

時間的変化の急な流れに関する数値解析

岩 佐 義 朗・多 田 彰 秀

NUMERICAL ANALYSIS OF RAPIDLY VARIED UNSTEADY FLOWS IN OPEN CHANNEL

By *Yoshiaki IWASA* and *Akihide TADA*

Synopsis

The present study deals with the development of numerical analysis of rapidly varied unsteady flows in a flume and in a river, like bore and surge. The fundamental equations consist of continuity and momentum equations and are transformed into the characteristics forms. Finite difference scheme for the method of characteristics will be improved by introducing parabolic interpolation instead of linear interpolation. Comparative studies of numerical analysis with Lighthill's linear theory and hydraulic experiments have been made on simple waves in an ideal channel and rapidly varied unsteady flow in a flume. The results shows that the improved method of characteristics will usefully be applied to rapidly varied unsteady flow in a uniform flume.

1. 緒 言

近年、電子計算機の驚異的な発達にともなう、水理現象を解析していく方法論もその影響を受けて変化している。すなわち、従来からの単純な条件のもとでの理論的な解析や水理実験的な解析に代って、現象を記述する基礎式をそのまま数値的に解く数値解析の方法が、一般的になっている。このような中で、開水路非定常流のうち洪水流に代表される時間的変化の緩やかな流れについては、すでに多くの数値解析法が提案され、また実用化されている。一方、時間的な変化の急な流れは、ダムの破壊、ゲートの緊急開放、河川への津波の遡上などによって発生し、数値解析上取扱いの難しい不連続部を有する流れとなることが多い。このため、そのような流れに対する数値解析法は、十分に確立されているとはいえない。わずかに、Chaudhryらによる陰式四点差分法を用いた研究¹⁾ および $x-t$ 平面において特性曲線上に沿って基礎式を積分するという数値的に極めて複雑な方法^{2),3)} が試みられているにすぎない。また、熱力学の分野において shock wave の数値解析のために開発された Lax-Wendroff 法を開水路非定常流に適用することが提唱されている⁴⁾ が、この差分法は、精度の高い解が得られる反面、水路の一様性に対する要求が強く実際問題に適用しにくい点を有している。

本研究は、以上の点を踏まえ、不連続部を含む時間的変化の急な流れの数値解析法の開発を目的としている。まず、一次元解析法の運動量解析法による開水路非定常流の基礎式およびその保存則系を示すとともに、それを特性曲線表示する。ついで、従来から岩佐・井上が用いてきた固定格子点の特性曲線法⁵⁾ における内挿計算に二次内挿を導入した計算法を紹介し、それぞれの特性曲線の方に応じた差分式を導くとともに、二次内挿の特性曲線法による差分式を用いた数値計算法について述べる。最後に、広幅長方形断面の一様水路内に想定した単斜上昇波の数値シミュレーションおよび水理実験との検討を行ない、時間的変化の急な流れに対する内挿精度を上げた特性曲線法の有効性、妥当性について考察している。

2. 基礎式と特性曲線表示

2.1 基礎式

対象とする流れの特性を考慮し、一次元運動量解析法を適用すれば、時間的变化の急な流れの基礎式は、次のように表わされる⁶⁾。

$$\text{連 続 式; } \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{運動量式; } \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\beta v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda' \cos \theta}{A} \frac{\partial}{\partial x} (h_a A) = s_0 - s_f \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 A : 流水断面積、 Q : 流量、 q : 単位長さあたりの横流入量、 $v = Q/A$: 平均流速、 h_a : 水面から流水断面の図心までの深さ、 $s_0 = \sin \theta$: 水路床こう配、 s_f : 摩擦こう配、 h : 水深、 β : 運動量係数、 λ' : 圧力分布係数、 g : 重力加速度、 x : 距離、 t : 時間である。なお、抵抗則として Manning 式を採用すれば、摩擦こう配は、 $s_f = n^2 v^2 / R^{4/3}$ (n : Manning の粗度係数、 R : 径深) と表わされる。

ここで、以下の議論を簡単にするために次のような仮定を設ける。(i)対象とする流れは、常流であり、厳密な意味での段波の発生には到っていない。(ii)水路は長方形断面の一樣水路とし、横流入量 q は存在しない。

次に、次式で定義される比力 M

$$M = \frac{\beta Q^2}{gA} + \lambda' h_a A \cos \theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

を(2)式に導入すれば、(2)式はつぎのように書き改められる。

$$\text{運動量式; } \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (gM)}{\partial x} = gA(s_0 - s_f) \quad \dots\dots\dots (4)$$

さらに、(1)および(4)式は保存則系としてまとめられ、つぎのように表わされる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = Q \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} Q \\ gM \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(s_0 - s_f) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。

2.2 特性曲線表示

保存則系で表わされた基礎式を特性曲線表示すれば、(7)式の特性曲線に沿って、(8)式で示される基礎式の線型結合がそれぞれ成立する (複号同順)。なお、流れは常流と仮定しているので、2本の特性曲線の方向は異符号となり、正号の特性曲線を ζ_+ 、負号のそれを ζ_- で表わしている。

$$\text{特性曲線 } \zeta_{\pm}; \left(\frac{dx}{dt} \right)_{\pm} = (\beta v \pm c) = \beta v \pm \sqrt{\beta(\beta-1)v^2 + \frac{\lambda' g A \cos \theta}{B}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{特性方程式; } (-\beta v \pm c) \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \left\{ -\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (gM)}{\partial x} - gA(s_0 - s_f) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 B は水面幅、 c は平均流速に相対的にとられた dynamic wave の波速である。

