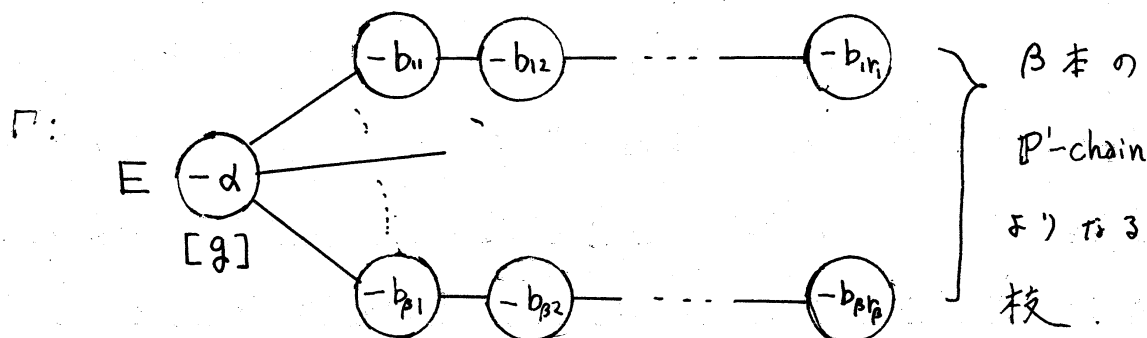


"Star-shaped" resolution を持つ Gorenstein 特異点 について

筑波大 数学系 泊 昌孝 (Masataka TOMARI)

このノートは [T-W2] の続きとして、渡辺敬一氏 (東海大理) と
及び、日高文夫氏 (専修大・北海道短大) との、議論にもと
づいた内容を紹介するものである (詳細は、[H-T], [T-W1] と
参照されたい。)。

§0. 以下、特に断わらぬ限り、基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ である
とする。正規 2 次元特異点 (W, w) であって、特異点解消 $f:$
 $(\tilde{X}, A) \longrightarrow (W, w)$ に於ける例外集合 A の weighted dual graph
 Γ が、次のような "star-shaped" graph (i.e., tree graph で
あって、central curve と呼ばれる vertex が高々 1 つしかない
ようなもの) としよう:



この時、(特に central curve が存在する時)、局所環 $\mathcal{O}_{W,w}$ に filtration $\{F^R\}_{R \geq 0}$ を $F^R \subseteq f_*(\mathcal{O}_X(-R \cdot E)) \subseteq \mathcal{O}_{W,w}$ によって定め、次数付環 $G = \bigoplus_{R \geq 0} F^R / F^{R+1}$ と $\mathcal{O}_{W,w}$ を比較しようという事を考えて、次の問題として挙げた [T-W2]:

問題 G が正規となる為の良き条件を求めよ。

すでに示された事柄の中で基本的と思われるのは、 G が孤立特異点のみを持つ integral domain になり、

$$0 \rightarrow G \rightarrow R(E, D) \rightarrow H_{G+}^1(G) \rightarrow 0$$

と書かれる事である。ただし、 $R(E, D)$ は、上記の例外集合より決まる E 上の $\mathbb{Q}$ -divisor D を用いて、 $R(E, D) = \bigoplus_{R \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(R \cdot D))$ としてあそわされる normal two-dimensional graded ring であって、その特異点解消の例外集合に、与えられた Γ があそわれるものである (Pinkham-Demazure's construction)。

また、 $H_{G+}^1(G)$ は filtered blowing-up $X = \text{Proj}(\bigoplus_{R \geq 0} F^R) \xrightarrow{\psi} \text{Spec}(\mathcal{O}_{W,w}) = W$, with $E = \text{Proj}(G) \subset X$, を用いて次のようにあそわされる graded $R(E, D)$ -module U と同型である:

$$U = \bigoplus_{R \geq 0} \text{Ker} \left\{ R^1 \psi_* (\mathcal{O}_X(-(R+1)E)) \rightarrow R^1 \psi_* (\mathcal{O}_X(-RE)) \right\}.$$

このように、 $H_{G+}^1(G)$ を書いてみると、次の定理は、 (W, w) の Gorenstein 性と G の正規性の関係について、基本的である。

定理 (定理3 [T-W2]). 上の状況で、 (W, w) が Gorenstein 特異点になる為には、 $R(E, D)$ が Gorenstein 環であって、かつ

