

妥当な論理式 (1 階述語論理) の証明図作成の

1 つの方法

名工大 大 芝 猛

永 田 周 郎

舟 橋 栄

与えられた 1 階述語論理の論理式 A に対する妥当性検証手続きに続けて A の証明図 (Gentzen style) を作成する手続きの 1 つをあげる。

(phase 1) 与えられた論理式 A に同等な何らかの冠頭標準形 B を求め、次に B と妥当性において同等な $\exists x_1 \dots \exists x_n D(x_1, \dots, x_n)$ を求める ($D(x_1, \dots, x_n)$ は開論理式) その上で

(phase 2) $D(x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee D(x_{m1}, \dots, x_{mn})$ がトートロジーとなるような自然数 $m \geq 1$ と $x_{ij} \in U(D(x_1, \dots, x_n))$ ($D(x_1, \dots, x_n)$ のエルブラン領域の項) とがあれば (このとき A は妥当) これを見出す手続きの 1 つを [5] において与えた。またこの手続きに対するプログラムを作成し、いくつかの例に適用して得た結果等を報告したが、ここでは更に上記の方法で妥当性の検証が肯定された論理式 A について、その証明図を次の 3 つの phases に分けて作成する

前記 phase において得た $\forall, \exists$ なし $\rightarrow$ トロジ $D(\tau_1, \dots, \tau_n) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ を利用し、まず

(phase 3) $D(\tau_1, \dots, \tau_n) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ の命題論理としての証明図を上方に展開して書き上げ、更に

(phase 4) この $D(\tau_1, \dots, \tau_n) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ にいたる証明図の下に、適切な順序で $\forall, \exists$ 推論を適用^{*}して行くことにより (A の冠頭標準形) $\mathcal{B}$ にいたる証明図を作成する。

(phase 5) 更にこの (A の標準形) $\mathcal{B}$ の下に標準形変形の逆の変形に対する推論を付加して A の証明図をうる

[註] * phase 1 において冠頭標準形 $\mathcal{B}$ から $\forall$ を消去して

$\exists x_1 \dots \exists x_n D(x_1, \dots, x_n)$ を作るとき、スコーラム関数があらわれ従って $D(\tau_1, \dots, \tau_n) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ にスコーラム関数をもつ項があらわれるが、phase 4 において、これらの項は適当な自由変数におきかえられ、かつ $\forall$ 推論によって束縛されて $\mathcal{B}$ にいたる証明図が出来る。そのためこの証明図の中にもスコーラム関数はあらわれない。

[証明図に関する Notation 等]

(0) 本稿での 1 階述語論理の体系は本質的に Gentzen の LK (関数記号を許す) を用いるものとする。

但し phase 3, phase 4 の証明図作成においては便宜上

(1) 始式として $\rightarrow B_1, \dots, B_p, A, C_1, \dots, C_q, \neg A, D_1, \dots, D_r$

$\rightarrow B_1, \dots, B_p, \neg A, C_1, \dots, C_q, A, D_1, \dots, D_r$

($p, q, r \geq 0$) を許すものとする (LK で $A \rightarrow A$ から証明可能)

(2) また推論として, (LK のいくつかの推論を用いておまかせ

うる) 次のものを許すものとする。

$$\text{"}\vee\text{"} \frac{\rightarrow \Gamma, A, B, \Delta}{\rightarrow \Gamma, A \vee B, \Delta} \quad \text{"}\wedge\text{"} \frac{\rightarrow \Gamma, A, \Delta \quad \rightarrow \Gamma, B, \Delta}{\rightarrow \Gamma, A \wedge B, \Delta}$$

$$\text{減} \frac{\rightarrow \Gamma, A, \Delta, A, \Pi}{\rightarrow \Gamma, A, \Delta, \Pi} \quad \text{減} \frac{\rightarrow \Gamma, A, \Delta, A, \Pi}{\rightarrow \Gamma, \Delta, A, \Pi}$$

$$\text{換} \frac{\rightarrow \Gamma, A, \Delta, B, \Pi}{\rightarrow \Gamma, B, \Delta, A, \Pi} \quad \text{増} \frac{\rightarrow \Gamma, \Delta}{\rightarrow \Gamma, A, \Delta}$$

$$\exists \frac{\rightarrow \Gamma, A(\tau), \Delta}{\rightarrow \Gamma, \exists x A(x), \Delta} \quad \forall \frac{\rightarrow \Gamma, A(\alpha), \Delta}{\rightarrow \Gamma, \forall x A(x), \Delta}$$

(α は下の列にはあらわれない)

phase 3, phase 4 における証明は上記形の始式と推論のみを用いて構成するため *Sequent* (31) は左辺をもたず $\rightarrow A_1, \dots, A_k$ なるもののみあらわれ, $\neg$ 推論, *Cut* (三段論法) もあらわれない。

特に phase 3 では (1) の形の始式と (2) の " $\vee$ " または " $\wedge$ " の推論のみが用いられる。

以下各 phase の内容を説明する.

[phase 1] A に同等な冠頭標準形 $B =$

$$\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \cdots \exists x_k \forall y_k \exists x_{k+1} B(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k, x_{k+1})$$

を求める. (但し $\exists x_i$ は $\exists x_{i1} \cdots \exists x_{id_i}$ ($d_i \geq 0$) なる $\exists$ 束縛の有限列の省略形, $k \geq 0$ とし $B(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, x_{k+1})$ は原始論理式と $\neg, \vee, \wedge$ のみからなる閉論理式で $\neg$ は原始論理式の直前にのみついているものとある.) この手続きの具体的な記述は省略する ([1], [3], [4] 参照).

