

Descriptor Form System の構造可制御性

名大工学部 細江繁幸 (Shigeyuki Hosoe)

早川義一 (Yoshikazu Hayakawa)

1. はじめに

$p_1, \dots, p_l$ を独立なスカラーパラメータとするとき, 係数行列が

$$\begin{cases} K_p = \bar{K}_0 + \sum_{i=1}^l p_i \bar{b}_i \bar{b}_i^t & A_p = \bar{A}_0 + \sum_{i=1}^l p_i \bar{b}_i \bar{c}_i^t \\ B_p = \bar{B}_0 + \sum_{i=1}^l p_i \bar{b}_i \bar{d}_i^t \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{ただし } \bar{K}_0, \bar{A}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{B}_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}, \bar{d}_i \in \mathbb{R}^m \\ \bar{b}_i, \bar{c}_i \in \mathbb{R}^n, p = (p_1, p_2, \dots, p_l)$$

で表わされる Descriptor Form System

$$K_p \dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2)$$

の構造可制御性について考察する. 従来の状態方程式系 $\dot{x} =$

$Ax + Bu$ に関する結果や, Descriptor Form System ではないが
(1)~(7)
係数行列が構造化行列 (要素が零固定要素と変動要素に類別
され, 変動要素は互いに独立なパラメータとする行列) であ
(8)~(10)
る場合の結果が一般化され, より広いクラスの物理システム

の構造可制御性が判定できるようになる。

2. 準備

まず係数行列がパラメータに依存しない通常の Descriptor Form System

$$\bar{K} \dot{x}(t) = \bar{A} x(t) + \bar{B} u(t), \quad t \geq 0 \quad (3)$$

$x(t) (\in \mathbb{R}^n)$: 中間変数, $u(t) (\in \mathbb{R}^m)$: 入力

$$\bar{K}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

の可制御性の定義などを与える。微分方程式(3)が一意解を持つためには $\det(s\bar{K} - \bar{A}) \neq 0$ が必要不可欠。このとき, $(\bar{K}, \bar{A}, \bar{B})$ は consistent であるという。consistent な(3)の形のシステムの可制御性には3つの異なった定義があるが^{(1)~(3)}, ここでは次のものを採用する。

「定義0」⁽¹⁾ 任意の初期値 $x(0)$ に対し, 滑らかな入力 $u(t)$ ($t \geq 0$) が存在して, 解 $x(t)$ を有限時間で0にすることができるとき, システム $(\bar{K}, \bar{A}, \bar{B})$ は可制御であるという。」

<補題0>^{(2) (1)} 次の2条件は等価である。

(i) $(\bar{K}, \bar{A}, \bar{B})$ は可制御である。

(ii) $\text{rank}[s\bar{K} - \bar{A}, \bar{B}] = n \quad \text{for } \forall s \in \mathbb{C}$ 」

本稿で考察する(1), (2)式の descriptor form system (K_p, A_p, B_p) に対しても, 一意解の存在を保証する consistency 条件 $\det(sK_p - A_p) \neq 0$ は満たされているものとする。

(K_p, A_p, B_p) の可制御性はパラメータベクトル $p = (p_1, \dots, p_r)$ の値によって変るが、殆んど全ての p の値に対し可制御であるか、反対に全ての p の値で非可制御であるかのどちらかが定まる。このことから構造可制御性が次のように定義される。

〔定義 1〕^F パラメータ空間 $\mathbb{R}^r$ に、あるプロパ・バラエティ V が存在し、任意の $\bar{p} \notin V$ に対し、 $(K_{\bar{p}}, A_{\bar{p}}, B_{\bar{p}})$ が定義 0 の意味で可制御であるとき、 (K_p, A_p, B_p) は構造可制御であるという。』

以下、 s および $p_1, \dots, p_r$ の多項式を要素とする行列 $X(s, p) \in \mathbb{R}^{n \times n}[s, p]$ の最大サイズ小行列式全体に対する $\mathbb{R}[s, p]$ での最大共通因子を記号 $\Gamma(X(s, p))$ で表わす。

<補題 1> ^F 次の 3 条件は等価である。

(i) (K_p, A_p, B_p) は構造可制御である。

(ii) $\mathbb{R}^r \supset \exists V : \text{プロパ・バラエティ}, \forall \bar{p} \notin V$ に対し
 $\text{rank}[sK_{\bar{p}} - A_{\bar{p}}, B_{\bar{p}}] = n \quad \text{for } \forall s \in \mathbb{C}.$

(iii) $\deg_s \Gamma([sK_p - A_p, B_p]) = 0.$

ただし、 $\deg_s$ は $\mathbb{R}[s, p]$ に含まれる多項式の s に関する次数を表わす。』

$\mathbb{R}[s, p]$ の多項式 $f(s, p)$ を s だけの多項式 (定数を含む) $\alpha(s)$,

p だけの多項式 $\gamma(p)$, s および p の多項式 $\beta(s, p)$ (s あるいは p だけからなる因子を持たない) の積

$$f(s, p) = d(s) \beta(s, p) \gamma(p)$$

と表わしたとき, これを $f(s, p)$ の s - p 分解と呼ぶ. 今後 α, β, γ をそれぞれ f の s -, (s, p) -, p -因子と呼ぶ.