自然な制限写像 $H^1(X, \mathcal{O}_X(-a(R) \cdot E)) \cong R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-a(R) \cdot E)) \longrightarrow H^2_m(\mathcal{O}_{W,w})$
 $\cong H^1(X-E, \mathcal{O}_X)$ が単射となる事である。

ただし, $a(R)$ とは, $a(R(E, D)) = \max \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid H^2_{R(E, D)_+}(R(E, D))_\alpha \neq 0 \} = \max \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid H^1(E, \mathcal{O}_E(\alpha \cdot D)) \neq 0 \}$ として定まる整数である ($[G-W], [W]$).

以下では, (W, w) の Gorenstein 性から G の正規性が従うかどうかを [T-W2] に引き続いて論ずる (答えは, 残念ながら, まだ open である)。

§1. A remark on singularities arising from the minimal section of ruled surfaces ($/\mathbb{C}$).

(1.1). (以下に述べる, 日高^[CH1]によって考察された特異点は, 別の表示にて O. Riemenschneider [R] により導入されたものと一致する.) A を genus g の非特異代数曲線であり, $L \rightarrow A$ を正の degree を持つ直線束とする。 L にふづくする可逆層をやはり L とおさわす。 $\mathcal{E}_\sharp$ を cohomology 類 $\mathcal{E}_\sharp \in H^1(A, L) = H^1(A, \text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(L^{-1}, \mathcal{O}_A))$ にふづくして, 次のように L^{-1} の $\mathcal{O}_A$ による extension として得られる rank 2 の locally free $\mathcal{O}_A$ -module とする:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{E}_\sharp \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow 0$$

$S_{\mathbb{Z}}$ を A 上の ruled surface であって, $S_{\mathbb{Z}} = \text{Proj}(\bigoplus_{d \geq 0} S^d(\mathcal{E}_{\mathbb{Z}})) \longrightarrow A$ として得られるものとし, $X_{\mathbb{Z}}$ をその minimal section の適当な 1-convex neighborhood とする。 $(X_{\mathbb{Z}}, A) \longrightarrow (W_{\mathbb{Z}}, w_{\mathbb{Z}})$ を 2次元正規特異点への blowing-down とする。我々の言葉で [T-W2] 言えば, [R] の議論は「この resolution より決まる filtration について, $H_{G+}^1(G) = 0$ ならば, $H^0(A, L^{\otimes k}) \cdot \mathbb{Z} = 0$ in $H^1(A, L^{\otimes k+1})$ for $k \geq 1$ 」を示している。Riemenschneider は, $g \geq 2$ なる A に関して, 更に $H^0(A, L) \cdot H^1(A, L) \neq 0$ となる L の存在を示している (ゆえに, $g \geq 2$ なる場合では, $H_{G+}^1(G) \neq 0$ となる例が Example (2.2) [T-W2] の拡張としてつくれる。)。更に, 日高 [H1, H2] は, $(S_{\mathbb{Z}}, A) \longrightarrow (S'_{\mathbb{Z}}, w_{\mathbb{Z}})$ なる blowing-down で得られる compact 解析空間 $S'_{\mathbb{Z}}$ の代数性及び射影性を研究して, 次の事実を示した。

定理 (1.2) (p157 [H1]). 我々の記号で, $(W_{\mathbb{Z}}, w_{\mathbb{Z}})$ が Gorenstein であって, $\text{coker } \mathbb{Z} \neq 0$ in $H^1(A, L)$ と仮定する。この時:

- (1) 基礎体の標数 = zero $\Rightarrow L \cong K_A$
- (2) 基礎体の標数 $p > 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{N}, L^{\otimes \alpha} \cong K_A$
with $p \mid \alpha - 1$.