次いで A または B にあらはれる関数記号, $f_1, \dots, f_k$ を用い.

$$(*) \quad B(x_1, f_1(x_1), \dots, x_k, f_k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}) \text{ を} \\ = D(x_1, \dots, x_n) \quad \text{とあければ, エルブランの定理より,}$$

$$A \text{ が妥当} \Leftrightarrow \exists x_1 \cdots \exists x_n D(x_1, \dots, x_n) \text{ が妥当} \\ \Leftrightarrow \text{「} D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn}) \text{ が妥当となる} \\ m \geq 1 \text{ と } \tau_{ij} \in U(D(x_1, \dots, x_n)) \text{ が存在する.」}$$

[phase 2] 上記 $D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ が妥当となる $m \geq 1$, と τ_{ij} があれば求める手続き Fig. 1 に入る. (この手続きの正当性は Appendix または [5] 参照.)

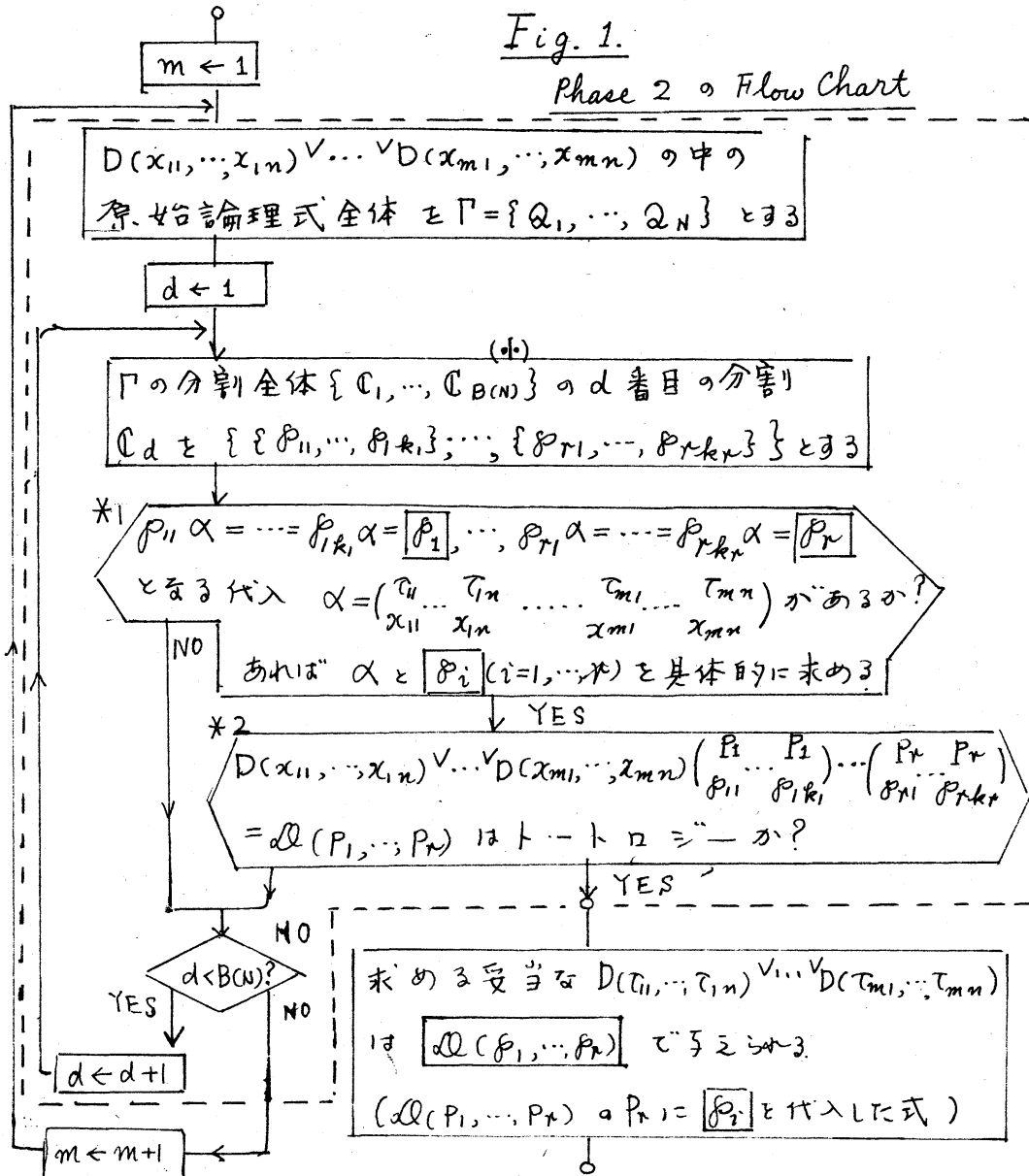
A が妥当 α とせば, 肯定的に終了し.

$$(*) \quad D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn}) = \mathcal{Q}(p_1, \dots, p_n) \\ \text{なる形で求まる. この } \mathcal{Q}(p_1, \dots, p_n) \text{ は命題論理 } \alpha \text{ の}$$

— トロジ—で、命題変数 P_i に代入する p_i は原始論理式であり、Fig 1 の (1) において説明されているように $D(x_{11}, \dots, x_{1n})^V \dots^V D(x_{m1}, \dots, x_{mn})$ の中にあらわれるある原始論理式にエルブラン領域のある項を代入したものである。

Fig. 1.