3. 差分式と数値計算法

3.1 差分式

差分化の方法は、(i)保存則系を直接差分式に改めるもの (例えば、Lax-Wendroff 法や leap-frog 法など) と(ii)保存則系を最初に特性曲線表示しその後差分化するものと大別される。ここでは、後者に従い、

固定格子点の explicit scheme を用いるとともに、特性曲線の方向に応じて x 方向の差分の取り方を変える方法を採用している。これは、従来より岩佐・井上によって用いられてきた特性曲線法である（以後、CH1法と呼ぶ）。

次に、Fig. 1 を参照しながら具体的な差分式について説明する。従来のCH1法では、Fig. 1 の R 点および S 点での水理量 f を $(j+1, n)$ 点と (j, n) 点および (j, n) 点と $(j-1, n)$ 点の二点間の線形内挿により求めてきた。この研究では、さらに近似の精度を上げる目的で、線形内挿を $(j+1, n)$ 点、 (j, n) 点、 $(j-1, n)$ 点の三点間の二次内挿に改め R 点および S 点の水理量 f_R および f_S を求める方法（以後、CH2法と呼ぶ）を導入する。従って、(8)式における x 方向の微分値が差分化の段階でCH1法と異なり、次のようになる。

④₊に沿う関係では、

$$\text{CH1法; } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_j^* - f_{j+1}^*}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} \text{CH2法; } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_j^* - f_R^*}{\Delta x_R} = & -\frac{1}{2\Delta x} (f_{j+1}^* - f_{j-1}^*) \\ & -\frac{1}{2} \frac{\Delta x_R}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^* - 2f_j^* + f_{j-1}^*) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

④₋に沿う関係では、

$$\text{CH1法; } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{j-1}^* - f_j^*}{\Delta x}$$

$$\text{CH2法; } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_S^* - f_j^*}{\Delta x_S} = -\frac{1}{2\Delta x} (f_{j+1}^* - f_{j-1}^*) + \frac{1}{2} \frac{\Delta x_S}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^* - 2f_j^* + f_{j-1}^*) \dots\dots\dots (10)$$

また、 R 点と S 点での水理量 f_R および f_S は、

$$f_R = f_j^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_R}{\Delta x} \right) (f_{j+1}^* - f_{j-1}^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_R}{\Delta x} \right)^2 (f_{j+1}^* - 2f_j^* + f_{j-1}^*) \dots\dots\dots (11.1)$$

$$f_S = f_j^* - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_S}{\Delta x} \right) (f_{j+1}^* - f_{j-1}^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_S}{\Delta x} \right)^2 (f_{j+1}^* - 2f_j^* + f_{j-1}^*) \dots\dots\dots (11.2)$$

となる。このような二次内挿を導入した差分式に従って (8) 式を差分化すれば、運動量解析法による数値計算式として次式が得られる。

上流から下流へ伝播する関係：

$$\begin{aligned} (-\beta v + c)_j^* \left(\frac{A_j^{*+1} - A_j^*}{\Delta t} + \frac{Q_j^* - Q_R^*}{\Delta x_R} \right) + \left\{ \frac{Q_j^{*+1} - Q_j^*}{\Delta t} + g \frac{M_j^* - M_R^*}{\Delta x_R} - \frac{g}{2} (A_j^{*+1} (s_0 - s_{f_j}^{*+1}) \right. \\ \left. + A_R^* (s_0 - s_{f_R}^*)) \right\} = 0 \dots\dots\dots (12.1) \end{aligned}$$

下流から上流へ伝播する関係：

$$\begin{aligned} (-\beta v - c)_j^* \left(\frac{A_j^{*+1} - A_j^*}{\Delta t} + \frac{Q_S^* - Q_j^*}{\Delta x_S} \right) + \left\{ \frac{Q_j^{*+1} - Q_j^*}{\Delta t} + g \frac{M_S^* - M_j^*}{\Delta x_S} - \frac{g}{2} (A_j^{*+1} (s_0 - s_{f_j}^{*+1}) \right. \\ \left. + A_S^* (s_0 - s_{f_S}^*)) \right\} = 0 \dots\dots\dots (12.2) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta x_R = (\beta v + c)_j^* \Delta t$ 、 $\Delta x_S = |(\beta v - c)_j^*| \Delta t$ 、 Q_R^* 、 Q_S^* ： $t = n\Delta t$ における Fig. 1 の R 点および S 点の流量 Q を表わし、それぞれ (11.1)、(11.2) 式より求められる。 M_R^* 、 M_S^* 、 A_R^* 、 A_S^* 、 $s_{f_R}^*$ 、 $s_{f_S}^*$ についても同様である。また、Vasiliev の条件⁷⁾を避けるために導入した $A_j^{*+1} s_{f_j}^{*+1}$ については、 $n^2 |v_j^*| Q_j^{*+1} / (R^{*+1})^{4/3}$ で近