この定理の系として, 基礎体の標数が zero の時, 日高の結果

により, 「(1.1)で導入した (W_i, w_i) が Gorenstein 特異点ならば,

$\Omega = 0$ (i.e., G が正規)」 がわかる。

以下, この節では, 上の (1) $\mathbb{E}/\mathbb{C}$ について, [T-W] Theorem 3 を用いて証明する事にする。

(1.3). $X_{\mathbb{E}}$ の表示. $\mathcal{E}_{\mathbb{E}}^* \longrightarrow A$ $\mathbb{E}$ $\mathcal{E}_{\mathbb{E}}$ の dual 束, $\mathcal{I}_A$ $\mathbb{E}$ $\mathcal{E}_{\mathbb{E}}^* \longrightarrow A$ の zero section の $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^*}$ における ideal sheaf, α $\mathbb{E}$ $(\mathcal{E}_{\mathbb{E}}^*)^{\wedge} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{E}}^* \mathbb{E}$ $\mathcal{E}_{\mathbb{E}}^*$ の total space の $\mathcal{I}_A$ による blowing-up とする。 $\alpha^{-1}(A) = \text{Proj}(\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_A^d / \mathcal{I}_A^{d+1}) = \text{Proj}(\bigoplus_{d \geq 0} S^d(\mathcal{E}_{\mathbb{E}})) = S_{\mathbb{E}}$ である。 $\mathcal{E}_{\mathbb{E}}^*$ の変換系を用いて, $X_{\mathbb{E}}$ をあらわしてみよう。定義により, 我々は $-\mathbb{E} \in H^1(A, L)$ にふくめる完全系列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{E}}^* \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

を有する。 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ $\mathbb{E}$ A の Stein open covering であって,

$L|_{U_i} \cong \mathcal{O}_A|_{U_i}$ なる局所自明化を与えるものとする。 $H^1(U_i, L)$

$= 0$ なるので, extension sequence は split して次のように書かれる:

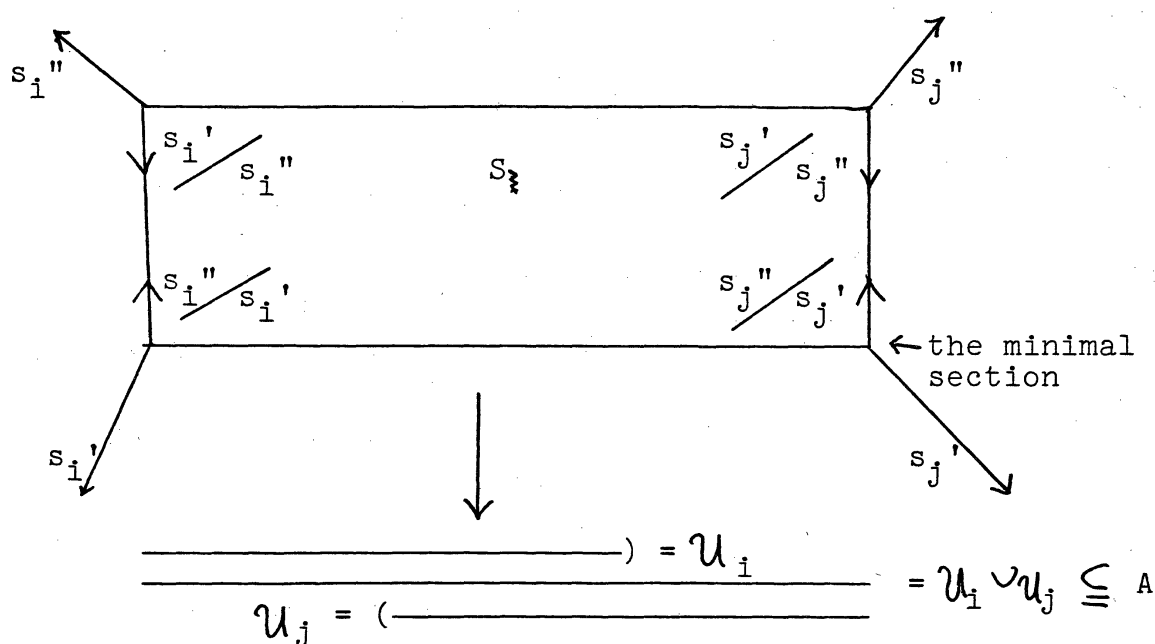
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathbb{E}}^*|_{U_i} = L|_{U_i} \oplus \mathcal{O}_A|_{U_i} & \longrightarrow & L|_{U_j} \oplus \mathcal{O}_A|_{U_j} = \mathcal{E}_{\mathbb{E}}^*|_{U_j} \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O}_A|_{U_i} \oplus \mathcal{O}_A|_{U_i} & & \mathcal{O}_A|_{U_j} \oplus \mathcal{O}_A|_{U_j} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (s_i', s_i'') & \longrightarrow & (s_j', s_j'') \end{array}$$

with

$$s_j' = (s_i' + (-\xi_{ij})_i \cdot s_i'') \cdot f_{ij} \quad \text{and} \quad s_j'' = s_i''$$