Phase 2 の Flow Chart



(註)(1) $B(N)$ は N 個の集合の分割の総数 (Bell 数)

[phase 3] phase 2 で求めた

$$D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn}) = \Delta(p_1, \dots, p_r)$$

に対し indicate した V を $\vee$ におきかえた

$$D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}), \dots, D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn}) = \Delta(p_1, \dots, p_r)$$

にしたる証明図を作る:

$\Delta(p_1, \dots, p_r)$ はトートロジ-故 $\Delta(p_1, \dots, p_r)$ にしたる " $\wedge$ " と " $\vee$ " 右推論のみ用いた証明図

$$\text{Proof} [\rightarrow \Delta(p_1, \dots, p_r)]$$

を下に述べる手順(*) により作れる。 ([4] 参照)

従ってこの証明図の中の「すべての p_i を原始論理式 p_i でおきかえ、($i=1, \dots, r$) れば」 $\rightarrow \Delta(p_1, \dots, p_r)$ にしたる証明

$$\text{Proof} [\rightarrow D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}), \dots, D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})]$$

そうる。

(手順 *)

(0) 与えられた Sequent $\Delta(p_1, \dots, p_r)$ を処理対象 Sequent S として indicate, 未処理分岐 (位置) の記憶 stack と clear して (1)へ進む

(1) 処理対象 Sequent S に論理式 A と $\neg A$ とがあらわれこいるか?

(1-1) YES のときは未処理分岐記憶 stack は空か?
 (1-1-1) YES のとき, 証明図作成は終了。

(1-1-2) No のとき, *stack* の最上部に記憶されている未処理分岐位置をとり出し, その位置の *Sequent* を処理対象 *Sequent* S として indicate (1) へ戻る.

(1-2) No のとき: indicate された *Sequent* S の論理式の中には $A \vee B$ なるものがあるか?

(1-2-1) YES のとき: S の中の $A_i \vee B_i$ なる論理式をすべて A_i, B_i に置きかえた *Sequent* S' を S の上に書き, S' を処理対象 *Sequent* S として (1) へ戻る.

(1-2-2) No のとき:

S の中には $A \wedge B$ なる論理式があるか?

(1-2-2-1) YES のとき:

$S = \Gamma, A \wedge B, \Delta$ (Γ に $A_i \wedge B_i$ 無し)

とあける. S を下の *Sequent* として $\wedge$ 右推論の上式 S', S'' を上に書き

$$\frac{\begin{array}{cc} S' & S'' \\ \rightarrow \Gamma, A, \Delta & \rightarrow \Gamma, B, \Delta \end{array}}{\rightarrow \Gamma, A \wedge B, \Delta} S$$

S'' を未処理分岐 *stack* の最上部に記憶させ,

S' を処理対象 *Sequent* S として (1) へ戻る.

(1-2-2-2) No のとき: 証明図なし STOP.

[Phase 4] phase 3 で求めた証明図

$\text{Proof} [\rightarrow D(\tau_1, \dots, \tau_n), \dots, D(\tau_{m_1}, \dots, \tau_{m_n})]$ の $D(x_1, \dots, x_n)$ は

$B(x_1, f_1(x_1), \dots, f_k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1})$ なる形故, 証明図

(*) $\text{Proof} [\rightarrow B(\sigma_1, \underline{f_1}(\sigma_1), \dots, \sigma_k, \underline{f_k}(\sigma_1, \dots, \sigma_k), \sigma_{k+1}), \dots$

$\dots, B(\sigma_{m_1}, \underline{f_1}(\sigma_{m_1}), \dots, \sigma_{m_k}, \underline{f_k}(\sigma_{m_1}, \dots, \sigma_{m_k}), \sigma_{m_{k+1}})]$

が得られたことになる。(但し σ_{ij} を代入する以前からあるス

コーラム関数には “-” をつけ *indicate* しておく。また (*)

の終式の $\underline{f_j}(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_j})$ ($i=1, \dots, k$) のすべてに (*) にな

異なる自由変数を対応させて用意する。簡単に次の以下で=

れを $\lambda_{f_j}(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_j})$ と記述することにする。) $\underline{f_j}$ に対す

る証明図(*)の項 $\underline{f_j}(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_j})$ を適切な順序で自由変数

$\lambda_{f_j}(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_j})$ でおまか之, $\forall y_j$ 推論で束縛し(行く。($\exists x_j$

$\forall y_j$ のように $\exists x_j$ も繰り返束縛する) ことにより, 証明図

(*) $\text{Proof} [\rightarrow \exists x_1 \forall y_1 \dots \exists x_k \forall y_k \exists x_{k+1} B(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, x_{k+1})]$

を作成する。精しい手順は次の通り。但し記述が冗長にな

るため, $k=2$ の場合を述べる(f_1 と f , f_2 と g とする。)

(Procedure 0) 証明図 (*): 即ち

$\text{Proof} [\rightarrow B(\pi_1, \underline{f}(\pi_1), \sigma_1, \underline{g}(\pi_1, \sigma_1), \omega_1), \dots, B(\pi_m, \underline{f}(\pi_m), \sigma_m,$