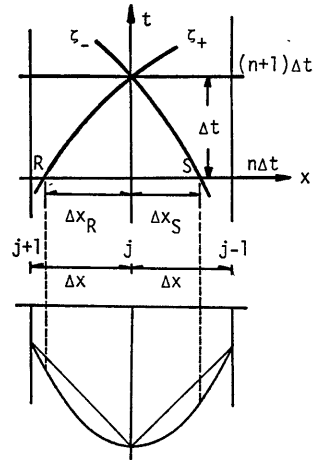


Fig. 1 Finite difference scheme for characteristics method

似するものとする。

さらに, (12.1), (12.2) 式をまとめれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} U^{*+1} = & U^* + \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dx} \right) (F_{i+1}^* - F_{i-1}^*) + \frac{1}{2} \tilde{A}_i^* \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 (F_{i+1}^* - 2F_i^* + F_{i-1}^*) \\ & + \frac{dt}{4} \left(\frac{dt}{dx} \right) \tilde{B}_i^* (q_{i+1}^* - q_i^*) + \frac{dt}{4} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \tilde{C}_i^* (q_{i+1}^* - 2q_i^* + q_{i-1}^*) + \frac{dt}{2} \tilde{D}_i^* q_{i+1}^* + \frac{dt}{2} \tilde{D}_i^* q_i^* \\ & \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta v^2 + c^2 & 2\beta v \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2\beta v \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta v \\ 0 & 3\beta^2 v^2 + c^2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

(13)式からも明らかなように, CH 2法は, 基礎式が線形でしかも斉次な場合には, Lax-Wendroff 法と一致する⁹⁾から, 線形内挿を用いた特性曲線法と Lax-Wendroff 法の中間に位置することになる。

3.2 数値計算法

運動量解析法による数値計算式として, ここでは前掲の(12.1)式および(12.2)式を用いることにする。

(1) 中間点の計算法; (12.1)式および(12.2)式中の添字 n を有する水理量は, 初期値あるいは前回の計算結果から既知である。従って, 境界点以外の中間点では, (12.1)式と(12.2)式を連立させて解くことにより, 未知量 A_i^{*+1} および Q_i^{*+1} が求まる。

(2) 境界点の計算法; 境界点すなわち計算区間の上流端および下流端では, 上述のCH 2法が適用できないので, 従来のCH 1法を用いて計算する。その際, 上流端では, 特性曲線 c_+ 上で成立する関係式と境界条件, 下流端では, 特性曲線 c_+ 上で成立する関係式と境界条件からそれぞれ未知量を算出する。従って, 境界条件としては, 水位(水深)―時間関係, 流量―時間関係, 水位―流量関係などのうちからどれかひとつを与えればよい。

(3) 初期条件の計算法; 初期条件としては, 等流あるいは不等流計算の結果を与えている。なお, 後者の場合には, 二点間の差分式を用いる不等流の計算式と非定常項を省略した三点による差分式(12.1)および(12.2)式の間の整合性が従来のCH 1法ほど良好ではなく, さらに検討の必要がある。

(4) 安定性に関する条件; 差分式(12.1)および(12.2)の安定性の必要条件としては, Courant-Friedrichs-Lewy の条件⁹⁾

$$\left| \frac{dt}{dx} \right| \leq \frac{1}{|v \pm c|} \dots\dots\dots (14)$$

を用い, 時間間隔 dt は, (14)式がつねに満足されるように選定する。

4. 二次内挿を用いた特性曲線法の適用

前節で説明された二次内挿を導入した特性曲線法による差分式を用いて, 広幅長方形断面の一様水路内に想定した単斜上昇波の数値シミュレーションを行なうとともに, 水理実験と数値シミュレーションの結果を比較し, 検討を加える。

4.1 単斜上昇波の数値シミュレーション

径深 R が水深で近似される広幅長方形断面一様水路の上流端に単斜上昇波を与え, 波先の挙動および伝播特性を数値シミュレーションした。すなわち, Table 1 に示されるような2ケースについて計算を行なった。計算に用いた諸条件を示せば, 次のとおりである。

(1) 水理条件; 水路長 20.0m, 水路床こう配 1/500 の広幅長方形断面の一様水路を想定した。Manning

Table 1 Explanation of case study for simple wave

Name of CASE	T_* (sec)	$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)$ at up (m/s)		λ
CASE 1	0.50	3.0×10^{-2}	$> K$	5.25
CASE 2	20.00	7.5×10^{-4}	$< K$	0.41

condition; $n=0.011(\text{m}^{-1/3} \cdot \text{s})$, $h_0=0.03(\text{m})$
 $V_0=0.393(\text{m/s})$, $K=8.91 \times 10^{-4}(\text{m/s})$

の粗度係数は, $n=0.011\text{m}^{-1/3}\text{s}$ とした。

(2) 境界条件; 上流端では, Fig. 2 に示すような水位-時間関係を与えた。下流端では, 便宜的に初期の水位が保たれるものとした。なお, この下流端の境界条件は, 擾乱が下流端まで伝播しない間でのみ有効である。

(3) 初期条件; 初期水深 $h_0=0.03\text{m}$, 初期流速 $v_0=s^{1/2}h_0^{3/2}/n$ の等流状態を初期条件として与えた。

(4) 波先の水面こう配; Lighthill^[10]らの線形理論に従えば, 上流端で与えられた擾乱の波先における水深変化率 $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{up}$ が次式で定義される K の値より大きい時, 水面こう配は, 漸増し bore が発生するとされている。

$$K = \frac{2}{3} \lambda_L h_0 \left(1 - \frac{2}{3} F_r\right) (1 + F_r) \dots\dots\dots (15)$$

ここに, $\lambda_L = g s_0 / v_0$, Froude 数 $F_r = v_0 / \sqrt{g h_0} \cos \theta$ である。次に, (3)で示された初期水深および初期流速を用いて K の値を求めると, $K=8.91 \times 10^{-4}\text{m/s}$ となる。一方, 上流端で想定する単斜上昇波の水深変化