ただし, $(-\xi_{ij})_i$ は, $\{\xi_{ij}\} = \xi \in \check{H}^1(\mathcal{U}, L)$ について,
 $-\xi_{ij}$ の $H^0(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j, L)$ の $L/\mathcal{U}_i \cong \mathcal{O}_A/\mathcal{U}_i$ による自明化を用
 いてあらわしたものの, そして $\{f_{ij}\}$ は L の変換系である
 (i.e., L の section は $\mathcal{U}_j = \mathcal{U}_i f_{ij}$ となる)。

$\mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_j$ 上 $(\xi_{\xi}^*)^{\wedge}$ は, 次のようにあらわされる:



ここで $X_{\xi} = \bigcup \mathcal{U}_i \times \mathbb{C}$ の $\mathcal{U}_i \times \mathbb{C} \cap \mathcal{U}_j \times \mathbb{C}$ 上での
 りあわせは

$$(1.3.1). \quad \frac{s_j''}{s_j'} = (f_{ij})^{-1} \cdot \left(1 + (-\xi_{ij})_i \cdot \left(\frac{s_i''}{s_i'} \right) \right)^{-1} \cdot \left(\frac{s_i''}{s_i'} \right)$$

である。

(1.4) $T \subseteq \mathbb{C}$ を zero の近傍とし, $X_{t\xi}$, $t \in T$ は
 cohomology 類 $t \cdot \xi \in H^1(A, L)$ にふずいする 1-convex mfd と

する。union $\mathcal{X} = \bigcup_{t \in T} X_{t, \xi}$ は T 上の 1-convex map

$\omega: \mathcal{X} \longrightarrow T$ を決める。 $\mathcal{X}$ のはりあわせは,

$$(1.4.1) \quad v_j = (f_{ij})^{-1} \cdot \left(1 + (-t, \xi_{ij})_i \cdot v_i \right)^{-1} \cdot v_i$$

on $U_i \times \mathbb{C} \times T \cap U_j \times \mathbb{C} \times T$ となり, まさに Riemenschneider

[R] の与えたものと一致する。

Lemma (1.5). $S \in H^0(A, L^R)$, $R \geq 1$ について, $S = \{S_i\}$
 $\in \check{H}(U, L^R)$ とあそわす。 $A \times T$ の近傍 $M \subset \mathcal{X}$ 上の

正則関数 F であって $F|_{U_i \times \mathbb{C} \times \{t=0\}} = S_i(y) \cdot (u_i)^R +$

higher terms of order $\geq R+1$ (with respect to u_i) となっ

たとせよ ($S(y)$ の, y は A の local coordinate)。 (このような時

" S は extendable" と以下では呼ぶ事にする。

この時, $R \cdot S \cdot \xi = 0$ in $H^1(A, L^{R+1})$ である。

証明は, p98 of [R] と同様

(1.6) 次に, $R(E, D)$ の元について, 上で定めた "extendability"

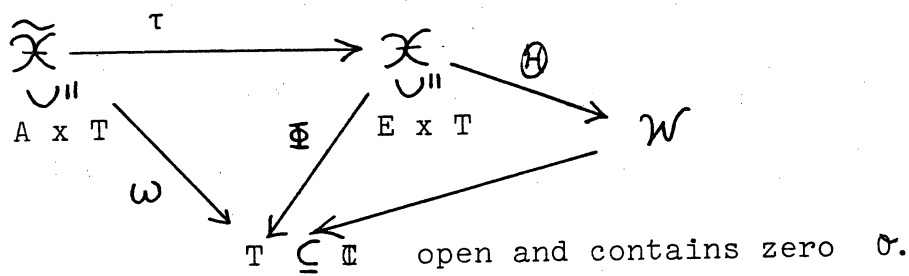
に相当する状況が起る充分性を論じる ((1.8) の使い方, 参)!

