

Taylor-Couette 系の狭間隔計算について

富森 勲 (Satoshi Tomimori)*, 野尻 寛 (Yutaka Nojiri)†
海津 聡 (Satoshi Kaizu)‡

1 はじめに

同軸のまわりで回転する内円筒, 外円筒の半径と角速度をそれぞれ, $r_1, \Omega_1, r_2, \Omega_2$, とおく. これらの 2 円筒間に流体を満たす. 角速度の差が僅かであれば軸方向に一樣な流れが発生し, これを同軸円筒間の Couette 流と呼ぶ. 2 円筒間の角速度の差が適当な大きさでは軸方向に周期的な渦が安定的に発生し, この 2 次流れを Taylor 渦と呼ぶ.

Taylor 渦に対しては常微分方程式でのモデルを求め, それに対する数値計算が行われ, 実験との比較が古くから行われている (Taylor [20]). 現在では計算機とアルゴリズムの進歩により, 直接非圧縮粘性流体 (Navier-Stokes 方程式) と連続の方程式を数値的に解いて実験を比較することが通常となっている (例えば, [1], [16], [13]).

本報告では常微分方程式に落とさずに, 線形化は施し, 少ないコストで線形固有値問題の固有ベクトルとして Taylor 渦を計算する方法を提案する. 即ち

1. Taylor 渦は定常であるので ([4]) 問題を定常に限定し, 流れを Couette 流からの攪乱であるとして Navier-Stokes 方程式を線形化する.
2. 円筒間の間隔が狭い状況に考察を限定する (狭間隔計算モデル). ここで適当な変数変換とスケーリングを行い (cf. (10), (11)), 問題がデカルト座標系における自己共役正値作用素の固有値問題に変換される (cf. (20), (21)). ここで固有値は Reynolds 数, 内円筒, 外円筒の半径, 内円筒外円筒の角速度 $r_1, r_2, \Omega_1, \Omega_2$ により表現される正の実数である. 固有ベクトルは Taylor 渦を表す. その結果, 有限要素法で離散化する際,
 - (a) 疎行列を扱える,
 - (b) Green 作用素を含む固有値問題ゆえ (cf. (23)), 区分的一次多項式が有限要素として扱える (Green 作用素を用いないときはこの問題は 4 階の偏微分作用素の固有値問題であり, 区分的 2 次以上の多項式が必要である),

以上の 2 点ゆえコストが小さい.

3. 低いコストの割には求められた数値結果は精度が良い (参照, cf. 8.4).
4. Taylor 渦は渦対として計算されるが本計算では単独の渦を求めることができる境界条件を提案できた (参照 (6), (7), (8), (9)).

*電気通信大学大学院電気通信学研究科

†電気通信大学大学院電気通信学研究科

‡電気通信大学情報工学科

以下逐次上記の諸点を明らかにしたい。

2 Taylor-Couette 系

円筒座標系を用い, 速度を, $\vec{u} = (u^r, u^\theta, u^z)$ とおく. Couette 流, $\vec{u}$ を主流とし, その攪乱を $\vec{\tilde{u}}$ とする. 主流と攪乱の圧力をそれぞれ, $\bar{p}, \hat{p}$ とおく. 速度, $\vec{u} = \vec{\tilde{u}} + \vec{\tilde{u}}$, 圧力, $p = \bar{p} + \hat{p}$ を支配方程式に代入し, 記号, $C\vec{u} = (-u^\theta, u^r, 0)^T$, $\vec{E}\vec{u} = (u^r, u^\theta, 0)^T$ を簡単のため使う. $D_\theta\vec{u} = \vec{0}$ と仮定する.

$$D_t\vec{\tilde{u}} + (\vec{\tilde{u}} \cdot \nabla)\vec{\tilde{u}} - \hat{u}^\theta \vec{C}\vec{\tilde{u}} + \nu(\Delta\vec{\tilde{u}} - \frac{\vec{E}\vec{\tilde{u}}}{r^2}) + \frac{\nabla\hat{p}}{\rho} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{D_r(r\hat{u}^r)}{r} + D_z\hat{u}^z = 0, \quad (2)$$

$$\vec{F} = (\frac{2\bar{u}^\theta\hat{u}^\theta}{r}, -(\frac{d\bar{u}^\theta}{dr} + \frac{\bar{u}^\theta}{r})\hat{u}^r, 0)^T. \quad (3)$$

ここで, $(\vec{u} \cdot \nabla) = u^r D_r + u^z D_z$, $\Delta = (1/r)D_r(rD_r) + D_z^2$, また, ρ, ν , は密度と動粘性係数である.