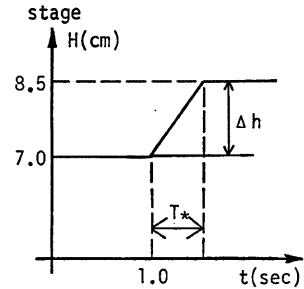
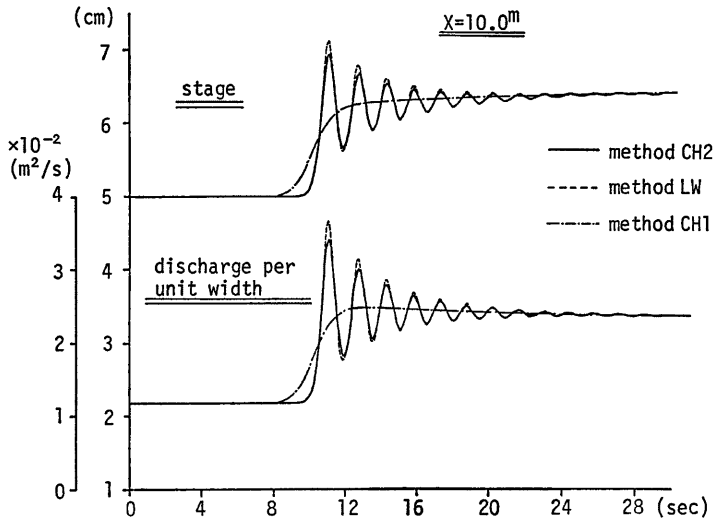
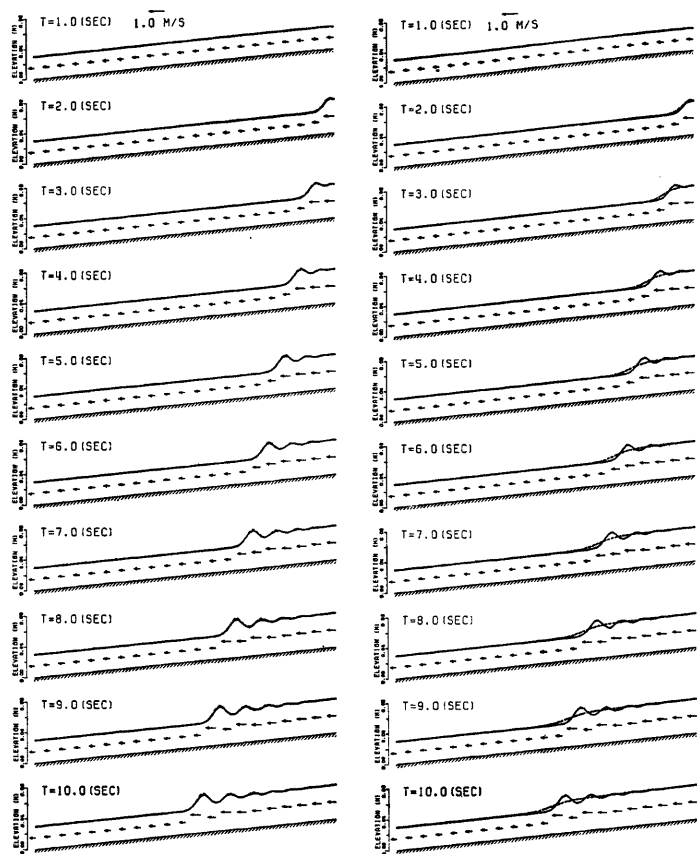


Fig. 2 Upstream boundary condition of simple wave


 Fig. 3 Hydrographs of simple wave at $x=10.0\text{m}$ in three different methods
 ($\Delta x=0.25\text{m}$, $\Delta t=0.01\text{ sec}$)

率は, CASE 1 の場合 $3.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}$, CASE 2 の場合 $7.50 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ であるから, 前者の場合に bore が発生し, 後者の場合に擾乱が減衰するものと推測される。また, Table 1 の λ は, 高橋¹¹⁾が提案した不定流の物理的性質を左右する無次元量である。 λ の値から判断しても同様に, 前者の場合は段波状の波と判断される。

(5) 計算結果と考察: Fig. 3 は, CASE 1 について CH1 法, CH2 法および 2-step Lax-Wendroff 法(以後, LW 法と呼ぶ) の三つの方法で計算した水路中央部(上流端より 10m 下流の地点)での水位および単位幅流量のハイドログラフである。なお, $\Delta x = 0.25 \text{ m}$, $\Delta t = 0.01$ 秒として計算した。図中の実線は, ここで提案した CH2 法による計算結果で, 約 1.5 秒の周期の減衰振動を示し次第に一定値へ収束している。破線は, LW 法による結果で, 波先後方に生ずる減衰振動の振幅が CH2 法より大きいものの, 両者は良い一致



(a) method of CH2 and method of LW (b) method of CH2 and method of CH1

Fig. 4 Propagation of free surface profiles ($\Delta x = 0.25 \text{ m}$, $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$)