$\underline{g}(\pi_m, \sigma_m), \omega_m)]$ から “ $\exists$ ”, “増”を用い, 直ちに

$\text{Proof} [\rightarrow \exists x_3 B(\pi_1, \underline{f}(\pi_1), \sigma_1, \underline{g}(\pi_1, \sigma_1), x_3), \dots, \exists x_3 B(\pi_m, \underline{f}(\pi_m), \sigma_m,$

$\underline{g}(\pi_m, \sigma_m), x_3), \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3)]$ とする。

これを $IP(m, 0)$ とおく。これに次の Procedure 1 を繰り返し適用すれば目的の証明図をうる。

(Procedure 1) $IP(p, q) =$

Proof $[\rightarrow \exists x_3 B(\pi_1, \underline{f}(\pi_1), \sigma_1, \underline{g}(\pi_1, \sigma_1), x_3), \dots, \exists x_3 B(\pi_p, \underline{f}(\pi_p), \sigma_p, \underline{g}(\pi_p, \sigma_p), x_3),$
 $\exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(\pi_1, \underline{f}(\pi_1), x_2, y_2, x_3), \dots, \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(\pi_q, \underline{f}(\pi_q), x_2, y_2, x_3),$
 $\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3)] \quad (*)$

なる証明図が与えられたとき $(p, q) \neq (0, 0)$ ならば

$(p', q') < (p, q)$ (即ち $p' < p$ 或 $(p' = p \text{ \& } q' < q)$) なる証明図

$IP(p', q')$ を次のように作りうる：

(1) $\underline{g}(\pi_i, \sigma_i) = \underline{g}(\pi_j, \sigma_j) \ (i \neq j)$ なる i, j があるとき：

$*$ の $[]$ 内の式の $*$ 1 行目の i 番目と j 番目とは同じ論理式であるため、“減-推論”により 1 つの式とした $Sequent$ を下につけ加え $IP(p-1, q)$ とする。

(2) (1) でなく、 $\underline{f}(\pi_k) = \underline{f}(\pi_l) \ (k \neq l)$ なる k, l があるとき、

$*$ の $[]$ 内の式のうち $*$ 2 行目の k 番目と l 番目とは同じ論理式故、(1) と同様、“減推論”により $IP(p, q-1)$ をうる。

(3) (1) でなくかつ (2) でないとき：このとき $\underline{g}(\pi_i, \sigma_i) \ (i=1, \dots, p)$, $\underline{f}(\pi_j) \ (j=1, \dots, q)$ はすべて異なる (但し $p=0$ 或 $q=0$ も許す) このとき

$\deg(\underline{g}(\pi_i, \sigma_i))$, $\deg(\underline{f}(\pi_j))$ の最大のものの 1 を

search する. (但 $\deg(\tau) = \tau$ の記号の個数 とする).

(3-1) degree 最大の 1 つが $g(\pi_d, \sigma_d)$ のとき, 証明図

$\mathbb{P}(p, q)$ の最下の Sequent では d 番目の式

$\exists x_3 B(\pi_d, \underline{f}(\pi_d), \sigma_d, g(\pi_d, \sigma_d), x_3)$ にのみあらわれる.

$\mathbb{P}(p, q)$ の $g(\pi_d, \sigma_d)$ を自由変数 $\alpha_{g(\pi_d, \sigma_d)}$ にあ

てかえ^(*), 続いて $\forall y_2, \exists x_2$ 推論を用いる. 即ち d 番目

の式の所を indicate すれば

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \rightarrow \Gamma, \exists x_3 B(\pi_d, \underline{f}(\pi_d), \sigma_d, \alpha_{g(\pi_d, \sigma_d)}, x_3), \Delta \\ \hline \rightarrow \Gamma, \forall y_2 \exists x_3 B(\pi_d, \underline{f}(\pi_d), \sigma_d, y_2, x_3), \Delta \\ \hline \rightarrow \Gamma, \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(\pi_d, \underline{f}(\pi_d), x_2, y_2, x_3), \Delta \quad \text{となり.} \end{array}$$

更に, "換-推論"を用いれば $\mathbb{P}(p-1, q+1)$ となる.

(3-2) degree 最大の 1 つが $\underline{f}(v_h)$ のときにも, この

$\underline{f}(v_h)$ は $\mathbb{P}(p, q)$ の最下の Sequent では $d+h$ 番目の式

$\exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(v_h, \underline{f}(v_h), x_2, y_2, x_3)$ にのみあらわれる

故 (3-1) と同様に $\forall y_1, \exists x_1$ 推論を適用し "減推

論"を用いれば $\mathbb{P}(p, q-1)$ となる.

(註)(*) procedure 適用の各段階での証明図 $\mathbb{P}(p, q)$ につき

「 $\mathbb{P}(p, q)$ の中にあらわれる $g(\pi_i, \sigma_i), f(v_j)$ の一部分(図形と

しての)を束縛する $\exists, \forall$ 推論は存在しない」という性質は

保存される故 $g(\pi_d, \sigma_d)$ を $\alpha_{g(\pi_d, \sigma_d)}$ にあてかえても正し

い証明図となる。(もし $g(\pi_i, \sigma_i)$ または $f(w_j)$ の一部分を束縛する $\exists, \forall$ 推論があれば、下式に束縛変数を内部にもつ $g(\pi'_i, \sigma'_i)$ または $f(w'_j)$ を作る。しかるに証明図 $\mathbb{P}(p, q)$ には Cut はない。たの最下の Sequent (※の [] 内の Sequent) 内にかゝる図形 $g(\pi''_i, \sigma''_i)$ または $f(w''_j)$ が残る = ことになりや値する。)