渦対が存在すると期待する解析領域を $H > 0$ を正数として, $\tilde{\Omega} = \{(r, \theta, z); |z| \leq 2H\}$, とする. この境界を B とおく. 境界を詳しくみると, $B_{TB} = B_T \cup B_B$, $B_T = \{(r, \theta, z); z = H\}$, $B_B = \{(r, \theta, z); z = -H\}$, $B_{IO} = \{(r, \theta, z); r = r_1, r = r_2\}$, $B = B_{IO} \cup B_{TB}$, である. このとき境界条件はつぎのようになる.

$$\vec{\tilde{u}}|_{(B_T)} = \vec{\tilde{u}}|_{(B_B)}, \quad (4)$$

$$\vec{\tilde{u}}|_{B_{IO}} = \vec{0}. \quad (5)$$

3 単独の Taylor 渦

ここで単独の渦が存在すると期待される解析領域を Ω とし, $\Omega = \{(r, \theta, z); 0 < z < H\}$, とおく. このとき新たに境界をつぎのようにおく.

$$B_{tb} = B_t \cup B_b, B_t = \{(r, \theta, z); z = H\}, B_b = \{(r, \theta, z); z = 0\},$$

$$B_{io} = \{(r, \theta, z) \in \bar{\Omega}; r = r_1, r = r_2\},$$

$$\partial\Omega = B_{io} \cup B_{tb}.$$

我々が提案する単独の渦に対して課する境界条件はつぎのようなものである.

$$u^z = 0, \quad \text{on } B_{tb}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u^r}{\partial z} = 0, \quad \text{on } B_{tb}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u^\theta}{\partial z} = 0, \quad B_{tb}, \quad (8)$$

$$\varphi = \vec{0}, \quad B_{io}. \quad (9)$$

つぎのことがわかる. すなわち, 問題 (P_1): (1), (2), (6), (7), (8), (9) の解が滑らかならば, 流速, $\hat{u}^r, \hat{u}^\theta$, 圧力, $\hat{p}$ を Ω から $\tilde{\Omega}$ 全体に偶関数拡張し, $\hat{u}^z$ を奇関数拡張したものは z 軸方向に周期関数に拡張できて, 問題 (P_2): (1), (2), (4), (5), をみたすことを示せる.

さて, 問題 (P_2) の解の渦対を Ω に制限したものは問題 (P_1) の解であるかは一部明らかでない. 少ないコストで問題 (P_2) の解を計算する方法として題 (P_1) を計算することをここでは提案する.

4 狭間隔計算 (narrow-gap computations)

円筒の間隔が円筒間の平均半径に比較して小さいものと仮定すれば, 円筒の曲率は無限大と考えられる. 方程式, (1), (2) を次のように変形する.

$$M_r = (r_2 + r_1)/2, \quad \varepsilon_r = (r_2 - r_1)/2, \quad (10)$$

$$M_u = (r_1\Omega_1 + r_2\Omega_2)/2, \quad \varepsilon_u = (r_1\Omega_1 - r_2\Omega_2)/2, \quad (11)$$

$\varepsilon_r \ll M_r$, $|\varepsilon_u| \ll M_u$, の下で考える. また, 記号, $T_l = \varepsilon_r/\varepsilon_u$, $T_g = M_r/M_u$, $R_l = \varepsilon_r\varepsilon_u/\nu$, $T_{lg} = T_l/T_g$, を使う.

$$r = \varepsilon_r x + M_r, \quad z = \alpha \varepsilon_r y + M_r, \quad t = T_l \tau, \quad (12)$$

解析領域は, $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$, その境界, $\partial D = \Gamma_{IO} \cup \Gamma_{TB}$, $\Gamma_{IO} = \Gamma_I \cup \Gamma_O$, $\Gamma_I = \{(0, y); |y| \leq 1\}$, $\Gamma_O = \{(1, y); |y| \leq 1\}$, とする. ここで, 渦の横縦比は, $1:\alpha$, と想定する (即ち, $\alpha = H/(r_2 - r_1)$). 微分演算子に対して, $D_r = D_x/\varepsilon_r$, $D_z = D_y/(\alpha\varepsilon_r)$, $D_t = D_\tau/T_l$, $\Delta = \varepsilon_r^{-2}\{\Delta_\alpha + \varepsilon_r D_x/r - \varepsilon_r^2 \bar{E}/r^2\}$, $\nabla_\alpha = (D_x, 0, D_y/\alpha)^T$, $\Delta_\alpha = D_x^2 + D_y^2/\alpha^2$, が成立する. 速度, 圧力に対して無次元化,

$$\tilde{u} = \varepsilon_u \varphi, \quad \varphi = (u^x, \theta, u^y)^T,$$

$$\hat{p} = \rho \varepsilon_u^2 \pi,$$

を行い, 次の方程式系を得る.