を示しているといえる。一方、従来からのCH1法による結果（一点鎖線）では、水位、単位幅流量ともにCH2法による計算値の変動の中間の値をとり、波先近傍の急な変化が分散され平滑化されていることが確認される。さらに、Fig. 4(a) および (b) は、水面形の時間的な変化を二つづつ示したものである。実線は、両図ともにCH2法によって求めた水面形で、破線は、Fig. 4(a) がLW法、Fig. 4(b) がCH1法によるものである。Fig. 3 のハイドログラフから予想されるとおり、Fig. 4(a) では、CH2法とLW法との水面形が良い一致を示し、ほとんど差異は認められない。また、Fig. 4(b) から、CH1法の水面形では、波先近傍での急な変化も平滑化されたまま伝播していることが認められる。これらの事よりCH2法は、一様水路に関する限りLW法と精度上ほとんど差のない計算法であるといえよう。

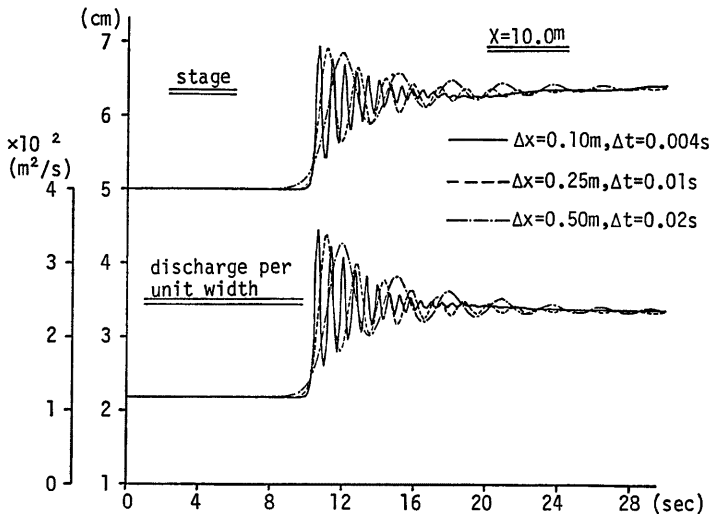


Fig. 5 Hydropgraphs of simple wave at $x=10.0\text{m}$ by three different Δx (using method of CH2)

Fig. 5 は、CASE 1 の場合について、CH2法を用い $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ を一定に保ったままで格子幅 Δx を変化させたときの水位と単位幅流量のハイドログラフである。計算に用いた格子幅 Δx および時間間隔 Δt を示せば、(i) $\Delta x=0.10\text{m}$, $\Delta t=0.004\text{秒}$; 実線, (ii) $\Delta x=0.25\text{m}$, $\Delta t=0.01\text{秒}$; 破線, (iii) $\Delta x=0.50\text{m}$, $\Delta t=0.02\text{秒}$; 一点鎖線である。なお、ここでは $\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.04$ としている。3 ケースとも波先後方に LW 法と同様な減衰振動を有しており、その収れん性は、 Δx が小さいほど良好となり、早い時間に一定値へ収れんしている。また、振動の周期は、 Δx の減少にともなって短くなる傾向にある。一方、波先の波高および伝播距離は、 Δx の減少に反して増加している。さらに、波先での水深変化率 $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)$ は、 Δx が減少するほど大きくなり、より sharp な立ち上がりとなっていることが認められる。従って、 Δx が小さいほど不連続部の再現性の高いシミュレーションが行なえるものと予想される。しかしながら、ここでは理論的裏づけがなされていないのでこれ以上の言及は控える。

Fig. 6 は、CASE 1 および CASE 2 の両ケースについてCH2法を適用してシミュレーションを行ない、得られた水路中央部の水位と単位幅流量のハイドログラフである。なお、ここでは $\Delta x=0.10\text{m}$, $\Delta t=0.004\text{秒}$ が用いられている。図中に示されている C_r は、

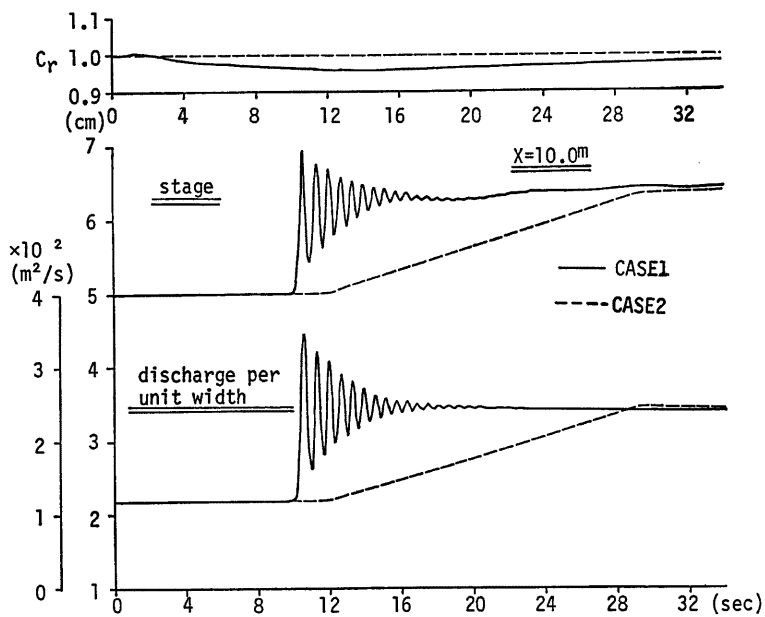


Fig. 6 Hydrographs of simple waves at $x=10.0\text{m}$ in CASE1 and CASE 2 (using method of CH2, $dx=0.10\text{m}$, $dt=0.004\text{ sec}$)

