

*Weak-** Dirichlet algebra に現われる近似について

北大 応電研 中路 貴彦

A を L^∞ の *weak-** Dirichlet algebra, H^∞ をその *weak-** 閉包とするとき, 3つのある種の近似について述べる。1つは実数値関数を実数値有界関数によって近似することと、不変部分空間の形を決定する問題との関係についてである。2つ目は特性関数をそれより本当に小さい特性関数によって近似することと、 H^∞ に属する関数の support set との関係である。3つ目は近似と密接な関係にある maximal 性についてである。

§1. 準備

A が *weak-** Dirichlet algebra であるとは、(i) A が確率測度空間 $(X, \mathcal{A}, m)$ の上の L^∞ の subalgebra であり定数を含む、(ii) $A + \bar{A}$ は L^∞ で *weak-** 稠密であり、(iii)

m は A 上 *multiplicative* である、ことである。

抽象的な *Hardy* 空間 $H^p(m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) とは、 $1 \leq p < \infty$ のとき $H^p(m)$ は A の $L^p(m)$ での閉包でありかつ $H^\infty(m)$ は A の $L^\infty(m)$ での *weak*-* 閉包である。 B^∞ は A を含む $L^\infty(m)$ の *weak*-* 閉 *subalgebra* とし、 $B_0^\infty = \{f \in B^\infty : \int_X f \, dm = 0\}$ とする。 B^p ($1 \leq p < \infty$) とは、 B^∞ の $L^p(m)$ での閉包である。 I_B^∞ は B^∞ の B_0^∞ に含まれる *weak*-* 閉 *maximal ideal* である。その存在は *Zorn* の補題によって示される。 X 上の可測集合 E に対して、 χ_E はその特性関数である。 $f \in L^p(m)$ に対して、 χ_f は f の *support set* E_f の特性関数である。

§2. 不変部分空間

M が $L^p(m)$ の閉部分空間であり、 $f \in M$ かつ $g \in A$ なら $f \cdot g \in M$ が成立するとき、 M を不変部分空間という。次の *modification* の定理として知られている (1, p125)。

定理1 (*Gamelin-Lumer*) M を $L^p(m)$ ($1 \leq p < \infty$) の不変部分空間とする。任意の $f \in M$ に対して $f_n \in M \cap L^\infty(m)$ が存在して、 $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とできる。

もっと詳しく不変部分空間を調べるために、上の定理で、実数値の f に対して実数値の f_n が選べるかどうかを考えてみると、簡単な反例がすぐ得られる。しかし、 $M \cap L^{\infty}(m)$ が algebra となるときには、多くの例はそれが正しい事を示している。そこで次の問題が考えられる。

問題 B^{∞} を A を含む $L^{\infty}(m)$ の weak-* 閉 subalgebra とする。 $\psi \in B^p$ が実数値なら、 $\psi_n \in B^{\infty}$ かつ実数値であるものが存在して、 $\|\psi - \psi_n\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とできる。($1 \leq p < \infty$)

$\mathcal{L}_B^{\infty}$ を B^{∞} の自己共役な部分とし、 $\mathcal{I}_B^{\infty} = \{f \in B^{\infty} : \int_E f \, dm = 0 \text{ すべての } X_E \in B^{\infty}\}$ とする。このとき、もし $B^{\infty} = H^{\infty}(m)$ 又は $B^{\infty} = L^{\infty}(m)$ ならば、 $\mathcal{I}_B^{\infty} = I_B^{\infty} = H_0^{\infty}$ 又は $\mathcal{I}_B^{\infty} = I_B^{\infty} = \{0\}$ である。一般的には、 $\mathcal{I}_B^{\infty} \supseteq I_B^{\infty}$ である。

以後、 S が $L^p(m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) の subset とすると、 $[S]_p$ は S の閉 linear span を示すとする。 $p = \infty$ は weak-* 閉。