$$D_\tau \varphi + (\varphi \cdot \nabla_\alpha) \varphi + \varepsilon_r \theta \bar{C} \varphi / r - \frac{1}{R_l} (\Delta_\alpha \varphi + \varepsilon_r D_x \varphi / r - \varepsilon_r^2 \bar{E} \varphi / r^2) + \nabla_\alpha \pi = \bar{F}, \quad (13)$$

$$D_x u^x + D_y u^y / \alpha = 0, \quad (14)$$

$$\varphi = \vec{0}, \quad \Gamma_{IO}, \quad (15)$$

$$u^y = 0, \quad \Gamma_{TB}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u^x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \Gamma_{TB}. \quad (17)$$

ここで, $\bar{F} = (2T_{lg}\theta - \{\varepsilon_r(1 + T_{lg})(x + \varepsilon_r(1 - x^2)/r)\theta, (1 - T_{lg})u^x, 0\})^T$, である. 次に, $\varphi = \varphi^0 + \varepsilon_r \varphi^1/M_r + \dots$, $\pi = \pi^0 + \varepsilon_r \pi^1/M_r + \dots$, と漸近展開する. 初項だけを採用すると次の狭間隔モデルを得る.

$$D_\tau \varphi^0 + (\varphi^0 \cdot \nabla_\alpha) \varphi^0 - \frac{1}{R_l} \Delta_\alpha \varphi^0 + \nabla_\alpha \pi^0 = (2T_{lg}\theta^0, (1 - T_{lg})u^{0x}, 0)^T, \quad (18)$$

$$D_x u^{0x} + D_y u^{0y} / \alpha = 0. \quad (19)$$

これを境界条件 (15), (16), (17) の下で初期値問題として解く.

注意

ここでの狭間隔計算と全く異なる狭間隔計算については, P. Chossat, G. Ioos [4], P. Tabeling [18], M. Nagata [14], [15] を参照せよ.

5 定常線形 Taylor 渦

ここで問題: (18), (19), の Couette 流れのまわりの線形化問題を考える. Taylor 渦は定常であるので我々の考察する問題は,

$$\mu(\Delta_\alpha \varphi + \nabla_\alpha \tilde{\pi}) = ((-\Delta)^{-1} u^x, 0)^T, \quad (20)$$

$$D_x u^x + D_y u^y / \alpha = 0. \quad (21)$$

$\varphi = (u^x, u^y)^T, \mu = 2R_l^2 T_{lg}(1 - T_{lg})$, の非自明解を求めることに帰着される. 即ち, 固有値問題 (18), (19) の固有値, μ , 固有ベクトル, ϕ を求めよ, という固有値問題に帰着する. ここで, θ をつぎのように消去した. θ の境界条件を使えば, $-\Delta$ の逆作用素 (グリーン作用素), $(-\Delta)^{-1}$ が定まる. これを用い, θ を消去した.

6 ペナルティ法

固有値問題: (20), (21), を解くために, (21) を次の式で近似する.

$$\varepsilon \tilde{\pi}^\varepsilon + D_x u^{\varepsilon x} + D_y u^{\varepsilon y} / \alpha = 0, \quad (22)$$

これにより圧力が消去できて,

$$\varphi^\varepsilon = (u^{\varepsilon x}, u^{\varepsilon y})^T,$$

に対するペナルティ項付きの固有値問題, $(EP)^\varepsilon$:

$$\mu_\alpha(-\Delta_\alpha \varphi^\varepsilon - \frac{\nabla_\alpha \operatorname{div}_\alpha \varphi^\varepsilon}{\varepsilon}) = ((-\Delta_\alpha)^{-1} u^{\varepsilon x}, 0)^T, \quad (23)$$

を解けばよい. 以下このペナルティ項付き固有値問題を離散化して数値解を求める. このとき解はペナルティ項, $1/\varepsilon \rightarrow +\infty$ として求めることになる.

7 離散解の構成

解くべき問題は以下のようなものである.

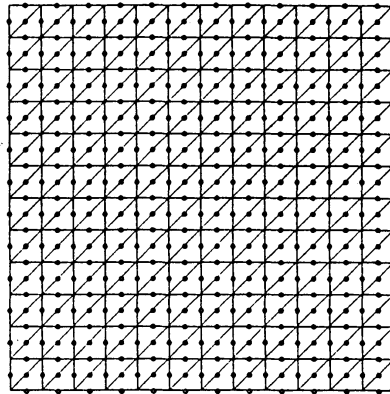
ペナルティ項を持つ定常問題 $(EP)^\varepsilon$

$$\mu_\alpha(-\Delta_\alpha \varphi^\varepsilon - \frac{\nabla_\alpha \operatorname{div}_\alpha \varphi^\varepsilon}{\varepsilon}) = ((-\Delta_\alpha)^{-1} u^{\varepsilon x}, 0)^T \quad (24)$$

$$\varphi = \tilde{0}, \quad \Gamma_{IO} \quad (25)$$

$$u^y = 0, \quad \Gamma_{TB} \quad (26)$$

$$\frac{\partial u^x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \Gamma_{TB} \quad (27)$$