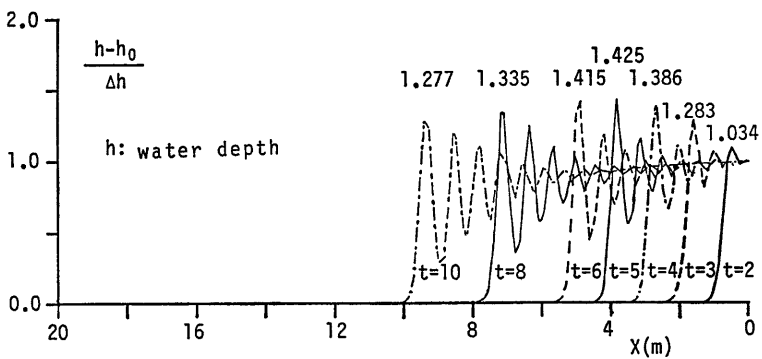


Fig. 7 Numerical behavior of wave front in CASE 1

$$C_r = \frac{\int_0^L Q(L, t) dt}{\int_0^L Q(o, t) dt - \int_0^L \{A(x, t) - A(x, o)\} dx} \dots\dots\dots (16)$$

で定義される値であり、 $C_r=1.0$ の時、計算結果は連続式を満足しているものと解釈される。ここに、 L ：

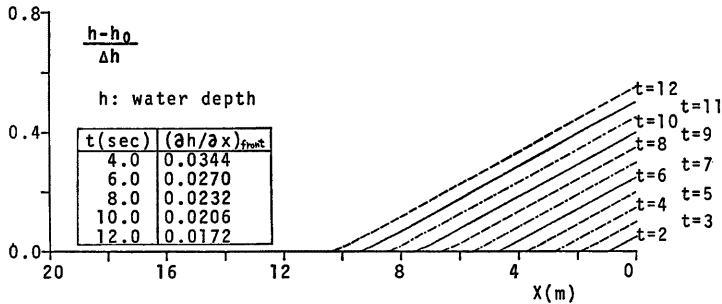


Fig. 8 Numerical behavior of wave front in CASE 2

水路長を表わす。CASE 1 の C_r (実線) は、 $t=1.5$ 秒から変化し、 $t=12.5$ 秒付近で最悪 ($C_r=0.956$) となるが、その後回復して 1.0 の近傍値に収束している。また、CASE 2 の C_r (破線) は、ほぼ 1.0 の値をとっている。従って、両ケースとも連続性は十分に満たされていると判断できる。また、前述したように Lighthill の理論に従えば、上流端で与えられた擾乱は、CASE 1 の場合発達して bore となり、CASE 2 の場合減衰してしまう。一方、シミュレーションの結果では、CASE 1 の場合、水位および単位幅流量ともに波先近傍で減衰振動しながら CASE 2 とほぼ同じ値に収束している。

Fig. 7 は、Fig. 6 の CASE 1 における無次元量 $(h-h_0)/\Delta h$ と x との関係を経時的に示したものである。図より波頂は、 $t=5.0$ 秒まで発達し、その後減衰している。波先の水面こう配については、 $t=6.0$ 秒まで増大 (特に $t=2.0$ 秒から $t=3.0$ 秒の間で急激に増大) し、それ以後では、波先が下流端の影響を受けるまではほぼ一定で伝播している。Fig. 8 は、Fig. 6 の CASE 2 について $(h-h_0)/\Delta h$ と x の関係を経時的に示したものである。水面こう配は、平均的に見れば一定であるが、波先部に注目すれば、時間とともに小さくなっている (Fig. 8 の $(\partial h / \partial x)_{front}$ の値を参照)。

以上より、CH2 法は、短時間であるが擾乱の発達および減衰を再現していると考えられる。しかしながら、計算された波先近傍における不連続的な水面形状が実際の bore を表現しているかどうかについては、さらに検討が必要である。

4.2 水理実験による検討

(1) 実験方法；実験装置は、Fig. 9 に示されるような水路長 10m、水路幅 25cm、深さ 20cm、平均水路床こう配 1/500 の長方形断面の一様水路 (アルミニウム製、滑面) を用いた。Fig. 10 は、水路床高を示したもので、下流端から 25cm 間隔で測定したものである。実験では、まず給水装置 A より一定の流量を給水して定常流を作った。ついで、水路上流部の給水タンクと水路の境に堰上板を挿入するとともに、バルブ B の開放と堰上板の除去を瞬時に行ない時間的変化の急な流れを発生させた。また、下流側から上流側へ伝播する時間的変化の急な流れについては、下流端段落部に堰上板を瞬時に挿入して堰上げるとともに、下流端からの流出を零として発生させた。水位の測定は、Fig. 9 に示される上流端、No. 17、No. 9、下流端の四点で容量式波高計を用い、ペンレコーダーに記録させて行なった。流量については、三角堰を用いて初期の定常状態にのみ測定した。