かくして得られた証明図 $\mathbb{P}(o, o)$ は

(※)' $\text{Proot} [\rightarrow \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3)]$ であるが、

この証明図の中に残されたスコールム関数は次のようにして消去される:

証明図 (※)' 内の各論理式内のスコールム関数について「項の構成上からその外には他のスコールム関数はもはやない」というスコールム関数をすべて “-” をつけて indicate する。証明図内の かゝる indication をもつ $\underline{f}, \underline{g}$ で囲まれた項で形の異なるものをすべて列挙し

$\underline{g}(\rho_1, \mu_1), \dots, \underline{g}(\rho_r, \mu_r), \underline{f}(\lambda_1), \dots, \underline{f}(\lambda_s)$ とする。

前記(註)(*)と同様に これらの項の図形としての一部分を束縛する $\forall, \exists$ 推論はないので、これらと異なる自由変数

$\beta_{\underline{g}(\rho_1, \mu_1)}, \dots, \beta_{\underline{g}(\rho_r, \mu_r)}, \beta_{\underline{f}(\lambda_1)}, \dots, \beta_{\underline{f}(\lambda_s)}$ でおまかえても正し

い証明となる。かくして目的の証明図を得る。

EXAMPLE $A = \neg \exists y \forall z (P(z, y) \equiv \neg \exists x (P(z, x) \wedge P(x, z)))$

Phase 1 (1) A の 冠頭標準形 を求める

$$A = \neg \exists y \forall z (P(z, y) \equiv \neg \exists x (P(z, x) \wedge P(x, z)))$$

$$\equiv \neg \exists y \forall z ((\neg P(z, y) \vee \neg \exists x (P(z, x) \wedge P(x, z))) \wedge (\neg \neg \exists x (P(z, x) \wedge P(x, z)) \vee P(z, y)))$$

$$\equiv \forall y \exists z ((P(z, y) \wedge \exists x (P(z, x) \wedge P(x, z))) \vee (\forall x (\neg P(z, x) \vee \neg P(x, z)) \wedge \neg P(z, y)))$$

変数を入れかえ

$$\equiv \forall y_0 \exists x_1 ((P(x_1, y_0) \wedge \exists x_2 (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1))) \vee (\forall y_1 (\neg P(x_1, y_1) \vee \neg P(y_1, x_1)) \wedge \neg P(x_1, y_0)))$$

$$\equiv \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 ((P(x_1, y_0) \wedge (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1))) \vee ((\neg P(x_1, y_1) \vee \neg P(y_1, x_1)) \wedge \neg P(x_1, y_0)))$$

$$B(y_0, x_1, y_1, x_2)$$

(2) A と 妥当性 において 同等な $\exists x D(x)$ を求める

$$A \sim \exists x_1 \exists x_2 (P(x_1, \underline{a}) \wedge (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1))) \vee ((\neg P(x_1, \underline{f}(x_1)) \vee \neg P(\underline{f}(x_1), x_1)) \wedge \neg P(x_1, \underline{a}))$$

$$D(x_1, x_2) = B(\underline{a}, x_1, \underline{f}(x_1), x_2)$$

Phase 2 「 $D(\tau_{11}, \tau_{12}) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \tau_{m2})$ が 妥当 となる τ_{ij} が存在する

か？」の 検証を $m=1, 2, \dots$ について Fig. 1 の 手続きに従い 行う。

($m=1$) については 否定的に 判定され $m=2$ に進む

($m=2$) のとき 次のように 肯定的に 判定され “ A が 妥当 である” ことが 結論される。:

$\square D(x_{11}, x_{12}) \vee D(x_{21}, x_{22})$ の 原始論理式の 全体は

$$\Pi = \{ P(x_{11}, \underline{a}), P(x_{11}, x_{12}), P(x_{12}, x_{11}), P(x_{11}, \underline{f}(x_{11})), P(\underline{f}(x_{11}), x_{11}), \\ P(x_{21}, \underline{a}), P(x_{21}, x_{22}), P(x_{22}, x_{21}), P(x_{21}, \underline{f}(x_{21})), P(\underline{f}(x_{21}), x_{21}) \}$$

$$= \{Q_1, \dots, Q_{10}\}, \quad \Gamma \text{ の類別全体} = \{C_1, \dots, C_{B(10)}\}$$

Γ の類別を C_d と $C_1 = \{\{Q_1, \dots, Q_{10}\}\}$ から $C_{B(10)} = \{\{Q_1\}, \dots, \{Q_{10}\}\}$

に 向って Fig. 1 の *1.
② Fig 1 の *2 } の検証を行って行けば

$$C_{d_0} = \{\{Q_1, Q_2, Q_3\}, \{Q_4, Q_8\}, \{Q_5, Q_6, Q_7\}, \{Q_9\}, \{Q_{10}\}\}$$

なる類別のところに双方共肯定される。即ち

$$\textcircled{1} \quad Q_1\alpha = Q_2\alpha = Q_3\alpha = \boxed{\beta_1}, \quad Q_4\alpha = Q_8\alpha = \boxed{\beta_2}, \quad Q_5\alpha = Q_6\alpha = Q_7\alpha = \boxed{\beta_3}$$

$$Q_9\alpha = \boxed{\beta_4}, \quad Q_{10}\alpha = \boxed{\beta_5} \quad \text{と みたす代入 } \alpha \text{ の存在が肯定}$$

$$\text{すれ、実際} \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & a & f(a) & a \\ x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{即ち } \tau_{11} = \tau_{12} = \tau_{22} = a, \tau_{21} = f(a)$$