図 1: 分割例 ($n = 12$)

さらに、この問題に非適合一次要素を用いた有限要素法を適用する。この離散化により次の行列方程式を得る。

行列方程式 $(EP)_M$

$$\mu_h \left(A + \frac{1}{\varepsilon} B \right) \varphi_h = G \varphi_h \quad (28)$$

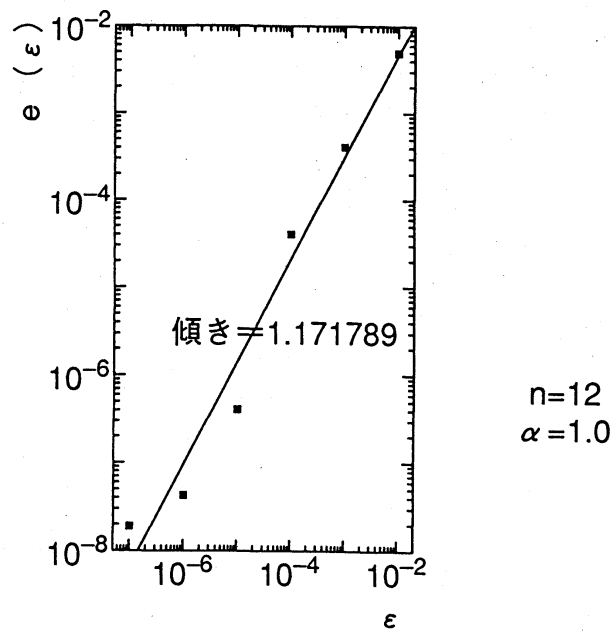
さらに行列 G のスパース性を利用した圧縮、コレスキー分解による標準固有値問題への変形を重ねて次の行列方程式を得る。

$$\mu_h \hat{\varphi}_x = \hat{G} \hat{\varphi}_x \quad (29)$$

これは、 $\mu_h, \hat{\varphi}_x$ を固有系とする行列固有値問題である。

領域の分割形状として Friedrichs-Keller 型 (図 1) を採用した。数値計算は、まず行列 $\hat{G}$ をハウスホルダー変換によって三重対角化した後、2 分法によって近似固有値を求め、逆反復法によって三重対角行列の固有ベクトルを求め、それによって $\hat{G}$ の固有ベクトル $\hat{\varphi}_x$ 、元の一般固有値問題 $(EP)_M$ の固有ベクトル φ_h を求めた。また、ホテルン法を用いて、以上の操作を繰り返す事によって最大の固有値つまり第 1 固有値 μ_1 から大きい順に第 12 固有値 μ_{12} までと、それに対応する固有ベクトル φ_h をそれぞれ求めた。パラメータとしては刻み幅 (分割数 n)、ペナルティ項の ε 、アスペクト比 α を変動させて、それに依存する固有値の動向と収束を調べた。尚、流速 φ_h については矢印によって可視化を行なった。

数値計算の際のプログラムは FORTRAN77 で作成し、数値は全て倍精度で計算した。計算にあたっては、電気通信大学総合情報処理センターの CRAY-EL98 を使用した。

図 2: 第 1 固有値の ε 依存性

8 数値結果

8.1 第 1 固有値のペナルティ項の ε への依存性

$n = 12$ すなわち、領域を 12×12 要素に分割し、アスペクト比 $\alpha = 1.0$ に固定して、 $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-7}$ までについて計算を行ない、その際の第 1 固有値の計算結果を図 2 に掲載した。

横軸に ε ，縦軸にそれぞれ固有値の相対差すなわち

$$e(\varepsilon) = |\mu(10\varepsilon) - \mu(\varepsilon)|, \quad \varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-7} \quad (30)$$

を取って両対数グラフにプロットし、最小 2 乗近似を行なった。

8.2 第 1 固有値の刻み幅についての依存性収束

アスペクト比 $\alpha = 1.0$ ， $\varepsilon = 10^{-9}$ に固定して、分割 $n = 2, 4, 8, 16$ について計算を行ない、その際の第 1 固有値の計算結果を図 3 に掲載した。