$\omega: \tilde{\mathcal{X}} \longrightarrow T$ は, 2次元 1-convex mfd の族で

あって, 各 fiber の maximal compact set は, ある "一定の"

"star-shaped" A (i.e., Pinkham-Demazure 構成が, 解析的

に constant) であるとし,



$\tau: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ は β 本の枝の simultaneous blowing-down/ T とする。さらに, $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{W}$ と $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$ は $A \times T$ と $E \times T$ の T 上の relative blowing-down とする。[T-W2] §1 と同様に

$$(1.6.1) \quad \frac{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(-k \cdot E \times T)}{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(-(k+1)E \times T)} \cong \mathcal{O}_{E \times T}([kD] \times T)$$

が $k \in \mathbb{Z}$ によって成立し, $\mathcal{O}_T$ -free modules になる。

Lemma (1.7) 上の状況 (1.6) で, k_0 integer ≥ 0 を考えて固定する。各 fiber ごとに, §0 の意での $\mathbb{L}$ を考え $\mathbb{L}(X_t)$, その k 次部分を $\mathbb{L}(X_t)_k$ などと記す。今,

$$\mathbb{L}(X_t)_k = 0 \quad t \neq 0, \quad k \geq k_0$$

と仮定する。すると,

$$R^1 \mathbb{H}_* (\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(-(k+1)E \times T)) \longrightarrow R^1 \mathbb{H}_* (\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(-kE \cdot T))$$

は $k \geq k_0$ で単射である。

証明は standard.

(1.8) 定理(1.2)(1) の証明. (1.6) の diagram に (1.4) の $\pi \rightarrow T$ をあてはめる (今, π は trivial である). $(W_3, w_3) \cong (W_{t_3}, w_{t_3}), t \neq 0$, が Gorenstein である と仮定する. Theorem [T-W2] より, $L(X_t)_k = 0$ for $k \geq a(R(A, L)) - 1, t \neq 0$ である. Lemma(1.7) より, 次の図式を得る:

($a(R(A, L)) = a$ と書く.)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_*(\mathcal{O}_X(-(a-1)E \times T)) & \rightarrow & \mathbb{H}_*(\mathcal{O}_{E \times T}(L^{a-1} \times T)) \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathbb{H}_*(\mathcal{O}_{X_0}(-(a-1)E)) & \rightarrow & \mathbb{H}_*(\mathcal{O}_E(L^{a-1})) = H^0(A, L^{a-1}) \\ & & \downarrow 0 \end{array}$$

ここで, λ の surjectivity は (1.6.1) の π の $\mathcal{O}_T$ -freeness による。ゆえに, $H^0(A, L^{a-1})$ は Lemma(1.5) の意味で extendable であり, もし $a-1 \geq 1$ ならば, $H^0(A, L^{a-1}) \cdot \pi = 0$ となり Serre-duality に反する (Lemma(1.5)). ゆえに $a-1 = 0$ である。
g.e.d.

(1.9) 同様の「局所的 ([H1] と比べて)」な議論を, 基礎体の標数 p が正の場合にも考える事は可能である。しかし, ここでは, Lemma(1.5) の効果が, $p \mid k$ の場合には (1.8) の議

論と平行に考えると) なくなる。実際、日高は、characteristic $= 3$, $a=4$, $\lambda \neq 0$ かつ (W_{t_3}, w_{t_2}) が Gorenstein になる特異点が存在する事を、その後示した。その例について $\mathbb{L}=0$ となるのかは、大変興味ある事だが、残念ながらまだ不明である ($[H_2]$, $[H-T]$ には書かれるはずだと思う.)。

§2. 特異点の arithmetic genus P_a を手掛りにした $\mathbb{L}$ の消滅についての考察. ($[T-W_2]$ §3 のアプロークの続き).

(2.1) 特異点解消 $\psi: (X, A) \longrightarrow (W, w)$ が与えられた時、算術種数 $P_a(W, w)$ とは、 $\max \{ P_a(D) \mid D: \text{non-zero effective divisor whose supports are contained in } A \}$ と定義される非負な整数である ($[Wagreich]$, $[T]$). これは、例外集合 A の weighted dual graph Γ によりきまるので、 $P_a(\Gamma)$ と書く事にする。

我々の今考える "star-shaped" な状況では、Pinkham-Demazure の $\mathbb{Q}$ -divisor D on E を用いて、

$$(2.1.1) \quad P_a(\Gamma) = \max_{r \geq 1} \left\{ r(g-1) + 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \deg([R^k D]) \right\}$$