と求まる。(この*1の検証のアルゴリズムについては

[3]. 等参照). 従ってまた

$$\boxed{\beta_1} = p(a, a), \quad \boxed{\beta_2} = p(a, f(a)), \quad \boxed{\beta_3} = p(f(a), a), \quad \boxed{\beta_4} = p(f(a), f(f(a)))$$

$$\boxed{\beta_5} = p(f(f(a)), f(a)) \quad \text{も具体的に求まる.}$$

② 更に $D(x_{11}, x_{12}) \vee D(x_{21}, x_{22})$ において上記類別 C_{d_0} の 5 組の類 α 論理式とそれぞれ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 でおきかえてうる論理式

$$\frac{((P_1 \wedge (P_1 \wedge P_1)) \vee ((\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1)) \vee ((P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2)) \vee ((\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3))}{\vdash Q(P_1, \dots, P_5)} \text{ は } \vdash \text{ と判定される.}$$

従って求める妥当な $D(\tau_{11}, \tau_{12}) \vee D(\tau_{21}, \tau_{22})$ は

$$Q(\boxed{\beta_1}, \dots, \boxed{\beta_5}) = ((p(a, a) \wedge (p(a, a) \wedge p(a, a))) \vee ((\neg p(a, f(a)) \vee \neg p(f(a), a)) \wedge \neg p(a, a))) \vee ((p(f(a), a) \wedge (p(f(a), a) \wedge p(a, f(a)))) \vee ((\neg p(f(a), f(f(a))) \wedge \neg p(f(a), a))))$$

$$\forall \neg P(f(f(a), f(a))) \wedge \neg P(f(a), a))) \quad \text{C3 2 3 4 5}$$

phase 3 (1) $\mathcal{Q}(P_1, \dots, P_5)$ の証明図 $\text{Proof}[\rightarrow \mathcal{Q}(P_1, \dots, P_5)]$ の作成.

$$\begin{aligned} & \rightarrow P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_3, (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 & \rightarrow P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_2, (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 \\ & \rightarrow P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_3, (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 & \rightarrow P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_3 \wedge P_2, (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 \\ & \rightarrow P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 & \rightarrow P_1, \neg P_1, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 \\ & \rightarrow P_1, (\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 & \\ & \rightarrow P_1 \wedge (P_1 \wedge P_1), (\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 & \\ & \rightarrow (P_1 \wedge (P_1 \wedge P_1)) \vee ((\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1), (P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2)) \vee ((\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3) = \Delta(P_1, \dots, P_5) & \\ & \rightarrow ((P_1 \wedge (P_1 \wedge P_1)) \vee ((\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1)) \vee ((P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2)) \vee ((\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3)) = \Delta Q(P_1, \dots, P_5) & \end{aligned}$$

(2) $\text{Proof} [\rightarrow \Delta(P_1, \dots, P_5)] \ni P_1, \dots, P_5 \text{ is } P(a, a), P(a, f(a)), P(f(a), a), P(f(a), f(f(a)))$

, $p(f(f(a)), f(a)) \in \text{代入} : \text{Proof}[\rightarrow D(\tau_{11}, \tau_{12}), D(\tau_{21}, \tau_{22})]$ 也得 3.

即5 Proof $[\rightarrow B(\underline{a}, \tau_{11}, \underline{f}(\tau_{11}), \tau_{12}), B(\underline{a}, \tau_{21}, \underline{f}(\tau_{21}), \tau_{22})] \text{ 可得3.}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} \quad \tau_{12} \quad \tau_{11} \quad \tau_{11} \\ \rightarrow (P(\underline{a}, \underline{a}) \wedge (P(\underline{a}, \underline{a}) \wedge P(\underline{a}, \underline{a}))) \vee ((\neg P(\underline{a}, \underline{f}\underline{a}) \vee \neg P(\underline{f}\underline{a}, \underline{a})) \wedge \neg P(\underline{a}, \underline{a})), (P(\underline{f}\underline{a}, \underline{a})) \end{array} \right.$$

$$D(\tau_{11}, \tau_{12}) : B(\underline{a}, \tau_{11}, \underline{f}(\tau_{11}), \tau_{12})$$

phase 4

Phase 4

$$\begin{aligned} &\rightarrow \exists_{x_2} ((P(a, \underline{a}) \wedge (P(a, x_2) \wedge P(x_2, a)))^V ((\neg P(a, \underline{f}a)^V \neg P(\underline{f}a, a)) \wedge \neg P(a, \underline{a}))), \exists_{x_2} ((P(fa, \underline{a})) \\ &\rightarrow " , \forall y_1 \exists_{x_2} ((P(fa, \underline{a})) \\ &\rightarrow " \overbrace{\neg P(a, \underline{f}a)^V \neg P(\underline{f}a, a)}^{deg(f\underline{a})}, \exists_{x_1} \forall y_1 \exists_{x_2} ((P(x_1, \underline{a})) \overbrace{\quad}^{deg(\underline{a})} \\ &\rightarrow \forall y_1 \exists_{x_2} ((P(a, \underline{a}) \wedge (P(a, x_2) \wedge P(x_2, a)))^V ((\neg P(a, y_1)^V \neg P(y_1, a)) \wedge \neg P(a, \underline{a})))) , \\ &\rightarrow \exists_{x_1} \forall y_1 \exists_{x_2} ((P(x_1, \underline{a}) \wedge (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1)))^V ((\neg P(x_1, y_1)^V \neg P(y_1, x_1) \wedge \neg P(x_1, \underline{a})))), " \\ &\rightarrow \exists_{x_1} \forall y_1 \exists_{x_2} ((P(x_1, \underline{a}) \wedge (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1)))^V ((\neg P(x_1, y_1)^V \neg P(y_1, x_1) \wedge \neg P(x_1, \underline{a})))) \\ &\rightarrow \forall y_0 \exists_{x_1} \forall y_1 \exists_{x_2} ((P(x_1, y_0) \wedge (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1)))^V ((\neg P(x_1, y_1)^V \neg P(y_1, x_1) \wedge \neg P(x_1, y_0)))) \end{aligned}$$