横軸に刻み幅 h すなわち

$$h = 2.0/n, \quad n = 2, 4, 8 \quad (31)$$

縦軸にそれぞれの固有値の相対差すなわち

$$e(h) = |\mu(h) - \mu(h/2)| \quad (32)$$

を取って両対数グラフにプロットし、最小 2 乗近似を行なった。

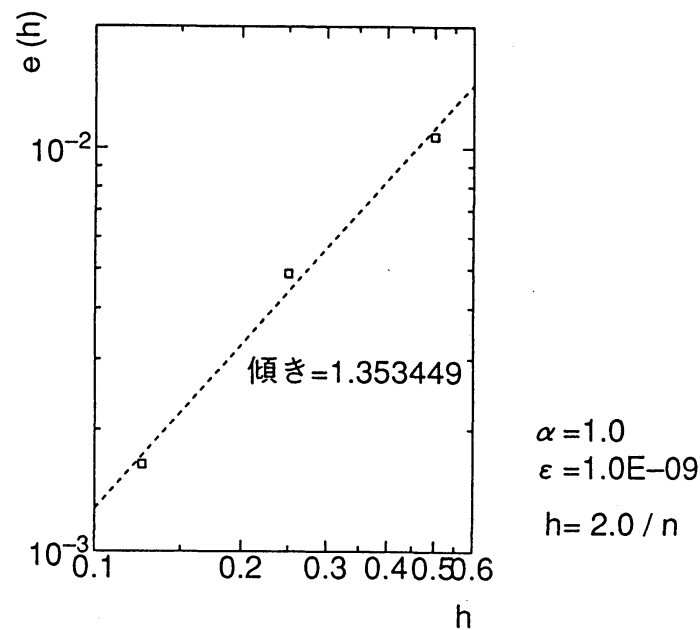


図 3: 第 1 固有値の刻み依存性

8.3 第 1 固有値のアスペクト比 α への依存性

$\epsilon = 10^{-9}$ に固定し, アスペクト比 α を 0.5 から 1.5 まで 0.1 間隔で変動させたときの第 1 固有値をそれぞれ分割 $n = 2, 4, 6, \dots, 14$ について計算を行ない, その結果を図 4 に掲載した.

グラフは, 横軸に α , 縦軸に第 1 固有値 μ をプロットしたもので, 上から順に $n = 2, 4, 6, \dots, 14$ となっている. グラフより, 刻みを細かくするにつれて極大値が現れ, 極大値すなわち臨界レイノルズ数を与えるアスペクト比 α は 1.0 に収束しつつある様に思われる. [8] によれば, Pellew & Southwell(1940), Reid & Harris(1958), Chandrasekhar(1961), § 17 等が変分原理によって求めた臨界レイノルズ数を与える渦領域のアスペクト比は 1.0064 であるのに対し, まずまずの一致を見る事ができる. しかし, 我々の分割方法は領域のアスペクト比を考慮に入れていないという事と, 計算方法が全く違うという事と, 周期境界条件を陽的には想定していない事, すなわち渦対ではなく 1 つの渦領域を想定している事などを考えて, 数値の比較にはまだまだ検討が必要であろう.

またここで, この極大値に対応する固有ベクトル φ_h を矢印によって可視化したものを図 5 に掲載する. ただし, 図は計算領域において可視化したものである.

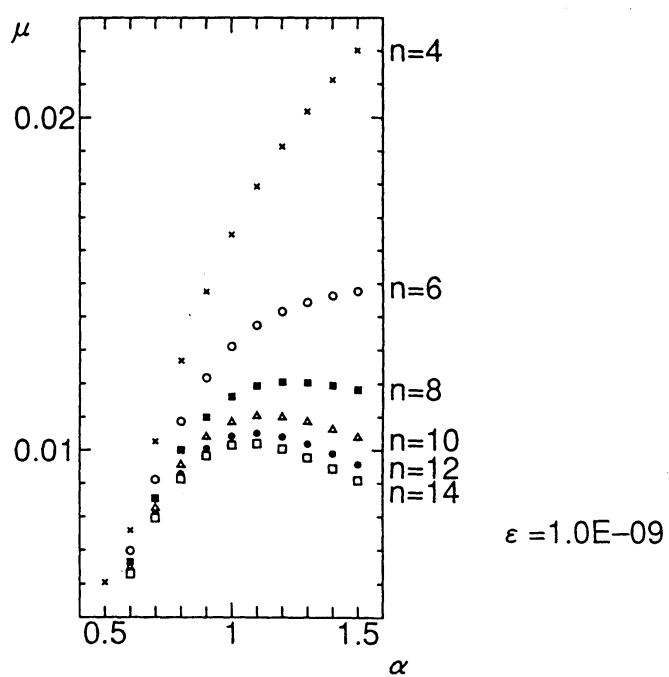


図 4: 第 1 固有値の α 依存性

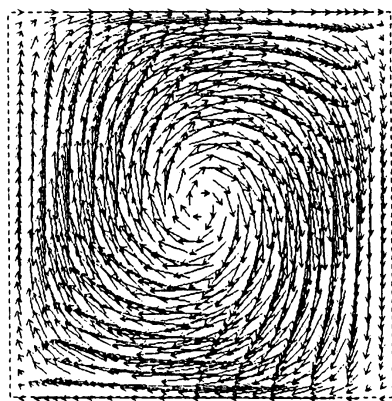


図 5: Taylor 渦 ($n = 16, \varepsilon = 10^{-9}, \alpha = 1.0$)