とあらわす事ができる ($[T]$ Theorem (3.8)). また、($[T-W_2]$ で述べたように) $R(E, D)$ の canonical partial resolution.

$$\varphi: C = \text{Proj}(R(E, D)^{\natural}) \longrightarrow \text{Spec}(R(E, D))$$

$$\text{where } R(E, D) = \bigoplus_{l \geq 0} \left(\bigoplus_{k \geq l} R(E, D)_k \right)$$

について,

$$(2.1.2) \quad \dim \left(\frac{m_R^k \cdot R' \psi_* \mathcal{O}_C}{m_R^{k+1} \cdot R' \psi_* \mathcal{O}_C} \right) \leq p_a(P) \quad k \geq 0$$

が成立する ([T] §1, Theorem (3.4)).

そして, §3 [T-W2] と同様にして次が従う (証明は [T-W1] を参).

定理 (2.2) (W, w) は "star-shaped" resolution を持つ

Gorenstein 特異点であって, $C = \text{Proj}(R(E, D)) \xrightarrow{\varphi} \text{Spec}(R(E, D))$

なる Pinkham's construction の canonical partial resolution につ

いて $\dim \left(\frac{m_R \cdot R' \psi_* \mathcal{O}_C}{m_R^2 \cdot R' \psi_* \mathcal{O}_C} \right) \leq 1$ であると仮定
する。その時 $L = 0$ である。

これと, (2.1.2) を組み合わせれば, $p_a(P) = 1$ かつ (W, w) が Gorenstein となる "star-shaped" 特異点については $L = 0$ ([T-W2]) なのだが, 勿論, $p_a(P) = 2$ であっても, (2.2) の条件を満たすものは存在する。以下では, $p_a(P)$ を手掛りとして考察をつづける。そして, L の消滅問題が open になっている $p_a(P) = 2$ なる graph の例をあげよう。

Lemma (2.3) 状況は §0 で述べた通りとする。 $\sum_k E$.

$\sum_k : R' \psi_* (\mathcal{O}_X(-kE)) \longrightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E(kD))$ なる上射とし

よ ($k \in \mathbb{Z}$). この時.

$$(i) \dim U = \sum_{k \geq 1} \dim \left(\bigoplus_k \left\{ \text{Ker} \left\{ R^1 \psi_* (O_X(-kE)) \rightarrow R^1 \psi_* O_X \right\} \right\} \right)$$

(ii) 更に (W, w) が Gorenstein であるとするとき.

$$\begin{aligned} & \text{Image} \left\{ F^k \longrightarrow R_k = H^0(E, O_E(kD)) \right\} \\ &= \left\{ x \in R_k \mid \begin{array}{l} x \cdot \bigoplus_{a \geq k} \left(\text{Ker} \left\{ R^1 \psi_* O_X(-(a-k)E) \rightarrow R^1 \psi_* O_X \right\} \right) \\ = 0 \quad \text{in } H^1(E, O_E(aD)) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

for $k \geq 0$. ただし $a = a(R(E, D))$.

証明は (i) 線型代数 (ii) は Serre duality $R_k \times H^1(E, O_E(-(a-k)D)) \rightarrow H^1(E, O_E(aD)) \cong \mathbb{C}^{\underbrace{\chi}_{\leq [W]}}$ と (i) を用いる. 詳しくは [T-W 1].

これにより, 次の直ちに従う.

定理 (2.4) (W, w) は "star-shaped" resolution を持つ Gorenstein 特異点であるとするとき, $\dim U \neq 1$ である.

証明. 仮に $\dim U = 1$ とし, $U_k \neq 0$ であるとする. 非 zero 元 $\Phi \in U_k$ をとる. $y \in R_k$ と $\Psi \in R^1 \psi_* (O_X(-pE))$ with $p \geq k+1$ をうまくとって, 次の成立するようにできる ([T-W 2] (3.5) (3.6) 参照);

$$\begin{array}{ccccc}
 R_k & \longrightarrow & R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) & \longrightarrow & R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-kE)) \\
 \downarrow \gamma & \longmapsto & \downarrow \Phi & \longmapsto & \downarrow 0 \\
 & & \uparrow \Psi & & \\
 & & R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-pE)) & \xrightarrow{\xi_p} & H^1(E, \mathcal{O}_E(pD)) \\
 & & & & \uparrow \xi_p
 \end{array}$$