定理 2 M を $L^p(m)$ の不変部分空間とする。もし $B^{\infty} M \subseteq M$ で、 $X_E M \neq \{0\}$ である任意の $X_E \in B^{\infty}$ に対して、

$$X_E M \not\supseteq X_E [\mathcal{I}_B^{\infty} M]_p$$

ならば、 $M = X_{E_0} \mathcal{I} B^p$ と表現できる。ここで $\mathcal{I}$ は unimodular 関数であり、 $X_{E_0} \in B^{\infty}$ である。

さて、定理2は病的などの以外の全ての不変部分空間の形を決定しているが、残念な事に逆が成立するかどうかわかっていない。次の定理は、逆が成立することと上に述べた問題とが同値であることを示している。

補題1 $B^\infty = \mathcal{L}_B^\infty \oplus \mathcal{I}_B^\infty$.

ここで $\oplus$ は代数的直和である。更に、 $1 \leq p < \infty$ に対して

$$B^p = [\mathcal{L}_B^\infty]_p \oplus [\mathcal{I}_B^\infty]_p.$$

略証 $\mathcal{L}_B^\infty$ は B^∞ の weak-* 閉 subalgebra だから、 L^∞ 上の作用素の作る algebra として、可換な von Neuman algebra である。 $\mathcal{B}$ を $x_E \in B^\infty$ なる $E \in \mathcal{A}$ よりなる σ -algebra とする。このとき、 $\mathcal{L}_B^\infty$ は確率測度空間 $(X, \mathcal{M}, m)$ 上の本質的に有界な可測関数の全体 $L^\infty(\mathcal{B})$ と一致しかつ $[\mathcal{L}_B^\infty]_p = L^p(\mathcal{B})$ ($1 \leq p < \infty$) となる。 B^∞ の各関数に対して、conditional expectation を見つけて、 $B^\infty = \mathcal{L}_B^\infty \oplus \mathcal{I}_B^\infty$ を示すことができる。 $B^p = [\mathcal{L}_B^\infty]_p \oplus [\mathcal{I}_B^\infty]_p$ ($1 \leq p < \infty$) を示すためには、 $u \in \mathcal{L}_B^\infty$ かつ $F \in \mathcal{I}_B^\infty$ に対して、

$$\left(\int_X |u|^p dm \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |u + F|^p dm \right)^{1/p}$$

を示すとよい。

定理 3 B^∞ を A を含む任意の weak- $*$ 閉 subalgebra

とし、 $1 \leq p \leq \infty$ とする。このとき次は同値である。

(1) $\psi \in B^p$ が実数値なら、 $\psi_n \in B^\infty$ かつ実数値であるものが存在して、 $\|\psi - \psi_n\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) とできる。

(2) 全ての零でない $x_E \in B^\infty$ に対して、

$$x_E B^p \not\subset x_E [9_B^\infty B^p]_p$$

である。

(3) $f \in B^\infty$ で、すべての $x_E \in B^\infty$ に対して $\int_E f \, dm = 0$ なら $\int_X f^2 \, dm = 0$ である。

$$(4) \quad 9_B^\infty = I_B^\infty$$

$$(5) \quad B^\infty = \mathcal{L}_B^\infty \oplus I_B^\infty$$

略証 (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) の順に示すと良い。

(1) $\Rightarrow$ (4) S を B^2 の自己共役な部分とすると、補題 1 から、 $(\mathcal{L}_B^\infty)_2 \oplus (9_B^\infty)_2 = S \oplus (I_B^\infty)_2$ を示せる。

(2) $\Rightarrow$ (3) $R = B^2 \ominus [9_B^\infty B^2]_2$ とすると、任意の $f \in R$ に対して、

$$\int_X g |f|^2 \, dm = 0 \quad (g \in 9_B^\infty).$$

これより、 $|f|^2 \in B^1$ かつ $|f|^2$ は 9_B^∞ を annihilate する。補題 1 より、 $|f|^2 \in (\mathcal{L}_B^\infty)_1 = L^1(\mathcal{B})$ とできるから、 $|f| \in B^2$ かつ $\varepsilon > 0$ に対して $1/(|f| + \varepsilon) \in B^\infty$ とできる。よって