$\det(sK_p - A_p)$ の s - p 分解を $a(s)b(s)c(s)$ とするとき,

$$\Sigma \triangleq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid a(\lambda) = 0 \} \quad (4)$$

と定義すれば, 明らかに

$$\Sigma = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^l} \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda K_p - A_p) = 0 \} \quad (5)$$

である. 複素数 $\lambda \in \Sigma$ を (K_p, A_p, B_p) の不変モードと呼ぶ. 一方, $b(s, p)$ を s だけの多項式とみなしたときの零点を p -dependent あるいは変動モードと呼ぶ. 不変モードの全体は明らかに $\Sigma_0 = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(s\bar{K}_0 - \bar{A}_0) = 0 \}$ の部分集合をなすが, $\lambda \in \Sigma_0$ が不変モードかどうかは次の補題を用い判定できる.

<補題 2> 以下の 2 条件は等価である.

(i) $\lambda \in \Sigma_0$ は (K_p, A_p, B_p) の不変モードである.

(ii) $\exists \mathfrak{L} \subset \mathbb{Q} \triangleq \{1, 2, \dots, l\}$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & (\lambda \bar{K} - \bar{C})^{\mathfrak{L}} \\ \bar{B}^{\mathfrak{L}-\mathfrak{L}} & \lambda \bar{K}_0 - \bar{A}_0 \end{bmatrix} < n$$

ただし $\mathfrak{L} = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ のとき

$$\bar{B}^{\mathfrak{L}} \triangleq [\bar{b}_{i_1} \ \bar{b}_{i_2} \ \dots \ \bar{b}_{i_t}] \quad , \quad (\lambda \bar{K} - \bar{C})^{\mathfrak{L}} = \begin{bmatrix} \lambda \bar{k}_{i_1}^{\mathfrak{L}} - \bar{c}_{i_1}^{\mathfrak{L}} \\ \vdots \\ \lambda \bar{k}_{i_t}^{\mathfrak{L}} - \bar{c}_{i_t}^{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}$$

とする。』(証明はマトロイド理論でよく知られた Rado の定理を用いてできる。詳しくは文献(4)を参照されたい。)

補題1から直ちに次の結果が得られる。

<補題3> 『次の2条件は等価である。』

(i) (K_p, A_p, B_p) は構造可制御である。

(ii) (a) $\forall \lambda \in \Sigma$, generic rank $[\lambda K_p - A_p \ B_p] = n$

(b) $\Gamma([sK_p - A_p \ B_p])$ は (s, p) 因子を持たない。』

上の条件(ii)の(a)が成立しないとき、不変モードが非構造可制御、(b)が成立しないときには変動モードが非構造可制という。

3. 構造可制御性の判定

不変モードと変動モードの可制御性を個別に考察することにより、 (K_p, A_p, B_p) が構造可制御であるための必要十分条件が得られる。

さらに次の補題を用意する。

<補題4>

$$\Upsilon(s, p) = \begin{bmatrix} 0 & -I_q & \begin{matrix} s\bar{k}_1^t - \bar{c}_1^t \\ \vdots \\ s\bar{k}_q^t - \bar{c}_q^t \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{d}_1^t \\ \vdots \\ \bar{d}_q^t \end{matrix} \\ I_q & p_1 & \ddots & 0 \\ & \ddots & p_q & 0 \\ -\bar{b}_1 \cdots -\bar{b}_q & 0 & s\bar{K}_0 - \bar{A}_0 & \bar{B}_0 \end{bmatrix}, \quad Z(s, p) = \begin{bmatrix} H_{11} \cdots H_{1q} & -I_q & 0 & H_{10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{q1} \cdots H_{qq} & p_1 & \ddots & 0 \\ I_q & \ddots & p_q & 0 \\ -\bar{b}_1 \cdots -\bar{b}_q & 0 & s\bar{K}_0 - \bar{A}_0 & \bar{B}_0 \end{bmatrix}$$