$\xi_p(\Psi) \neq 0$

(i) (2.3) により, $\bigoplus_{h \geq 1} \xi_h(\text{Ker}\{R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-hE)) \rightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_X\}) = \mathbb{C} \cdot \xi_p(\Psi)$

$\subset \bigoplus_{h \geq 1} H^1(E, \mathcal{O}_E(hD))$. (ii) (2.3) より, $p = a - k$ かつ $\gamma \cdot \xi_p(\Psi) \neq 0$

in $H^1(E, \mathcal{O}_E(aD))$ である. (3.6) [T-W2] により,

$\text{Ker}\{R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-aE)) \rightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_X\}$ は non-trivial である. こ

れは (W, w) が Gorenstein 特異点である事に反する. (Th.3 [T-W2]).

g.e.d.

Lemma (2.5). "Star-shaped" graph Γ について, $p_a(\Gamma) = p_a(E)$
 $= g$ かつ $g \geq 2$ ならば, $a(R(E, D)) \leq 2$ である.

証明は (2.1.1) より 容易である.

系 (2.6) (W, w) が "star-shaped" resolution を持つ Gorenstein 特異点とし, 更に $p_a(\Gamma) = p_a(E)$ ならば, $L = 0$ である. (

$p_a(\Gamma) \leq 1$ の場合の結果と, $a \leq 2$ の場合について, それぞれ [T-W2] に 3.),

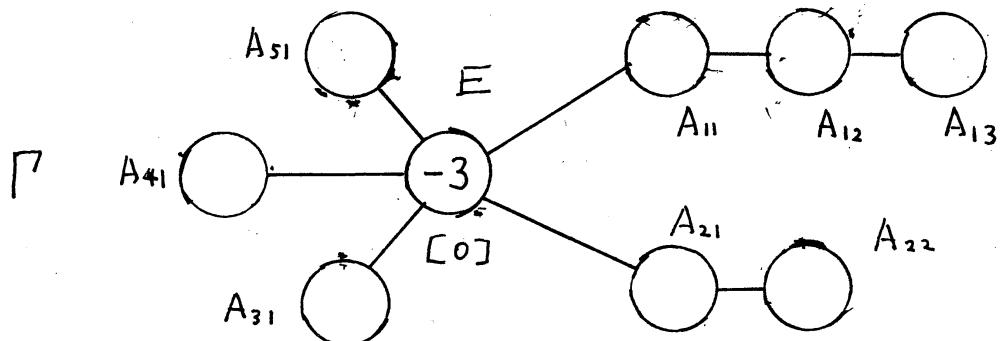
(2.7). そこで、問題は $P_a(\Gamma) = 2$ の場合は、 $g \leq 1$ に残る。

$g = 1$ の場合 実 は $P_a(\Gamma) = 2$ で Gorenstein "star-shaped" graph については、 $a(R(E, D)) \leq 7$ ($a \neq b$) が示せて、定理 (2.4) を使って $\sqcup = 0$ を示す事ができる。(公式 (2.1.1) を使った細かい議論によるのだが、省略する。)

$g = 0$ の場合 この時、 $P_a(\Gamma) = 2$ かつ $a(R(E, D)) \leq 10$ の場合には、定理 (2.2) より $\sqcup = 0$ を示せる。

そして、 $a(R(E, D)) = 11$ 、 $P_a(\Gamma) = 2$ 、 $g = 0$ かつ $\dim \left(\frac{m_R \cdot R' \otimes O_C}{m_R^2 \cdot R' \otimes O_C} \right) = 2$ となる graph Γ であって $R(E, D)$ が Gorenstein 環になるものの例を以下に挙げる。この graph Γ について、Gorenstein "star-shaped" 特異点 (W, w) として、どのようなものが存在するのか、筆者には解析し得ていない。
いまだ

例 (2.8) §0 の状況で、例外集合 $f^{-1}(w)$ の dual graph Γ が以下の通りであるとする！



central curve $E \cong \mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{Q}$ -divisor

$$D = 3P_0 - \frac{3}{4}P_1 - \frac{2}{3}P_2 - \frac{1}{2}P_3 - \frac{1}{2}P_4 - \frac{1}{2}P_5$$