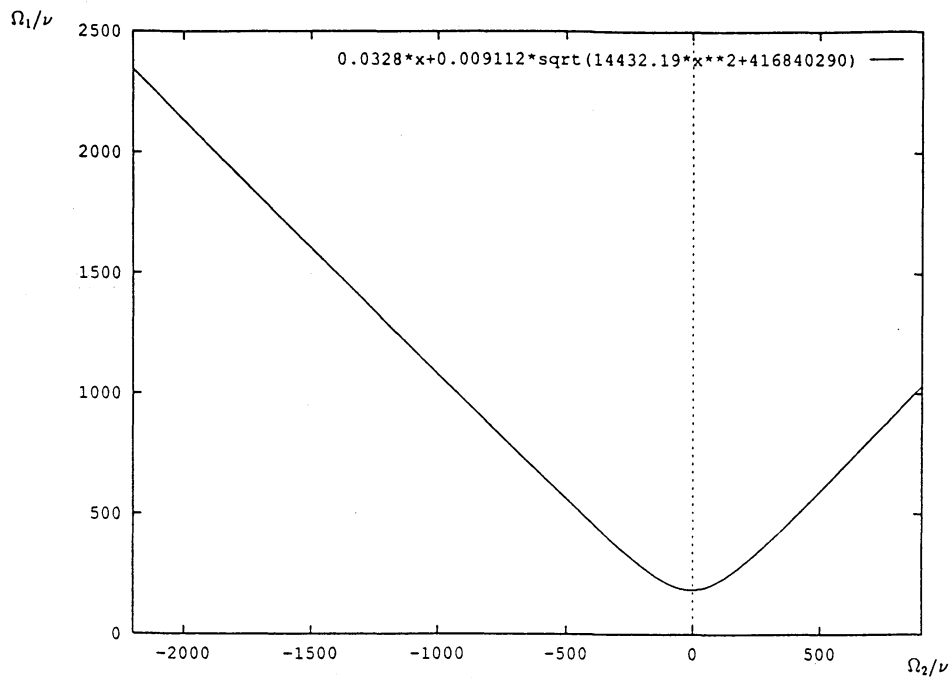


図 6: 中立安定曲線 ($n = 16, \varepsilon = 10^{-9}, \alpha = 1.0, r_1 = 3.80\text{cm}, r_2 = 4.035\text{cm}$)

8.4 Taylor による理論値と実験値及び中立安定曲線との比較

Taylor [20], p339, Fig:17, は, $r_1 = 3.80\text{cm}, r_2 = 4.035\text{cm}$ として外円筒の角速度を変動させた場合の, 攪乱を与える内円筒の角速度の理論値と実験値を横軸に Ω_2/ν , 縦軸に Ω_1/ν に取ったグラフでプロットし, 中立安定曲線を描いているが, これと我々の実験を比較するため,

$$R_l \equiv \varepsilon_r |\varepsilon_u| / \nu \quad (33)$$

$$\mu_\alpha = 2R_l^2 T_{lg} (1 - T_{lg})^{-1} \quad (34)$$

の2式から R_l を消去し, $\varepsilon_r, \varepsilon_u, T_{lg}$ の定義式を代入して, $\Omega_1/\nu, \Omega_2/\nu$ についての次の関係式を得る.

$$r_1^3 \left(\frac{\Omega_1}{\nu} \right)^2 - (r_2 - r_1) r_1 r_2 \left(\frac{\Omega_1}{\nu} \right) \left(\frac{\Omega_2}{\nu} \right) - r_2^3 \left(\frac{\Omega_2}{\nu} \right)^2 = \frac{4}{\mu_\alpha} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{(r_2 - r_1)^3} \quad (35)$$

そこで, Taylor と同じ条件で, $n = 16, \varepsilon = 10^{-9}, \alpha = 1.0$ のときの μ_h を μ_α に代入して描いた曲線を6に掲載した. これは, $\Omega_2/\nu \geq 0$ において傾き 1.127509 の漸近線をもつ双曲線で, Taylor [20], p339, Fig:17, によれば漸近線の傾きは $\Omega_1/\Omega_2 = r_2^2/r_1^2 = 1.130$ であるのに対してほぼ一致している. 我々の中立安定曲線の漸近線の傾きは μ_h すなわち n, ε, α には依らないもので, これらに依存するのはグラフの Ω_1/ν 座標値のみである. その標本点として, $\Omega_2/\nu = 0$ のときの Ω_1/ν 切片の値の刻みによる収束を図7に掲載した. Taylor の論文 [20], p337, TABLE-X, で $\Omega_2/\nu = 0$ の場合の Ω_1/ν の理論値が 191.5 実験値の平均値が 191.0 である. 一方我々のグラフで, その収束点を 187.0 程度と見なせば Taylor の実験値との差は 2.1% 程度という事になり非常に良い一致を示している. しかし Taylor の値は, Navier-Stokes 方程式を常微分方程式モデルとした際の計算