(註) $f(f(a)), f(a), a$ の自由変数 $\alpha_{f(f(a))}, \alpha_{f(a)}, \alpha_a$ の置き換えは省略.

[illegible]

Appendix

[Phase 2] の手続きの正当性

Fig. 1 に示されるフローチャートの $\square$ の部分が $m \geq 1$ と fix したとき「 $D(\tau_1, \dots, \tau_n) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ が妥当となる $\tau_{ij} \in U(D(x_1, \dots, x_n))$ が存在するか？」の判定アルゴリズムを

手立てしていることを示す

変数 $x_1, \dots, x_n, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}$ と $y_1, \dots, y_M$ ($M = mn$) とし $D(x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee D(x_{m1}, \dots, x_{mn}) = E(y_1, \dots, y_M)$ とかく。[Proposition] 閉論理式 $(\forall, \exists$ を含まない) $E(y_1, \dots, y_M)$ につき、 $E(\tau_1, \dots, \tau_M)$ が妥当となる $\tau_i \in U(E(y_1, \dots, y_M))$ が存在する。 $\Leftrightarrow \vdash_{\text{prop.}} E(\tau_1, \dots, \tau_M)$ なる $\tau_i \in U(E(y_1, \dots, y_M))$ が存在する。 $\Leftrightarrow E(y_1, \dots, y_M)$ の中の原始論理式の全体 $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ のある分割 $\mathbb{C} = \{\{p_{11}, \dots, p_{1k_1}\}, \dots, \{p_{r1}, \dots, p_{rk_r}\}\}$ に対して、① $p_{11}\alpha = \dots = p_{1k_1}\alpha, \dots, p_{r1}\alpha = \dots = p_{rk_r}\alpha$ を成立させる代入 α (統一置換) が存在し、かつ② $E(y_1, \dots, y_M) \left(\begin{smallmatrix} p_1 & \dots & p_1 \\ p_{11} & \dots & p_{1k_1} \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} p_r & \dots & p_r \\ p_{r1} & \dots & p_{rk_r} \end{smallmatrix} \right)$ はトートロジー。但し $\vdash_{\text{prop.}}$ は $\forall, \exists$ 推論なしの LK で証明可能なことをあらわす。(証明) 始めの $\Leftrightarrow$ は命題論理における妥当性と証明可能性の同等性にもとずき、明らかである。

次のようにして証明する。

" $\rightarrow$ " part: $\vdash_{prop} E(\tau_1, \dots, \tau_M)$ のとき $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \tau_1 & \dots & \tau_M \\ y_1 & \dots & y_M \end{smallmatrix} \right)$ とおく。

$E(y_1, \dots, y_M)$ の素始論理式全体 $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ に対し代入 α により同じ形となるものを一括する = によりまとめる分割を $\mathcal{C} = \{\{p_{11}, \dots, p_{1k_1}\}, \dots, \{p_{r1}, \dots, p_{rk_r}\}\}$ とする。従って

$$\textcircled{1} p_{11}\alpha = \dots = p_{1k_1}\alpha (=R_1), \dots, p_{r1}\alpha = \dots = p_{rk_r}\alpha (=R_r)$$

$$\textcircled{2} \text{ また } E(y_1, \dots, y_M) = H(p_{11}, \dots, p_{1k_1}, \dots, p_{r1}, \dots, p_{rk_r}) \text{ とおける}$$

$$\begin{aligned} E(\tau_1, \dots, \tau_M) &= E(y_1, \dots, y_M)\alpha \\ &= H(p_{11}\alpha, \dots, p_{1k_1}\alpha, \dots, p_{r1}\alpha, \dots, p_{rk_r}\alpha) \\ &= H(R_1, \dots, R_1, \dots, R_r, \dots, R_r) \end{aligned}$$

仮定より $\vdash_{prop} H(R_1, \dots, R_1, \dots, R_r, \dots, R_r)$, $\forall, \exists$ 推論なしに

証明される故 R_i を命題変数 P_i でおきかえ

$$\vdash_{prop} H(P_1, \dots, P_1, \dots, P_r, \dots, P_r)$$

従って $H(P_1, \dots, P_1, \dots, P_r, \dots, P_r)$ は $\vdash$ - $\vdash$ ロジック

$$\begin{aligned} \text{即ち } &= H(p_{11}, \dots, p_{1k_1}, \dots, p_{r1}, \dots, p_{rk_r}) \left(\begin{smallmatrix} P_1 & \dots & P_1 \\ p_{11} & \dots & p_{1k_1} \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} P_r & \dots & P_r \\ p_{r1} & \dots & p_{rk_r} \end{smallmatrix} \right) \\ &= E(y_1, \dots, y_M) \left(\begin{smallmatrix} P_1 & \dots & P_1 \\ p_{11} & \dots & p_{1k_1} \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} P_r & \dots & P_r \\ p_{r1} & \dots & p_{rk_r} \end{smallmatrix} \right) \text{ は } \vdash\text{-}\vdash\text{ ロジック} \end{aligned}$$