ただし $P_i = A_{ii} \cap E$, $i=1, \dots, 5$, P_0 は E 上のある点,

を用いて上の graph を例外集合の dual graph に有する正規次数付環は $R(E, D) = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(kD))$ とおきかされる。ここで, 関係式 $K_E + D' - 11 \cdot D = 0$, ただし $D' = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{2}P_4 + \frac{1}{2}P_5$, より $R(E, D)$ は $a(R(E, D)) = 11$ の Gorenstein 環である [W]. 更に, $h(r) = r(g-1) + 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \deg([kD])$ とおいてやると,

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	≥ 12
$\deg[rD]$	-2	-1	-2	0	-2	0	-2	0	-1	0	-2	≥ -1
$h(r)$	0	1	1	2	1	2	1	2	1	1	0	≤ -2

よって, $P_a(\Gamma) = \max_{r \geq 1} h(r) = 2$, $P_g(R(E, D)) = \sum_{k \geq 0} h'(\mathcal{O}_E(kD)) = 5$ である。これだけから, Γ を例外集合に持つ特異点についての $\mathbb{Q}$ を調べてみよう。まず,
 $\mathbb{Q}_k = 0$ for $k \geq a = 11$ ($\odot \mathbb{Q}_k = \text{Ker} \{ R^1\psi_k(\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) \rightarrow R^1\psi_k(\mathcal{O}_X(-kE)) \}$). そして $\mathbb{Q}_0 = 0$ [T-W2]. また $R_k \rightarrow \mathbb{Q}_k \rightarrow 0$ より, $\mathbb{Q}_k = 0$ for $k=1, 2, 3, 5, 7, 9$.
 ゆえに, $R^1\psi_k(\mathcal{O}_X(-kE)) \rightarrow R^1\psi_k \mathcal{O}_X$ は $k \leq 4$ で単射である。Lemma (2.3) (i) より, $\dim \mathbb{Q} = \sum_{k \geq 5} \dim \left(\sum_k \text{Ker} [R^1\psi_k(\mathcal{O}_X(-kE)) \rightarrow R^1\psi_k \mathcal{O}_X] \right) \leq \sum_{k \geq 5} h'(\mathcal{O}_E(kD)) = 3$.
 となる。

更に, (W, w) が Gorenstein 特異点であると仮定する。

duality (2.3.1) [T-W2] より, $R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-(12-2)E)) \rightarrow R^1\psi_*(\mathcal{O}_X)$
は $k \cong 4$ で単射である。だから, $L_8 = L_{10} = 0$ である。

定理(2.4)により, $\dim L \neq 1$ である。だから, $\dim L = 0$,
又は $\dim L = 2$ となるのである。

しかしながら, $\dim L = 2$ となる Gorenstein 特異点 (W, w) を見
つける事は, まだできていない。

文献 (完全ではありません。originality ^を 明確にするべき事
柄を多く, このノートでは使った。詳細は [H-T], [T-W], ref.)

[G-W] S. Goto., K.-i. Watanabe., On graded rings I, J. Math.
Soc. Japan 30 (1978) 179-213.

[H1] F. Hidaka., Normal surface singularities associated to
ruled surfaces (in Japanese). 可換環論シンポジウム報告
集 No. 7 (1985) 145-159.

[H2] _____., A projective contractibility criteria and
its applications, 準備中.

[H-T] F. Hidaka. M. Tomari., A remark on singularities
arising from the minimal section of ruled surfaces. 準備中.

[P]. H. Pinkham., On a result of Riemenschneider.
manuscripta math. 16, 137-144 (1975).

[R] O. Riemenschneider., Bemerkungen zur Deformationstheorie

nichttrationaler Singularitäten . manuscripta math. 14 91-99(1974)

[T]. M. Tomari., Maximal-ideal-adic filtration on $R[\psi_* \mathcal{O}_V]$ for normal two-dimensional singularities Adv. Studies. in Pure Math. 8 (1986) "Complex Analytic Singularities" 633-647.

[T-W1] M. Tomari., K.-i. Watanabe., Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped" resolution. Preprint (1987).

[T-W2]. _____, "Star-shaped" resolution を持つ 2次元正規特異点について, RIMS 講究録 595, 112-142 (1986).

[Wagreich]. Ph. Wagreich., Elliptic singularities of surfaces. Amer. J. Math., 92 (1970), 419-454.

[W] K.-i. Watanabe., Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya Math. J. 83 (1981) 203-211.