とおく。ただし H_{ij} は伝達関数

$$H_{ij}(s) = \begin{cases} (s\bar{K}_0 - \bar{C}_0)^t (s\bar{K}_0 - \bar{A}_0)^{-1} \bar{b}_j & (i, j=1, \dots, l) \\ -(s\bar{K}_0 - \bar{C}_0)^t (s\bar{K}_0 - \bar{A}_0)^{-1} \bar{B}_0 + d_i^t & (i=1, \dots, l) \end{cases} \quad (6)$$

を表わす。このとき

$$\Gamma([sK_p - A_p \ B_p]) = \Gamma(Y(s, p)) = \Gamma(Z(s, p))$$

が成立する。\$Z(s, p)\$ の要素は \$s\$ に関しては有理式であるが、その最大サイズ小行列式は \$s, p\$ の多項式であるので、それらに対する最大共通因子 \$\Gamma(Z(s, p))\$ が定義できる。』

不変モードの可制御性

補題 3 の条件 (ii-a) および補題 4 より次の結果が得られる。

[定理 1] 『次の 2 条件は等価である。

(i) \$(K_p, A_p, B_p)\$ の不変モードは可制御

(ii) 任意の \$\lambda \in \Sigma\$ に対し

$$\forall \pi \in \mathbb{Q} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & (\lambda \bar{K} - \bar{C})^\pi & \bar{D}^\pi \\ \bar{B}^{\mathbb{Q}-\pi} & \lambda \bar{K}_0 - \bar{A}_0 & \bar{B}_0 \end{bmatrix} \geq n$$

が成立する。』

変動モードの可制御性

補題 4 の行列 \$Z(s, p)\$ を用いて変動モードの構造可制御性の条件が導出できるが、それには (6) 式で定義した伝達関数 \$H_{ij}(s)\$ によって決まる有向グラフを利用する。

[定義 2] 『\$G(K_p, A_p, B_p)\$ は節点集合 \$N = \{v_0, v_1, \dots, v_l\}\$, 有向枝集合 \$E = \{e_{ij} \triangleq (v_j \rightarrow v_i) \mid H_{ij}(s) \neq 0\}\$, 重み関数 \$f\$:

$e_{ij} \mapsto H_{ij}(s)$ から成る重み付有向グラフである。』

[定理 2] 上の 2 条件は等価である。

- (i) (K_p, A_p, B_p) の変動モードは可制御。
- (ii) $G(K_p, A_p, B_p)$ において v_0 から可到達な節点の集合を $R (\subseteq N)$ とする。このとき、 $R = N$ であるか、又は $N \neq R$ ならば、 $G(K_p, A_p, B_p)$ の $N-R$ に関するセクション部分グラフ⁽¹⁵⁾に完全に含まれる任意のサイクルの重み積は s を含まない。』
(証明は文献 [4] を参照されたい。)

参考文献

- [1] C. T. Lin: Structural Controllability; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-19-3, 201/208 (1974)
- [2] R. W. Shields and J. B. Pearson: Structural Controllability of Multinput Linear Systems; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-21-2, 203/212 (1976)
- [3] K. Glover and L. M. Silverman: Characterization of Structural Controllability; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-21-4, 534/537 (1976)
- [4] S. Hosoe and K. Matsumoto: On the Irreducibility Condition in the Structural Controllability theorem; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-24-6, 963/966 (1979)
- [5] H. Mayeda: On Structural Controllability Theorem; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-26-3, 795/798 (1981)
- [6] J. P. Corfmat and A. S. Morse: Structural Controllable and Structural Canonical Systems; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-21-1, 129/131 (1976)

- [7] B. D. O. Anderson and Hui-min Hong: Structural Controllability and Matrix Nets; Int. J. Control 35-3, 397/416 (1982)
- [8] 青木, 細江, 早川: 中間標準形で記述されたシステムの構造可制御性; 計測自動制御学会論文集 19-8, 628/635 (1983)
- [9] 松本孝裕, 池田雅夫: 中間標準形で表わされた系の構造可制御性; 同上, 19-8, 601/606 (1983)
- [10] 室田: 補助変数をもつ線形時不変系の構造可制御性; 同上 19-2, 104/109 (1983)
- [11] E. L. Yip and R. F. Sincovec: Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems; IEEE Trans. Auto. Contr, AC-26, 703/707 (1981)
- [12] 早川, 細江, 伊藤: 中間標準形方程式系の動的次数と可制御性; 電子通信学会論文誌, 64-A-9, 752/759 (1981)
- [13] G. C. Verghese, B. C. Levy and T. Kailath: A generalized state-space for singular systems; IEEE Trans. Auto. Contr, AC-26, 811/831 (1981)
- [14] 青木, 細江, 早川: パラメータ従属な Descriptor Form における構造可制御性; 電気学会システム制御研究会資料, SC-83-22, 117/136 (1983)
- [15] 尾崎他: グラフ理論, コロナ社 (1975)