(2) の仮定より、 $f \in R$ として $X_f = 1$ なるように選んで、 $g = f/|f|$ とすると、 $g \in R \cap \mathcal{L}_B^\infty$ を示すことができる。これより、 R は定数 1 を含むから、補題より、 $\mathcal{I}_B^\infty$ が ideal であることを示せる。

§3. $H^\infty(m)$ の support set

$H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の weak- $*$ 閉 subalgebra の中で maximal なら、任意の $f \in H^\infty(m)$ に対して、 $X_f = 0$ か $X_f = 1$ であることは知られている[2]。この § では、一般的な $H^\infty(m)$ に属する関数 f の、 X_f について調べる。次の補題 3 は $H^\infty(m)$ の support set を調べるのに有効であるだけでなく、次の §4 で $H^\infty(m)$ の maximal 性を調べるのに有効である。その証明には、Doffman [1, p138] による次の補題 2 が本質的である。

補題 2 (Doffman) E を X 上の $m(E) < 1$ である可測集合とする。そのとき、 $H^\infty(m)$ の関数で E 上実数値であるが E 上定数でないものが存在する。

補題 3 B^∞ を A を含む $L(\tilde{m})$ の任意の weak- $*$ 閉 sub-algebra とする。もし $X_E \in B^\infty$ かつ $0 \neq X_E \neq 1$ なら

$$X_{E_n} \neq X_E \quad \text{かつ} \quad X_{E_n} \rightarrow X_E \quad \text{a.e.} \quad (n \rightarrow \infty)$$

とできる $X_{E_n} \in B^\infty$ が存在する。又、

$$X_E \neq X_{F_n} \quad \text{かつ} \quad X_{F_n} \rightarrow X_E \quad \text{a.e.} \quad (n \rightarrow \infty)$$

とできる $X_{F_n} \in B^\infty$ が存在する。

略証 $X_F \neq X_E$ 。かつ $X_F \in B^\infty$ なら $X_F = 0$ とする。
 $X_{E_0} \in B^\infty$ がないといえると良い。もし存在したとすると、
 X_E, B^∞ は実数値関数を含まないことは von Neumann の
 定理より示せるから、補題 2 に矛盾する。

定理 4 もし $f \in H(\tilde{m})$ で、 $0 \neq X_f \neq 1$ なら、 $X_{f_n} \neq X_f$
 かつ $X_{f_n} \rightarrow X_f \quad \text{a.e.} \quad (n \rightarrow \infty)$ とできる $f_n \in H(\tilde{m})$ が存
 在する。

略証 $D^\infty = [X_f H(\tilde{m})]_\infty + (1 - X_f) L(\tilde{m})$ とすると、 D^∞
 は weak- $*$ 閉 subalgebra で $H(\tilde{m})$ を含む。このとき、 f
 $\in I_D$ かつ $X_f \in D^\infty$ となり、 I_D が ideal であることと
 補題 3 により定理を示すことができる。

自然な問題として、 $X_f \neq X_{f_n}$ かつ $X_{f_n} \rightarrow X_f \quad \text{a.e.}$
 $(n \rightarrow \infty)$ とできる $f_n \in H(\tilde{m})$ が存在するかどうかがあるが、反