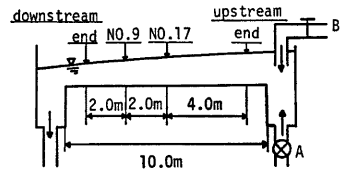


Fig. 9 Experimental set-up

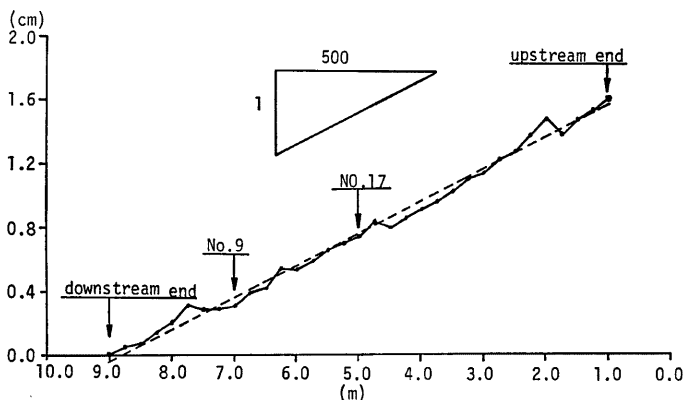


Fig. 10 Actual elevation of flume bottom

(2) 数値計算との比較; 計算を行なうにあたっては, Fig. 9 の上流端および下流端地点の水位記録を0.375秒ごとに読み取り, それぞれ上流側および下流側の境界条件とした。初期条件は, 初期流量および下流端地点での初期水位を用い不等流計算により設定した。また, 計算はCH 2法の差分式によって行なった。ただし, CH 2法は境界点では適用できないのでCH 1法を用いている。なお, Manning の粗度係数としては, $n=0.0090\text{m}^{-1/3}\text{s}$ を用いた。

Fig. 11(a), (b) および (c) は, 初期流量が4.14 l/s で, 流量の増加にともなう急激な水位変化が上流から下流へ伝播する流れ(CASE-J)の水位ハイドログラフである。なお, 実験時に目測ではあるが, 不連続部は確認された。図中には, No. 9 および No. 17 での実験値, CH 2法による計算結果ならびに境界条件が示されている。なお, Fig. 11(a) では $\Delta x=0.25\text{m}$, $\Delta t=0.005$ 秒, Fig. 11(b) では $\Delta x=0.10\text{m}$, $\Delta t=0.002$ 秒, Fig. 11(c) では $\Delta x=0.05\text{m}$, $\Delta t=0.001$ 秒が用いられている。3つの図よりつぎの点が見出される。

- (i) 計算された水位の上昇傾向は, 定性的に実験結果と良く一致しており, CH 2法の再現性は高い。
- (ii) Fig. 11(a) で, 実験値より求めた波先の伝播距離は, 数値シミュレーションして求めた伝播距離より大きく, 下流ほど両者の差は顕著となっている。また, シミュレーションによって求められた波先の水深変化率は, 実験値のそれよりも小さい。しかしながら, これらの問題点は, $\frac{dt}{dx} (=0.02)$ を一定に保ったまま Δx を小さくすることにより著しく改善される (Fig. 11(b), Fig. 11(c) 参照)。
- (iii) 波先の波高は, 計算値の方が実験値よりも大きい。従って, 実験精度のことも考慮しなければならないが, CH 2法の差分式では波先部での波高の減衰が十分に再現されない。

Fig. 12 は, 初期流量が 5.27 l/s で, 下流端段落部での堰上げによる水位変化が上流へ遡上する場合 (CASE-C) の水位ハイドログラフである。実験値と計算値はよく適合しているものの, No. 17 での波先の伝播距離に若干の差異が認められる。すなわち, 実験値より求めた伝播距離は, 数値シミュレーションして求められた伝播距離よりも大きい。なお, ここでは, $\Delta x=0.05\text{m}$, $\Delta t=0.001$ 秒が用いられている。また, Table 2 は, CASE-C および CASE-J の計算結果が連続式を満たしているかどうかを確認するために, (16)式を用いて C_r の時間的な変化を示したものである。表より, 両ケースとも連続性は十分に満足されており, 連続性に関してはCH 2法の精度の高いことが知られる。

5. 結 言

開水路非定常流のうち時間的な変化の急な流れに対する数値解析法の開発を目的として, 二次内挿を導入し

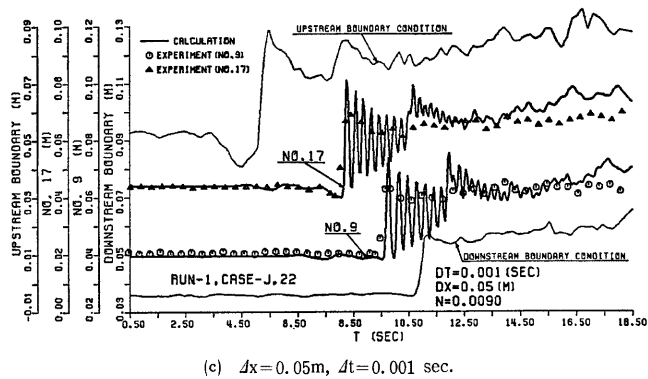
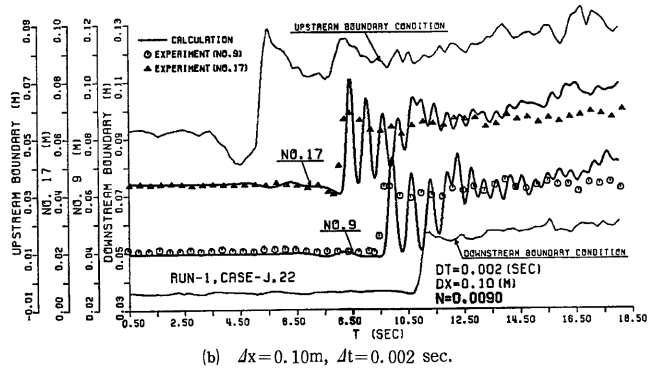
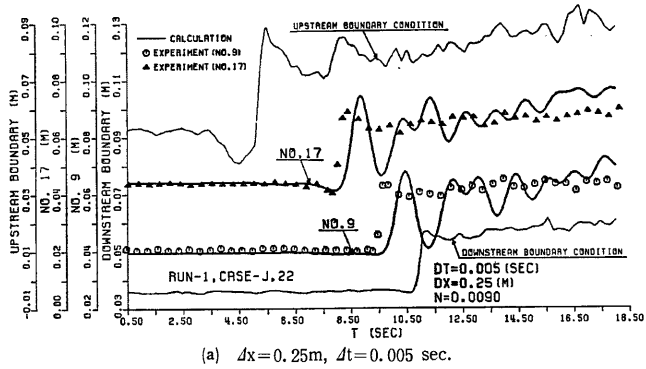