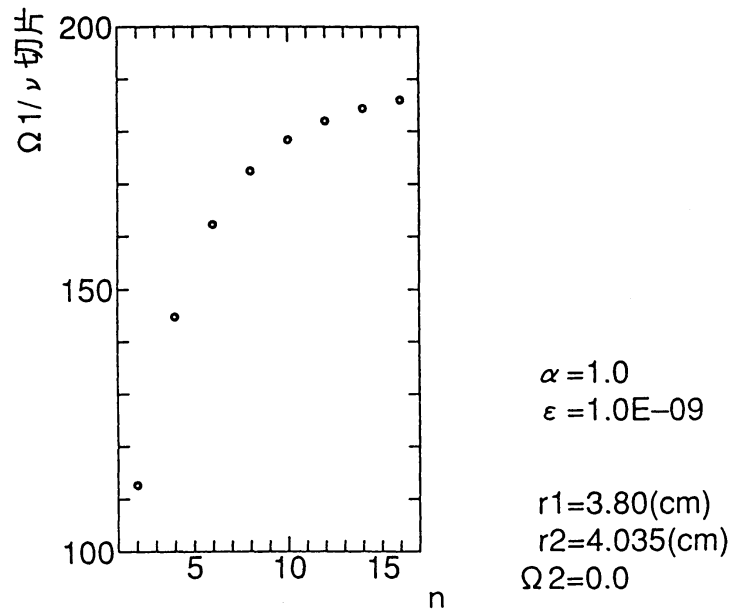


図 7: Ω_1/ν 切片の収束

値であるから, Navier-Stokes 方程式を直接, 初期値境界値問題として解いた計算値との比較も必要である.

8.5 第 1 ~ 12 固有値に対応する固有ベクトルの可視化

$n = 12, \alpha = 1.0, \varepsilon = 10^{-9}$ での第 1 固有値から第 12 固有値までに対応する固有ベクトル $\varphi_1 \sim \varphi_{12}$ を矢印で可視化したものを図 8 に紹介しておく.