" $\leftarrow$ " part: $\textcircled{1}$ をみたす $\alpha \in \alpha = \left(\begin{smallmatrix} \tau_1 & \dots & \tau_M \\ y_1 & \dots & y_M \end{smallmatrix} \right)$ とする。

$$\textcircled{2} \text{ より } \vdash_{prop} E(y_1, \dots, y_M) \left(\begin{smallmatrix} P_1 & \dots & P_1 \\ p_{11} & \dots & p_{1k_1} \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} P_r & \dots & P_r \\ p_{r1} & \dots & p_{rk_r} \end{smallmatrix} \right)$$

更に $P_i := p_{i1}\alpha$ を代入してうる式も証明可能。即ち

$$\vdash_{prop} E(y_1, \dots, y_M) \left(\begin{smallmatrix} p_{11}\alpha & \dots & p_{11}\alpha \\ p_{11} & \dots & p_{1k_1} \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} p_{r1}\alpha & \dots & p_{r1}\alpha \\ p_{r1} & \dots & p_{rk_r} \end{smallmatrix} \right)$$

$$\textcircled{1} \text{ より } p_{11}\alpha = p_{12}\alpha = \dots = p_{1k_1}\alpha, \dots, p_{r1}\alpha = p_{r2}\alpha = \dots = p_{rk_r}\alpha \text{ 故}$$

上記証明可能な式は

$$E(y_1, \dots, y_M) \left(\begin{smallmatrix} p_{1,1} & p_{1,k_1} \\ p_{1,1} & p_{1,k_1} \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} p_{n,1} & p_{n,k_n} \\ p_{n,1} & p_{n,k_n} \end{smallmatrix} \right) \\ = E(y_1, \dots, y_M) \alpha = E(\tau_1, \dots, \tau_M) \quad \text{自体である (証3)}$$

$$E(y_1, \dots, y_M) = D(x_{11}, \dots, x_{1n}) \vee \dots \vee P(x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

の中の原始論理式全体 $\Gamma = \{p_1, \dots, p_N\}$ の 1 つの分割 $\mathbb{C}$ に対する Fig. 1. のフローチャートの条件 *1 は $A(\mathbb{C})$

条件 *2 は $B(\mathbb{C})$

とかけは [Proposition] は次のようにかける

「 $E(\tau_1, \dots, \tau_M)$ が妥当となる $\tau_i \in \mathbb{D}(E(y_1, \dots, y_M))$ あり (*)

$\Rightarrow \Gamma = \{p_1, \dots, p_N\}$ のある分割 $\mathbb{C}$ があって $A(\mathbb{C}) \& B(\mathbb{C})$.

(一 Γ の分割全体 (有限個, $B(N)$ 個) をカウントする方法
は存在する $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \dots, \mathbb{C}_{B(N)}$ ([5] 参照), 従って,

$\Rightarrow \exists d \ 1 \leq d \leq B(N) \ (A(\mathbb{C}_d) \& B(\mathbb{C}_d))$

こゝに, $A(\mathbb{C})?$ は *unifiability* の検証 ([3] 参照) であり

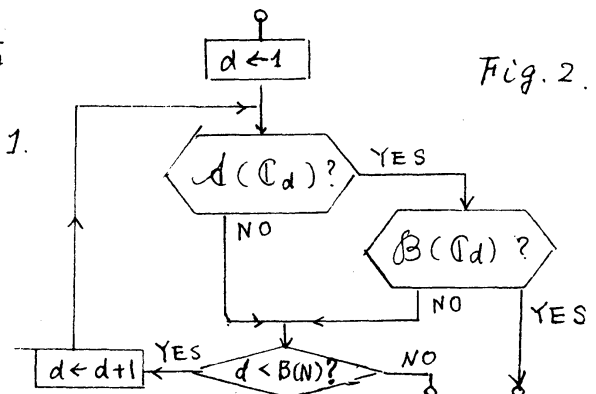
$B(\mathbb{C})?$ は命題論理の論理式の恒真性の検証であり

共にアルゴリズムである。従って (*) の検証はアルゴリズム

として右のように行

えられる。これは Fig. 1.

の [] の部分である。



謝辞 本稿に関連して立教大学の岩村聯先生, 京都大学数理解析研究所の高須達先生, 筑波大学の五十嵐滋先生には種々御注意をいただきましたことと感謝いたします。

参考文献

- [1] J. Shoenfield: *Theory of Mathematical Logic*
(1967), Addison-Wesley.
- [2] S. Kleene: *Mathematical Logic* (1967)
John Wiley.
- [3] Z. Manna: *Mathematical Theory of Computation*
(1974) McGraw-Hill.
- [4] 前原昭二: 数理論理学 昭和48年5月 培風館
- [5] 大芝猛, 永田周郎他: エルブランの定理にもとづく1
階述語論理の論理式の妥当性検証プログラムの1つにつ
いて: 「情報科学の基礎理論の研究」報告集(1) 昭和52年
科学研究費総合研究(B). または 日本数学会応用数学分科
会予稿集 (1977年10月)