Fig. 11 Comparative representations of rapidly varied unsteady flows in flume (CASE-J)

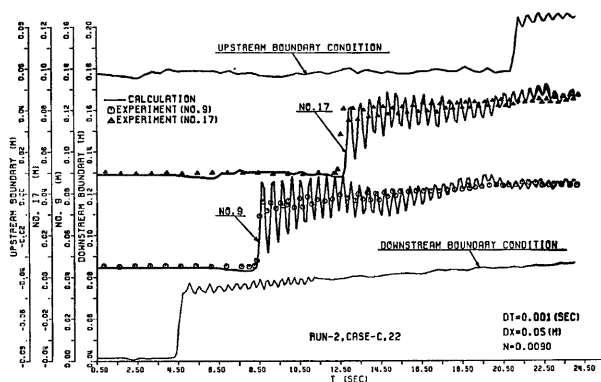


Fig. 12 Comparative representations of rapidly varied unsteady flows in flume
(CASE-C, $\Delta x=0.05\text{m}$, $\Delta t=0.001\text{ sec}$)

Table 2 Computational errors in continuity equation after integration

Time (sec)	Cr	
	CASE-J	CASE-C
1.0	0.982	0.990
2.0	0.987	0.993
3.0	0.989	0.996
4.0	0.992	0.998
5.0	0.994	1.000
6.0	0.982	0.999
7.0	0.960	0.999
8.0	0.959	0.998
9.0	0.986	0.997
10.0	1.001	0.995
11.0	1.020	0.994
12.0	1.028	0.992
13.0	1.033	0.991
14.0	1.016	0.989
15.0	1.023	0.988
16.0	1.017	0.986
17.0	1.017	0.984
18.0	1.019	0.981
19.0		0.978
20.0		0.976
21.0		0.974
22.0		0.973
23.0		0.970

た固定格子点の特性曲線法 (CH2法) を中心に, Lax-Wendroff 法と比較しながら考察してきた。単斜上昇波の数値シミュレーションおよび水理実験にCH2法を適用した結果を要約すれば, つぎのようになる。(i)CH2法は, LW法と同様な二次の精度を有する差分式から構成され, 波先部で数値的な振動を有している。(ii)計算された波先近傍における変化の急な水面形状が実際の bore を表現しているかどうかは明らかではないが, 少なくとも上流端で与えられた擾乱の発達は, CH2法によって再現可能である。(iii)計算上の安定性が保たれている範囲内では, CH2法による時間的変化の急な流れの再現性は, Δx の減少ともなって著しく良好になる。(iv)CH2法は, 連続性に関して高い精度を有している。

今後, 二次内挿を導入した特性曲線法を実河川での問題に適用していくためには, さらに波先部の波高および伝播距離の再現性, 数値振動の抑制などの問題について検討が必要である。なお, ここの計算はすべて京都大学大型計算機センターM-382によって行なわれたことを附記しておく。

最後に, 本研究を行なうにあたり, 京都大学工学部井上和也助教授より終始有益な御助言を賜った。ここに記して深甚なる感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Chaudhry, Y. M. and D. N. Contractor: Application of the Implicit Method to Surges in Open Channels, Water Resources Research, Vol. 9, No. 6, 1973, pp. 1605—1612.
- 2) 多田彰秀・岩佐義朗・植村典央：段波の伝播特性に関する数値シミュレーションについて(2), 土木学会第37回年次学術講演会講演概要集, 1982, pp. 273—274.
- 3) 河西基・白砂孝夫：河道・貯水池系の洪水伝播解析, 第27回水理講演会論文集, 1983, pp. 17—22.
- 4) 土木学会：土木工学における数値解析/流体解析編, サイエンス社, 1974, pp. 36—45.
- 5) 岩佐義朗・井上和也・片山猛：開水路非定常流の数値計算法について, 京大防災研年報, 第19号B-2, 1976, pp. 187—200.
- 6) 岩佐義朗：水理学の解析法, 石原藤次郎編, 水工水理学, 丸善, 1972, pp. 1—21.
- 7) 伊藤剛編：数値解析の応用と基礎, アテネ出版, 1971.
- 8) 前掲 5. pp. 191.
- 9) 井上和也：開水路流れの数値解析, 第16回水工学に関する 夏期研修会講義集, A コース, A—6, 1980.
- 10) Lighthill, M. J. and G. B. Whitham: On Kinematic Waves, I, Flood Movement in Long Rivers, Proc. of Roy. Soc. of London, Vol. 229, 1955, pp. 281—316.
- 11) 高橋保：河道における洪水流の特性に関する研究, 京都大学博士論文, 1971, pp. 23—33.