例がある。

反例 $\mathcal{A}$ を torus T^2 の上の Borel set の全体からなる σ -algebra とする。 $\mathcal{A}_0$ を $\mathcal{A}$ の σ -subalgebra で、 $E \times T$ のような Borel set の全体とする。 μ を $0 < \mu(E) < 1$ (ここで μ は T 上の正規 (Haar 測度) である) である T 上のある Borel set に対して、 $\{(E^c \times T) \cap F : F \in \mathcal{A}_0\} \cup \{(E \times T) \cap F' : F' \in \mathcal{A}\}$ のような σ -subalgebra とする。 m を T^2 上の正規 (Haar 測度) とし、 m を σ -subalgebra μ に制限した測度を m_0 とする。

$$\Gamma = \{(n, m) : m > 0\} \cup \{(n, m) : n \geq 0\}$$

とするとき、 A を $(n, m) \in \Gamma$ に対して $z^n g^m$ の多項式である Borel 複素数値関数のつくる algebra とする。ここで、 z と w は T 上の座標関数であり、 $g = \chi_{E \times T} w$ とする。このとき、 A は $L^{\infty}(m_0)$ の weak-* Dirichlet algebra となる。この g は $h \in H^{\infty}(m)$ に対して $\chi_g \neq \chi_h$ ならば、 $\chi_h = 1$ となる関数である。

§4. $H^{\infty}(m)$ の maximal 性

$H^{\infty}(m)$ が $L^{\infty}(m)$ の weak-* 閉 subalgebra の中で maximal とする。もし $g \in L^{\infty}(m)$ が $H^{\infty}(m)$ に属さないなら、 $L^{\infty}(m)$ の全ての

関数は、 $H(\tilde{m})$ の中に係数をとった g の多項式で、*weak*-* topology で近似される。よって *maximal* かどうかは近似問題である。Muhly [2] は、 $H(\tilde{m})$ が *integral domain* ならば $H(\tilde{m})$ は *maximal* であることを示した。ここでは補題3を使う別の証明を与える。

定理 5 (Muhly) $H(\tilde{m})$ についての次の性質は同値である。

- (1) どんな $f \in H(\tilde{m})$ も正測度の集合上で零とならない。
- (2) $H(\tilde{m})$ は $L(\tilde{m})$ の *weak*-* 閉 *subalgebra* の中で *maximal* である。
- (3) $H(\tilde{m})$ は *integral domain* である。

略証 (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) の順に示す。(3) $\Rightarrow$ (2) のみ本質的である。 $H(\tilde{m}) \subsetneq B^\infty \subsetneq L(\tilde{m})$ となる *weak*-* 閉 *subalgebra* があるとする。補題3により、 $\{0\} \subsetneq \sum_{E \in \mathcal{B}} I_E^\infty \subsetneq I_B^\infty$ となる $\sum_{E \in \mathcal{B}} I_E^\infty \in B^\infty$ が存在するから、明らかである。

$H(\tilde{m})$ が *maximal* でなくとも、 $H(\tilde{m})$ を含む *weak*-* 閉 *subalgebra* の中に *maximal* なものがあるかも知れないが、次の否定的な結果を補題3より示すことができる。

定理6 $H(\tilde{m})$ が maximal でないなら、 $H(\tilde{m})$ を含む weak-* 閉 subalgebra の中に maximal なものは存在しない。

略証 B^∞ を weak-* 閉 subalgebra で maximal とすると、 $B^\infty \neq H(\tilde{m})$ としてよい。このとき、零でない $x_{E_0} \in B^\infty$ があって、 $B^\infty = x_{E_0} B^\infty + (1 - x_{E_0}) L(\tilde{m})$ とできる。ここで、 $(1 - x_{E_0}) L(\tilde{m})$ は $L(\tilde{m})$ により reduce される B^∞ の最大の subspace である。補題3より B^∞ より本当に大きく $L(\tilde{m})$ と異なる weak-* 閉 subalgebra を作ることができる。

文 献

1. T. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall, Englewood, Cliff, N.J., 1969.
2. P.S. Muhly, Maximal weak-*Dirichlet algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 36(1972), 515-518.
3. T. Nakazi, Nonmaximal weak-*Dirichlet algebras, Hokkaido Math. J., (to appear).
4. _____, Invariant subspaces of weak-*Dirichlet algebras, (to appear).
5. _____, Superalgebras of weak-*Dirichlet algebras.