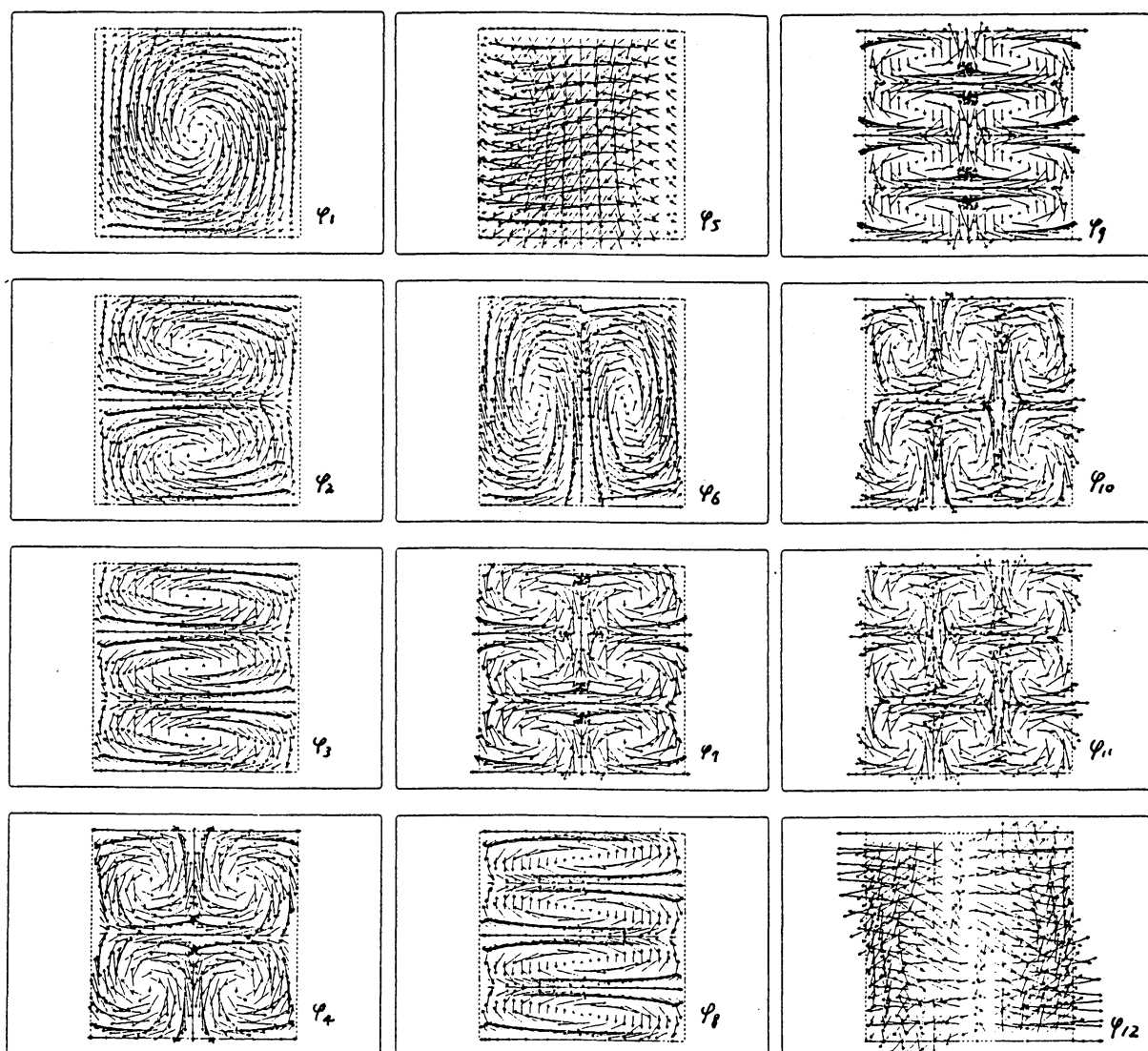


图 8: 流速图 ($\varphi_1 \sim \varphi_{12}$), ($n = 12, \alpha = 1.0, \varepsilon = 10^{-9}$)

参考文献

- [1] Andereck, C. David, S. S. Liu and Harry L. Swinney, Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, 164(1986), pp. 155-183.
- [2] Bercovier, M. and O. Pironneau, Error estimates for finite element method solutions of the Stokes problems in the primitive variables, *Numerisch Mathematik*, 33(1979), pp. 211-224.
- [3] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*, Dover Pub. Inc. New York, 1970(Third ed.).
- [4] Chossat, Pascal and Iooss, Gérard, *The Couette-Taylor Problem*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1994.
- [5] Crouzeix, M. and P. A. Raviart, Conforming and non-conforming finite element methods for solving stationary Stokes equations, *R. A.I. R. O.*, R-3(1973), pp. 33-76.
- [6] Demay, Y. and G. Ioos, Calcul des solutions bifurquées pour le problème de Couette-Taylor avec les 2 cylindres en rotation, *J. Méca. Théor. Appl.*, 193-216, Spécial Issue(1984).
- [7] Demay, Y., G. Ioos, and P. Laure, Wave patterns in the small gap Couette-Taylor problem, *Europ. J. Mech. B/Fluids* 11:621-634(1992).
- [8] Drazin, P. G. and Reid, W. H., *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, 1981.
- [9] Deville, Michel and Steven A. Orszag, Spectral calculation of the circular Couette flow, *Application Methods for the Navier-Stokes problems*, *Lec. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 771(1980), Ed. A. Donald and B. Eckmann, pp.157-176.
- [10] Giraut, Vivette and Raviart, Pierre-Arnaud, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer series in computational mathematics 5, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986.
- [11] Itô, N., K. Okamoto and M. Ohji, Stability analysis of non-axisymmetric perturbation for flows between rotating cylinders, *RIMS, Kokyuroku* 661(1988), Institute of Mathematical Science, The Univ. Kyoto, Japan, pp.39-67(in Japanese).
- [12] Kaizu, S. and Takahashi, R., Penalty method for eigenvalue problems associated with linear perturbation of the Bénard problem, in preparation.
- [13] Moser, R. D. A spectral numerical method for the Navier-Stokes Equations with applications to Taylor-Couette flow, *J. Comp. Phys.* 52(1983), pp. 524-544.
- [14] Nagata, M., Bifurcations in Couette flow between almost corotating cylinders, *J. Fluid Mech.* 169(1986), 229-250.
- [15] Nagata, M., On wavy instabilities of the Taylor-vortex flow between corotating cylinders, *J. Fluid Mech.* 188(1988), 585-598.

- [16] Okamoto, H., and S. J. Tavener, Degenerate $O(2)$ -equivariant bifurcation equations and their applications to the Taylor problem, Japan J. Indust. Appl. Math. 8(1991), 245-273.
- [17] Tabata, Masahisa and Fujima, Syouichi, Finite-element analysis of high Reynolds number flow past a circular cylinder, J. Computational and Applied Math. 38(1991), pp. 411-424.
- [18] Tabeling, P., Dynamics of the phase variable in the Taylor vortex system, J. Phys. Lett. 44(1983), 665-672.
- [19] Tatsumi, T. and K. Gotō, Stability of flow, Sangyou Tosho, 1978, Tokyo (in Japanese).
- [20] Taylor, G. I., Stability of a viscous liquid between two rotating cylinders, Phil. Trans. Roy. Soc. London., A223(1923), 289-343.