個人的対話, 及び数研研講究録)